

複雑ネットワークの物理

静岡大学 工学部 システム工学科 守田 智

1 はじめに

もののつながり方を研究する数学の一分野であるグラフ理論は、18世紀のEulerの研究から始まった。グラフとは、ノード（節点・頂点）とそのノードの対で定義されるリンク（エッジ・辺）からなる集合のことをいう。本稿ではネットワークといった場合もグラフといった場合も同じものを指すことにして特に区別はしないでおく。またリンクの方向を考慮したグラフを有向グラフというが、本稿では主に向きを考慮しない無向グラフのみについて解説する。従来のグラフ理論は、グラフが持ちうる一般的な性質を定理として厳密に証明するというまさに数学であった。たとえば、有名な定理に近年証明された四色問題がある。グラフ理論の考え方は、データ構造や最適化アルゴリズムといった工学的な応用にも用いられてきた。

社会科学の分野でも、人間関係をグラフとして表現し人間集団を分析する社会ネットワーク分析が1970年ごろから盛んになってきた[1, 2]。ここでは人のネットワークがどのような結合様式を持ちやすいかということも問題となる。しかし、初期の研究では観測の困難さもあり研究対象となるグラフのノード数は限られており、近年使われているようなネットワークモデルが用いられることはなかった。ただ、単純なモデルとしてSolomonoffとRapoport[3]が用い、ErdősとRényi[4]が解析を行ったランダムグラフがある[5]。このモデルでは、ノード間に等確率でリンクが導入される。ここでリンクがランダムに与えられること以って単にデタラメでどんなグラフでも生じさせることができるモデルだと思っはならない。すなわちランダムグラフにはそれなりの傾向を持っている[6]。ノードの数が大きい極限で確率が1（すくなくとも1の近くで）で成り立つ性質をいくつか挙げるができる。近年盛んに研究されているネットワークモデルの多くは、広い意味でランダムグラフを拡張したもののだといえ、このようなリンクが確率的に決まっているモデルでは従来のグラフ理論の考え方よりむしろ統計物理的考え方が有効になるのである。¹

ここ10年弱の間に生物の代謝系、生態系における生物種間の関係から経済社会の物流システムや工学的通信システムに至るまで様々なネットワークの調査が行われた（表1参照）。このような研究が行われるようになったのは、近年の計算機の発展により膨大なデータを容易に扱うことができるようになったからに他ならない。調査の結果、ほとんどのシステムのネットワークは正方格子のように規則的でもないし、ランダムグラフほど無秩序でもないことがわかってきた。この範疇のネットワークは、複雑ネットワーク (complex network) と呼ばれている。複雑ネットワークの多くの場合にいくつかの特徴を共有している。WattsとStrogatzが指摘したスモールワールド (small-world) 性とよばれる性質[8, 9]とBarabásiとAlbertが指摘した次数分布 (degree) が冪分布になるというスケールフリー (scale-free) 性がよく知られている[10, 12, 13]。数学、物理学、生物学から社会科学にいたる様々な分野でこのようなネットワークの特徴とそのシステムが持つ機能との関係についての研究が現在も進行している。複雑ネットワークの研究全般については、レ

¹決定論的にリンクやノードを導入するネットワークモデルもある。(例えば文献[7])

表 1: 複雑ネットワークの例

社会系	映画俳優共演 [8, 37], 学術論文共著 [32, 75], 電子メール [35], 性交渉 [36]
工学系	インターネット [30, 49], 航空路線 [37], 電力網 [8, 37]
情報系	学術論文引用 [31], WWW[10, 11]
生物系	代謝系 [33, 52, 60], 蛋白質 [34, 66, 76], 食物連鎖 [40, 41, 42], 神経回路 [8, 37, 39]

ビュー論文 [13, 14, 15, 16] や論文集 [5, 17, 18] も出版されている。また入門書 [19, 20, 21, 22] や日本語で読める研究紹介 [23, 24, 25, 26] もあるので興味があれば参照されたい。本稿では、複雑ネットワークが持つこれらの特徴を概観し (2 章)、提案されているモデルのいくつかを紹介する (3 章)。4 章では筆者の最近の研究について報告する。

2 複雑ネットワークの特性

2.1 スモールワールド性

1998 年, Watts と Strogatz は映画俳優の共演関係, 電力送電ネットワーク, 線虫 (*C. Elegans*) の神経回路を調べ, 共通の特徴を 2 つ見出すとともに, それらの特徴を再現するモデルを提案した [8]。一つ目の特徴はノード間の距離がノードの総数 N に比較して短いということである。グラフ上の 2 つのノード間の距離は最短のパスの長さで定義される。たとえば, 2 つのノード同士がリンクでつながっていれば距離は 1 であるし, 途中に 1 個のノードだけを経てつながっていれば距離は 2 である。グラフの平均ノード間距離 (average shortest path length) L はすべてのペアにわたる平均で定義される²。ノードの総数を N を増やした場合, d 次元格子の場合であれば $L \propto N^{1/d}$ となり冪的に増えるが, 提案されたモデルでは $L \propto \log N$ 程度でしか増えない。もうひとつの特徴はクラスタリング係数 (clustering coefficient) C が比較的大きい値を持つことである。クラスタリング係数とは, あるノードに着目してそのノードとつながるノードを 2 つ選択したときにその 2 つのノード間にもリンクが存在する割合である³。たとえば, あなたの友達を 2 人ランダムに選んだ時, その 2 人も友達同士である割合は世界の中で任意に選んだ 2 人が友達である割合より高いだろう⁴。もしリンクがランダムグラフのようにでたらめに生じているならクラスタリング係数はノードの数が大きい場合 0 へと漸近する。現実のネットワークのほとんどでクラスタリング係数 C は大きい。平均ノード間距離 L は小さい。Watts はこのような性質をスモールワールド性と呼んでいる。

スモールワールドという言葉は, 社会心理学者の Milgram によって 60 年代に行われた友人ネットワークに関する実験が「6 次の隔たり」(six degrees of separation) というキーワードとともによく知られている [27]。この実験で Milgram はアメリカ国内の数百人の人に手紙を書き, 目標とする一人の人物に手紙を届けてほしいと依頼した。ただしこの手紙には, もしこの目標となる人物を知らなければ手紙を直接届けるのではなく, 自分の親しい友人の中で目標に近いと思われる人に同様の手紙を送って友人ネットワークを経由して目標の人物に手紙を届けるように書かれていたので

² ネットワークの構成する要素に孤立点などがある場合, 2 つのノードがネットワークを通じて繋がっておらず 2 点間距離が定義できない (無限大になる) ことがある。このとき全体の平均ノード間距離は無限大ということになってしまうという問題があるが, 一番大きい連結成分の範囲内で平均を取ることにする。また距離の逆数の平均値を考えるという方法もある [16]

³ ネットワークを特徴付ける量として全ノードにわたるクラスタリング係数の平均値が用いられる。平均クラスタリング係数には, 平均をとるときに操作の仕方によっていくつかの異なる定義がある [16]。

⁴ 同様のことを説明するために友達の友達が友達である割合が高いと言ってもよいが, これらの 2 つの言い方で意味することが多少異なっていることに注意する必要がある。

ある。実験の結果、平均でわずか6ステップ程度で目標の人物に手紙が届くことが示されたわけである。Milgramの実験結果をモデルで再現するためには、ネットワークの平均ノード間距離が小さいだけでは足りないことが指摘されている [28]。なぜなら最短経路が短いからといってその経路を見出せるかどうか分からないからである。すなわちネットワーク上の探索がうまくいくかどうかはネットワークが持つ構造に依存する。たとえば所属関係ネットワークという概念を導入することで短い探索で目標にたどり着くことが可能になる [29]。

2.2 スケールフリー性

1999年、Albert, Jeong, Barabási はウェブページのハイパーリンクによるネットワークを調べ、ページが持つリンク数（内向きと外向きの双方）が冪分布に従っていることを発見した [10]。ウェブページをノードとみなしたとき結合次数の分布が

$$P(k) \sim k^{-\nu}$$

という冪則に従っていることを意味している。この性質は結合次数に固有のスケールがないことからスケールフリーと呼ばれる。その後の研究でインターネット [30]、学術論文における引用関係 [31]、共著関係 [32]、代謝ネットワーク [33]、蛋白質ネットワーク [34]、電子メールのやりとり [35]、性交渉関係 [36] などで結合次数が冪的分布を持つことが示された。冪分布の裾野には物理的な制限などにより場合によってはカットオフがあるが、ほとんどの場合その指数が $2 < \nu < 3$ の範囲にあることがわかっている [12, 14, 13, 15, 16, 37]。この場合、平均ノード間距離はノードを増やした場合に対数より緩やかな増加 ($L \propto \log \log N$) を示すことが解析的に分かっている⁵[38]。神経回路網や食物連鎖網などでは、次数分布が冪的ではなくむしろ指数関数的に減衰している場合もある [37, 39, 40]。

スケールフリー性を持つネットワークの特徴は、少数のハブと呼ばれるノードが大きい結合次数を持ち、ほとんどすべてのノードは比較的小さな結合次数しか持っていないことである。このためランダムにノードを選んで取り除く（故障する）場合、主に小さな結合次数を持つノードしか取り除かれないためネットワークの連結性は多くのノードが取り除かれた後でも維持される。一方、ハブを選んで取り除く（ハブへの攻撃）場合には少数のハブが消された段階でネットワークがバラバラになってしまう [43]。このようにスケールフリーネットワークは頑強性と脆弱性を併せ持つ。またハブの存在はネットワーク上を伝播する感染症に対しても重要な意味を持つ [44, 45]。疫学モデルでは、感染症が広がるかどうかは基本再生産数 R_0 が1を超えるかどうかで決まる。基本再生産数とは1人の感染者から平均何人に病気がうつるかという量である。従来の疫学では基本再生産数が1を超えるには感染率が有限の閾値を超える必要があると考えられていたが、スケールフリーネットワークでは必ずしもそうではない。ノード間に感染が起きた場合、うつされた側のノードの結合次数の分布はランダムにリンクを選んできた場合のその端のノードの結合次数の分布

$$P_{\text{link}}(k) = kP(k)/\langle k \rangle \quad (1)$$

に等しい。ここで単に $P(k)$ でなく k 倍しているのは、次数が大きいほど選ばれる確率が大きいからであり、分母の $\langle k \rangle$ は規格化のためである。ここで $\langle \cdot \rangle$ は全ノードに対する平均である。一方、結合次数が k のノードから病気が感染する平均ノード数は感染率を λ とすると $\lambda(k-1)$ である⁶。

⁵ $\nu = 3$ ならば $L \propto \log N / \log \log N$, $\nu > 3$ なら $L \propto \log N$ となる [38]。

⁶ここで一度その感染したノードは再度感染することは無いとして $\lambda(k-1)$ としている。これは免疫あるいは死亡を考慮した SIR モデルに対応している。何度でも感染する SI モデルの場合は λk とするとよく、結果は (2) の代わりに $\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle}$ になる [17]。

よって基本再生産数は

$$R_0 = \sum_k \lambda(k-1) \frac{kP(k)}{\langle k \rangle} = \lambda \frac{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle}{\langle k \rangle}$$

となり、 $R_0 = 1$ となる感染率は

$$\lambda_c = \frac{\langle k \rangle}{\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle} \quad (2)$$

となる。今スケールフリー性が厳密に成り立っていて $2 < \nu < 3$ とすると $\langle k^2 \rangle$ は発散してしまい感染率の閾値はほとんど0になる。したがって性感染症やコンピューターウイルスのようにスケールフリーネットワーク上で起こる感染症の拡大をくい止めるには、疫学でスーパースプレッダーとよばれるハブに対して何らかの対策をとる必要があると考えられる [46]。

2.3 巨大な連結成分

ほとんどのネットワークでは、含まれるノードの数に比べて平均結合次数はずっと小さい ($\langle k \rangle \ll N$)。すなわち、ほとんどのノードは全体のほんのごく一部としかつながっていないのである。このようにスパースな結合しかないならネットワークはいくつかの連結成分に分かれてしまう可能性があると思うかもしれない。しかし、大概の場合、ほとんどのノードは一つの連結成分に含まれている。なぜそんなことが可能かということは浸透理論によって理解できる [47]。クラスター性や次数相関を無視した場合、上記の感染症の場合と同様に考えると $\langle k^2 \rangle / \langle k \rangle > 2$ で巨大な連結成分が突如現れる。これは浸透理論におけるパーコレーション転移⁷である。より厳密な計算は文献を参照されたい [48]。巨大な連結成分が生じるために結合次数がそれほど大きくなる必要は無いし、2つの大きな連結成分に分かれて存在するということもあり得ない。

2.4 次数相関

リンクの両端のノードの結合次数に相関が有るか無いかも調べられている [16, 49, 50]。次数相関は次数 k のノードと繋がっているノードの平均次数 (averager nearest neighbor degree)

$$\bar{k}_{nn}(k) = \sum_{k'} k' P(k'|k) \quad (3)$$

のグラフを描くことによって調べることができる [49]。ここで $P(k'|k)$ は次数 k のノードと繋がっているノードの次数の分布である。相関が無ければ、 $P(k'|k)$ はリンクの端のノードの次数の分布 (1) で与えられ、

$$P(k'|k) = P_{\text{link}}(k') = \frac{k' P(k')}{\langle k \rangle} \quad (4)$$

なので、式 (4) を式 (3) に代入すると

$$\bar{k}_{nn}(k) = \frac{\langle k^2 \rangle}{\langle k \rangle} \quad (5)$$

⁷この場合はボンドパーコレーションに対応する。一方、前節にあったランダムにノードを取り除く例はサイトパーコレーションに対応する。両者の違いに注意が必要である。

と計算でき、 k によらず一定となる。次数相関は、同類度 (assortativity)⁸

$$r = \frac{\sum_k \sum_{k'} k k' P(k'|k) P_{\text{link}}(k) - \left(\sum_k k P_{\text{link}}(k) \right)^2}{\sum_k k^2 P_{\text{link}}(k) - \left(\sum_k k P_{\text{link}}(k) \right)^2}$$

という量によって計ることもできる [50]。同類度 r は相関が無ければ 0 であるし、完全に一致していれば 1 になる。共演・共著関係といった人間関係の場合は正の相関がある一方、遺伝子ネットワーク、たんぱく質ネットワーク、神経回路、食物連鎖網のような生物学で現れる負の相関を持っている。電力供給網やインターネットのような工学的なネットワークでは比較的小さいながらも負の相関を持つ。正の次数相関はパーコレーション転移点を低くする傾向があるといわれている [50, 51]。⁹

2.5 階層性, モジュール

上記のような特性は複雑ネットワーク一般に対して用いられているが、個々のネットワークの構造と機能の分析のために階層性やモジュールを見出す手法の開発も行われるようになってきている。スケールフリーネットワークのようにノードの非一様が高い場合、ノード間の結合に何らかの階層性があると考えられる。局所的なクラスタリング係数と次数の関係から階層性を探る研究が行われている [7, 52]。すなわち階層性のあるネットワークではノードのクラスタリング係数がその次数に対して減少する傾向を持つ。また結合の偏りからネットワークをいくつかの部分（コミュニティ、クリーク）に分類する方法も提案されている [53, 54, 55, 56]。代謝ネットワークなどで頻繁に現れる形がありネットワークモチーフ (network motif) と呼ばれている¹⁰[57, 58, 60]。このような特殊な結合様式は代謝反応のフィードフォワードループを構成していると考えられている。個別のネットワークの機能については、現在もっとも研究が盛んに行われている領域の一つである [60]。

2.6 空間構造

実際のネットワークの一部は地理的空間に構築されている。空間上の距離が大きいノード間での結合は経済的に無駄であると考えられる。交通や物流のネットワークでは、リンクのあるノード間の距離の分布に指数的減衰が仮定されることが多いが [61]、インターネットの場合にリンクのあるノード間の距離の分布は距離に反比例していることが指摘されている [62]。その他の場合も距離が増えるとリンクが生じにくい傾向があるが、その分布は場合によって異なるようである [63, 64]。また空間構造の概念は地理的空間にとどまらない。たとえば人間関係のようなネットワークでも多次元的な性質である社会的アイデンティティの違いによる社会的距離の影響を受けると考えられる [20]

⁸この日本語は一般的ではないと思うが、同じ種類のものにリンクがはられる傾向があるかないかを測る量なので同類度とした。また正の相関があるネットワークを assortative、負の相関のあるネットワークを disassortative と形容する。

⁹夏の学校で配布されたテキストは間違っていました。ここに訂正してお詫びいたします。

¹⁰ネットワークモチーフについては批判もある [59]

3 ネットワークモデルの紹介

3.1 ランダムグラフ

もっともシンプルなモデルは Erdős と Rényi によるランダムグラフである [4, 6]. N 個のノードを考え、ランダムに選んだ mN 対のペアにリンクをはる¹¹. 結果、ノードから平均 $2m$ 本のリンクが出ていることになり、結合次数の分布は Poisson 分布

$$P(k) = \frac{e^{-2m}(2m)^k}{k!}$$

に従う¹². 平均ノード間距離は大雑把に計算することができる. ランダムに選んだノードと直接リンクで繋がっているノードの平均数は $\langle k \rangle = 2m$ である. さらにその隣接ノードから外向きに出ているリンクの平均数は (4) を使って計算すると $(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)/\langle k \rangle = 2m$ となる. 数え上げの重複を無視して同様の計算を繰り返すと z だけ離れた距離にあるノードの平均数は $(2m)^z$ となる. ノード間の特徴的な距離を l としてみると $1 + \sum_{z=1}^l (2m)^z \sim N$ であるので

$$l \sim \log N / \log(2m)$$

と概算できる. また式 (5) より $\bar{k}_{nn}(k) = 2m + 1$ となり, k によらないので次数相関は無い. すなわち同類度も 0 となる. 次数相関が無いことからクラスタリング係数も以下のようにして計算できる [15, 16]. 2 つノードがそれぞれ次数 k と次数 k' を持つ場合にその間にリンクが存在する条件付確率は $\frac{k k'}{\langle k \rangle N}$ である¹³. さらに着目するノードから次数が k と k' の 2 つノードにリンクがある場合に 3 角形が構成される条件付確率は $\frac{(k-1)(k'-1)}{\langle k \rangle N}$ であるのでクラスタリング係数は

$$\begin{aligned} c(k) &= \sum_{k'} \sum_{k''} \frac{(k'-1)(k''-1)}{\langle k \rangle N} p(k') p(k'') \\ &= \frac{(\langle k^2 \rangle - \langle k \rangle)^2}{\langle k \rangle^3 N} \\ &= 2m/N \end{aligned}$$

と計算される. $N \rightarrow \infty$ で 0 に漸近している. また, あらかじめ次数分布を与えてそれを制限としたランダムグラフも使われ, 同様に解析できる¹⁴[6, 48, 65, 66].

3.2 Watts と Strogatz のスモールワールドモデル

前章で見たスモールワールド性を再現するため Watts と Strogatz は格子状のネットワークとランダムグラフの中間に位置するモデルを考案した [8, 9]. まず格子状にリンクを張るが, そのリンクを確率 ϕ でランダムに選んだノードに付け替える. もし, ϕ が小さければ格子の構造が残っているのでクラスタ係数は高いまほとんども変わらない. 平均ノード間距離を概算するにはオリジナルなモデルに手を加えてリンクをランダムに付け替えるのではなく格子状のリンクはそのままにし

¹¹ あらかじめリンクの本数を決めず, すべてのペアに対して確率 p でリンクをはるという方法もある. この場合, リンクの総数 x の分布は $p^x(1-p)^{n \cdot C_2 - m}$ となり平均 $n(n-2)p/2$ となる. N の大きい極限で相違は無い. (文献 [6] の Theorem 2.2)

¹² N が有限なら 2 項分布のほうが正しいが N が十分大きく m が比較的小さい場合は Poisson 分布で近似できる.

¹³ k や k' に比例して大きくなるのは自明だし, 分母は足し合わせたときにリンクの総本数となるようにするためである.

¹⁴ 与えられた次数分布に従うグラフを作りリンクをランダムに入れ替えるリンク入れ替えモデル (link randomized model) と各ノードに次数分布に従う数の「手」を作り手同士をランダムにつなげるコンフィギュレーションモデル (configuration model) の 2 通りが使われる. ノード数の大きい極限で 2 つのモデルは一致する.

てリンクを付け加えるようにすると都合がよい [67]. このとき付け加えられるショートカットは特徴的長さ ξ 持ち, 格子の次元を d として各軸に対して k 個リンクがはられているとすると

$$\xi = \frac{1}{(\phi k d)^{1/d}} \sim \phi^{-1/d}$$

となる. 格子サイズ L_* 以外の特徴的な長さはこの ξ しかないので平均ノード間距離 L は

$$L/L_* = f(\phi^{1/d} L_*) \quad (6)$$

とかけると予想される.. ここで $f(x)$ はスケーリング関数である. 実際, 式 (6) は繰り込み群を用いて導出できる [68]. $\phi \rightarrow 0$ の極限で元の格子になるのでこの極限では一定となる. $\phi \rightarrow \infty$ の極限でランダムグラフになるので $f(x) \sim \log x/x$ となる. $L_* \sim \xi$ で 2 つの領域を隔てるクロスオーバーがある. 格子サイズ L_* が大きい極限ではクロスオーバーが生じる ϕ は 0 に近づき小さくなる. 実際, 平均ノード間距離を小さくするのに必要なショートカットの数は少ないことが数値計算で確かめられる. スケーリング関数の形は上記の理論では決まらないが平均場的な近似で概算することもできる [67]. ネットワーク上の伝播や同期は ϕ が大きいほど生じやすくなることも示される [69, 70, 71].

3.3 成長+優先的結合モデル

ネットワークの成長とリンクの優先的結合 (preferential attachment) を考慮したモデルによってスケールフリー性を再現できる. 1999 年に Barabási と Albert はワールドワイドウェブ (WWW) のモデルとして以下のようなモデルが提案した (以下 BA モデルと呼ぶ) ¹⁵[12]. 初期条件として少数のノードからなる完全グラフ (すべてのペアにリンクがあるグラフ) から始めて

1. 新たなノードを 1 個追加する.
2. 追加されたノードは既存のノードの m 個のノードとリンクをはるがそのとき結合次数に比例した以下の確率で選ぶ.

$$\pi(k_i) = \frac{k_i}{\sum_i k_i} \quad (7)$$

3. 上記の過程を繰り返す.

上記のような過程 (いわゆる "rich get richer" なルール) によって冪則が現れることは, Simon によってかなり前から知られていた [73]. 初期条件によるわずかな影響を無視すると t ステップ後のノードの数は t でリンクの数は mt であり, 結合次数の平均値は $\langle k \rangle = 2mt$ である. 次数が k のノードが次のステップで次数を増やす確率は $k/(2t)$ である. s ステップ目に加わったノードが t ステップ目に次数 k を持つ確率を $p(k, s, t)$ とおくとマスター方程式

$$p(k, s, t+1) = \frac{k-1}{2t} p(k-1, s, t) + \left(1 - \frac{k}{2t}\right) p(k, s, t) \quad (8)$$

が成り立つ. ここで境界条件 $p(k, t, t) = \delta_{k,m}$ を充たす. ネットワーク全体の次数分布 $P(k, t)$ は

$$P(k, t) = \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t p(k, s, t)$$

¹⁵同様のモデルは 1965 年 Price によって用いられていた [72]. Price のモデルは学術論文の引用ネットワークに対するもので有向グラフを構成する. この場合の次数分布 (引用された数の分布) の冪指数は $2 + 1/m$ となる [16].

とかけるので, (8) の両辺の $s = 1$ から $s = t$ までの和を計算すると

$$(t+1)P(k, t+1) - tP(k, t) = \frac{1}{2}[(k-1)P(k-1, t) - kP(k, t)] + \delta_{k,m}$$

となる. 定常状態 $P(k)$ を求めるには $P(k) = P(k, t+1) = P(k, t)$ とすればよいので

$$P(k) + \frac{1}{2}[kP(k) - (k-1)P(k-1)] = \delta_{k,m}$$

である. $P(m) = 2/(m+2)$ となり, $k > m$ で $P(k) = \frac{k-1}{k+2}P(k-1)$ なので, これを解いて

$$P(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)}$$

が導かれる. k が大きい領域では $P(k) \propto k^{-3}$ となり冪則に従っている. 優先的結合の確率が線形でなく k^α に比例する場合, 次数分布は冪にはならない [74]. 特に, 結合がまったく優先的でない場合 ($\alpha = 0$) は次数分布は指数関数になる. 実際のデータから α を推定すると冪指数がほぼ 1 であるものが多いが 1 よりやや小さくなるものもある [13, 75, 76].

BA モデルでは冪指数 ν は 3 にしかならないが, モデルを現実的に改良することで異なる冪指数を実現することもできる [15]. たとえば, BA モデルの過程 2 で新しく付け加わったノードからだけでなく, 既存のノード間にも m_c 本のリンクを次数に比例した確率 (7) で生じさせると次数分布の冪指数は $\nu = 2 + \frac{1}{1+2c}$ となる. これとは別に, 各ステップにつき m_p 本の既存のリンクをはずして確率 (7) で選んだノードに付け替えてやると $\nu = 2 + \frac{m-m_p}{m+m_p}$ となる. これらの場合いずれも次数相関やクラスタリング係数はノードの数の増加に対して 0 に漸近する.

また, 優先的結合の際の確率を以下のように一次関数に拡張したモデルもある [77, 78].

$$\pi(k_i) = \frac{k_i + A}{\sum_i (k_i + A)}$$

$A > 0$ の場合, 後から追加されたノードに比較的に有利であることを意味する. このモデルの次数分布の冪指数は $\nu = 3 + A/m$ となる. 次数相関についても解析的に求めることができ $\bar{k}_{nn}(k) \simeq \beta \zeta(2\beta)(m+A)^{3-1/\beta} N^{2\beta-1} k^{-2+1/\beta} + (m+A) \log(k/(m+A))$ となる. ここで $\beta = m/(2m+A)$ であり ζ はゼータ関数を表す. したがって, このモデルでは, $\mu < 3$ (つまり $A < 0$ であり $\beta > 1/2$ となる) ならば次数相関は負となり, $\mu > 3$ ならば正の次数相関を持つことが分かる. この場合でもクラスタリング係数は 0 に漸近する.

3.4 成長+局所ルールモデル

前節のモデルはクラスタリング係数が小さいし, 新たなノードが $\pi(k_i) = k_i / \sum_i k_i$ の値を知るには既存のノードすべての情報が必要になってしまうという問題点もあるので, いろいろな改良モデルが提案されている. 改良モデルの一つの形式として局所的なルールの導入によるものがある. このようなモデルでは, クラスタリング係数を高くするためにネットワークに 3 角形が生じやすくしている. たとえば, BA モデルの過程 2 の代わりにすでにあるノードのリンクをまねるようにしたモデルが提案されている [79, 80]. 新しい友達は今の友達の友達である可能性が高いという傾向をモデル化したものである. 式 (4) の導出でみたようにリンクをランダムに選ぶと端のノードは次数に比例した確率で選ばれるので, このような局所ルールは優先的結合を再現し次数分布が冪的になる. この範疇のモデルの一つである最近接結合 (connecting nearest neighbor) モデルではクラ

スタリング係数は階層的になり次数相関は正となるが、リンクを生じさせるときの局所ルールいかんによっては次数相関を負になることもある¹⁶[80].

3.5 地理的空間上での成長+優先的結合モデル

地理的空間上のネットワークをモデル化するため BA モデルを空間上に拡張したモデルもある [62, 83, 84, 85, 86, 87]. たとえば, ノードにランダムに位置を割り振り, BA モデルの過程 2 でのリンクをはる確率を

$$\pi(k_i) = \frac{k_i r^\alpha}{\sum_i k_i r^\alpha}$$

とするモデルが考えられる [83, 84]. ここで r は追加されたノードと既存の i 番目のノードの距離である. パラメーター α の値を変えることで距離による影響の強弱を調整できる. α がある閾値 α_c より小さいとスケールフリー性は保持される [84]. この場合のクラスタリング係数は 0 へ漸近することが数値計算で示されている. ただし, 閾値 α_c がいくつになるのかは, はっきりしていないようだ.

また距離の影響を指数関数的にしたモデルもある [87]. すなわちリンクをはる確率を

$$\pi(k_i) = \frac{k_i e^{-r/r_c}}{\sum_i k_i e^{-r/r_c}}$$

とする. 上記のモデルと異なり特徴的な距離 r_c を持つ. このため次数分布の冪則には指数関数的なカットオフが見られる. 距離の影響が優先的結合の影響に比べ大きい場合には優先的結合の無い空間ネットワークモデル [88] と同じような性質を持ち, 次数相関は正でクラスタリング係数も大きくなる.

3.6 静的ネットワークモデル

上記で見た成長を考慮したネットワークモデルでは, ネットワークの構造変化 (特に優先的結合) によってノードの属性 (結合次数によって表現されている) が決定される. しかし, ノードが本来持っている内的な特性がネットワークを形成の重要な要因となることも場合もある. たとえば社会的な地位だとか社交性の強さなどの属性である. このような場合のモデルとして優先的結合によらずスケールフリー性を再現する静的な (成長を考慮しない) モデルが提案されている. このようなモデルでは各ノードに内的結合強度 (intrinsic fitness) a を指定しておき, ノードのペアに対してある確率 $f(a, a')$ でリンクをはる. 内的結合強度 a の分布を $\rho(a) = a^{-\gamma}$ のように冪分布とするとネットワークの次数分布も冪的になると予想される. 内的結合強度に冪分布を仮定にすることは恣意的になって見えるかも知れないが, 遺伝子の発現量, 都市の人口の分布, 企業のサイズなどの多くの量でこのような冪的分布が観測されており Zipf の法則 (Zipf's law) と呼ばれていることを考えると妥当な仮定であるといえる [89, 90, 91]. $1/(\gamma - 1)$ は Zipf 指数と呼ばれ, 多くの場合で 1 に近い値になるといわれている. 結合確率を決める関数 $f(a, a')$ として

$$f(a, a') \propto aa' \quad (9)$$

¹⁶また, 局所的ルールを使わないで BA モデルの過程 2 の代わりに一部の活性化している少数ノードだけに結合が生じようとした頂点非活性モデルというものもある [81, 82] このモデルでもクラスタリング係数は階層的になるが次数相関は常に負となる.

のようにペアの内的結合強度の積に比例するものが考えられる [92, 93, 94]. また,

$$f(a, a') = \theta(a + a' - z) \quad (10)$$

としたもの（ここで θ は Heaviside の関数, z はある閾値）もあり, 閾値モデル (threshold model) と呼ばれている [94, 96]. 内的結合強度の分布を他の分布にしたものもあるが, その場合でも次数分布は冪的な振る舞いを見せ, 閾値モデルの冪指数は 2 であることが多い [95, 96]. また次数相関は負になる傾向がある [96, 97].

実際, この範疇のモデルは原理的に解くことができる [93, 96, 98]. 内的結合強度 a のノードと任意のノードを選んだ場合にその間にリンクがあつて後者の内的結合強度が a' である確率は $f(a, a')\rho(a')$ である. したがって内的結合強度が a となるノードの次数の平均値はノードの総数 N が十分に大きいとき

$$\bar{k}(a) = N \int f(a, a')\rho(a')da' \quad (11)$$

である. 同様に計算すると内的結合強度 a のノードと繋がっているノードの平均次数は,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{nn}(a) &= \frac{\int f(a, a')\bar{k}(a')\rho(a')da'}{\int f(a, a')\rho(a')da'} + 1 \\ &= \frac{N}{\bar{k}(a)} \int f(a, a')\bar{k}(a')\rho(a')da' + 1 \end{aligned} \quad (12)$$

となり, 内的結合強度 a のノードのクラスタリング係数は

$$\begin{aligned} C(a) &= \frac{\int \int f(a, a')f(a, a'')f(a', a'')\rho(a')\rho(a'')da'da''}{\int \int f(a, a')f(a, a'')\rho(a')\rho(a'')da'da''} \\ &= \frac{N^2}{\bar{k}(a)^2} \int \int f(a, a')f(a, a'')f(a', a'')\rho(a')\rho(a'')da'da'' \end{aligned} \quad (13)$$

と書き表せる.

3.7 空間上の静的ネットワークモデル

内的結合強度だけでなくノードの位置を考慮したモデルもいくつか提案されている. Warren らのモデルでは, d 次元格子にあらかじめ次数をノードを置き, かつ各ノードに半径 R_i を冪則 $p(R) = R^{d(\nu-1)+1}$ に従うように割り振る. 距離がその円内になるノードとリンクさせる [99]. このモデルでは次数分布が冪的であるにもかかわらずパーコレーション転移点が有限になる. Rozenfeld らは似たようなモデルを用いて次数分布に対する有限サイズ効果によるカットオフについて解析している [100]. 彼らのモデルでは次数 k_i を冪則 $p(k) = k^{-\nu}$ で与えて半径 R_i は $R = Ak^{1/d}$ で指定する (A はモデルパラメーターである). ランダムにノードを次々に選んで円内にある別のノードリンクさせる. 指定した次数にすでに達している場合はリンクを追加しない. Warren らのモデルでは円中にあるノードと必ずリンクしていた点が異なる. そのため Warren らのモデルでは次数の小さい側で冪則からずれるが, Rozenfeld らでは次数の大きい側で冪則からずれるという違いがある.

さらに各ノードの内的結合強度 a を考え、2つのノードの内的結合強度と距離との関係

$$\frac{f(a, a')}{h(r)} > 1/\theta$$

によってリンクを付加するモデルもある [101, 102]. 前節で扱った空間を考慮しない静的ネットワークの自然な拡張になっている. a の分布や $f(a, a'), h(r)$ の関数形によっていろいろなモデルを構築できるが [101], 次章では a の分布が冪的で $f(a, a')$ が (10) で与えられ $h(r) = r^d$ としたモデルを考察する. このような形式は引力モデル (gravity model) と呼ばれる.

4 空間上の静的ネットワークモデルの解析

4.1 モデル

本章では文献 [102] に沿ってネットワークの構造がノードの属性で決まっている場合を考察する. ノードの属性として位置 x_i と内的結合強度 a_i の2つを考える. 位置は近ければ近いほどリンクが生じやすい傾向を示す属性であり, 内的結合強度は値が大きければ大きいほどリンクが生じやすい傾向を示す属性である. 位置はノードを d 次元空間上にランダムに配置すると仮定する. また内的結合強度の分布は冪則 $\rho(a) \propto a^{-\gamma}$ に従うと仮定する. まず N 個のノードを考え, i 番目のノードに内的結合強度

$$a_i = \left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (14)$$

を決定論的に指定する. ただし $\gamma > 1$ とする¹⁷. 指数が $\gamma \simeq 2$ を充たす場合に Zipf の法則に対応する. ノードの総数 N が十分大きいと仮定すると属性値 a_i の分布は

$$\rho(a) = (\gamma - 1)a^{-\gamma} + \frac{\delta(a - 1)}{2N} + \frac{\delta(a - N^{\frac{1}{\gamma-1}})}{2N} \quad (15)$$

と近似でき,

$$1 \leq a \leq N^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (16)$$

でのみ正の値を持つ. ここで $\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である. このように a の分布は両端を除くと冪則 $\rho(a) \propto a^{-\gamma}$ に従う. $N^{\frac{1}{\gamma-1}}$ において有限サイズ効果によるカットオフが生じている.

また, 各ノードは d 次元単位立方体内の点であるとする. ノードの分布は一様で, 2つのノード i, j 間の距離 $l(i, j)$ は周期境界条件を課した最大ノルムで定義する. 2つのノード i, j に結合が生じる条件を

$$\frac{(2l(i, j))^d}{a_i a_j} < \theta \quad (17)$$

とする. θ は結合の総本数を決める閾値パラメーターである. ここでは結合本数が mN となるように θ を選ぶことにする. 上式で d 乗しているのは内的結合強度 a が倍になれば結合が生じる範囲の d 次元体積が倍になるようにするためである. 上式の左辺の分母を内的結合強度の積にしているのも同様の理由からである. 上の式で積を和によって定義することもできるが指数関数で変換すれば置き換えることができる [101]. ただしその場合は a の分布と式 (3.7) の $h(r)$ も置き換える必要がある.

¹⁷ 文献 [92, 93, 97] などでは $\gamma > 2$ のみを考察しているが, ここではより一般的に $\gamma > 1$ とする. $\gamma < 2$ で a の平均値が $N \rightarrow \infty$ で発散してしまうのを嫌ってのことだと思われるが, 有限サイズ効果によるカットオフを考慮すれば特に問題ない.

4.2 次数分布

ノードの空間上の分布が一様なのでノード間距離の分布は

$$p(l < x) = \begin{cases} (2x)^d & (l < 1/2) \\ 1 & (l \geq 1/2) \end{cases}$$

となる。したがって内的結合強度が a と a' で与えられているノードのペア間に結合がある確率は

$$f(a, a') = \min(\theta aa', 1) \quad (18)$$

である。これは確率は1以下であるからである。内的結合強度が a であるノードの平均結合次数は (11) で与えられるので、(15) と (18) を代入して計算すると

$$\bar{k}(a) \simeq \begin{cases} \frac{2(\gamma-1)N - \gamma N^{\frac{1}{\gamma-1}}}{2(\gamma-2)} \theta a & (a < \theta^{-1} N^{\frac{1}{\gamma-1}}) \\ \frac{(\gamma-1)\theta a - (\theta a)^{\gamma-1}}{\gamma-2} N & (a \geq \theta^{-1} N^{\frac{1}{\gamma-1}}) \end{cases} \quad (19)$$

のように求められる。さらに

$$2m = \int \bar{k}(a) \rho(a) da \quad (20)$$

となる。 N が大きい時支配的な項のみを取り出して書き下すと θ の近似式

$$\theta \simeq \begin{cases} \frac{2m}{N} \left(\frac{\gamma-2}{\gamma-1} \right)^2 & (\gamma > 2) \\ \left(\frac{2m(2-\gamma)}{N \ln N} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} & (1 < \gamma < 2) \end{cases} \quad (21)$$

が得られる。このように漸近的な性質は $\gamma = 2$ を境に変化する。すなわち $\gamma > 2$ で (19) は N の大きい極限で

$$\bar{k}(a) \simeq 2m \frac{\gamma-2}{\gamma-1} a \quad (\gamma > 2) \quad (22)$$

となる一方、 $1 < \gamma < 2$ では $a > \theta^{-1} N^{\frac{1}{\gamma-1}}$ の範囲で

$$\bar{k}(a) \simeq \frac{2m}{\ln N} a^{\gamma-1} \quad (1 < \gamma < 2) \quad (23)$$

と書き表せる。 $1 < \gamma < 2$ の場合は結合次数は内的結合強度に比例せず、その $\gamma-1$ 乗に比例する。このような違いは、(11) の積分の計算において $\gamma > 2$ では積分範囲 (16) のうち a が小さいほう ($a \sim 1$) が支配的である一方、 $\gamma < 2$ では a が大きいほう ($a \sim N^{1/(\gamma-1)}$) が支配的となることから生じる。

結合次数の分布は

$$P(k) = \int P(k|a) \rho(a) da \quad (24)$$

と書き表せる¹⁸。ここで $P(k|a)$ は内的結合強度が a であるノードに対して次数が k である (条件付) 確率であり、2項分布

$$P(k|a) = \binom{N}{k} \left(\frac{\bar{k}(a)}{N} \right)^k \left(1 - \frac{\bar{k}(a)}{N} \right)^{N-k} \quad (25)$$

¹⁸近似式 $p(k) = \left(\frac{d\bar{k}(a)}{da} \right)^{-1} \rho(a)$ を使っても $k \gg 1$ で同じ結果が得られる。

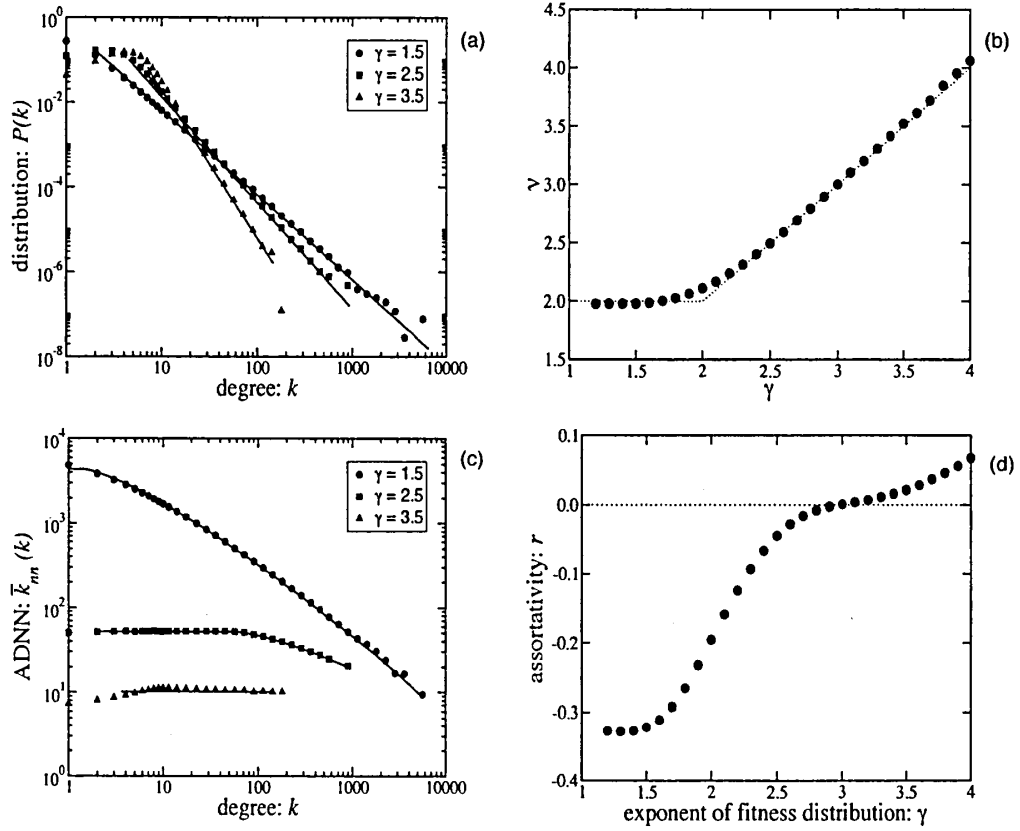


図 1: (a) 結合度分布の例。実線は解析的な計算によって求めた予想 (27), (28) による。 (b) 内的結合強度 a の分布の冪指数 γ に対するネットワークの次数分布の冪指数 ν の変化。黒丸は数値計算の結果であり, $m = 3$, $d = 2$, $N = 10000$ の場合である。この結果は d にはよらない。 (c) 次数相関の例。実線は解析的な計算によって求めた予想 (29), (30), (31) による。 (d) 内的結合強度 a の分布の冪指数 γ に対する同類度 (assortativity) の変化。 $\gamma = 3$ を境に正負が入れ替わる。

で与えられる。 $\gamma > 2$ の場合, (24) の積分の中身が最大値を取る a が積分範囲 (16) の内側にある条件

$$2m \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} + \gamma < k < 2m \frac{\gamma - 2}{\gamma - 1} N^{\frac{1}{\gamma-1}} + \gamma \quad (26)$$

をみたす k に対して鞍点法近似により

$$P(k) \simeq \frac{(2m)^{\gamma-1} (\gamma - 2)^{\gamma-1} N! \Gamma(k - \gamma + 1)}{N^{\gamma-1} (\gamma - 1)^{\gamma-2} k! \Gamma(N - \gamma + 2)} \quad (27)$$

となる。特に $k \gg 1$ に対して

$$P(k) \simeq (2m)^{\gamma-1} \frac{(\gamma - 2)^{\gamma-1}}{(\gamma - 1)^{\gamma-2}} k^{-\gamma} \quad (\gamma > 2)$$

となる。このように次数分布はスケールフリーの性質を満たし, その冪指数は内的結合強度の冪指数と一致している。一方 $\gamma < 2$ の場合を同様に計算すると

$$\frac{5 - 2\gamma}{2 - \gamma} < k < \frac{2mN}{\ln N} + 2$$

で

$$P(k) \simeq \frac{2m}{\ln N} k^{-2} \quad (1 < \gamma < 2) \quad (28)$$

となることがわかる。この場合は次数分布の冪指数は γ によらず常に 2 となっている。数値計算による次数分布の結果を図 1(a), 冪指数の変化を図 1(b) に示した。次数分布はノードが埋め込まれた空間の次元 d にはよらない。

4.3 次数相関

内的結合強度 a のノードと繋がっているノードの平均次数 $\bar{k}_{nn}(a)$ は、式 (12) を用いて計算できる。 $\bar{k}_{nn}(k)$ を計算するには (22) あるいは (23) を用いて a を消去するとよい¹⁹。 $\gamma > 3$ の時、十分大きい N に対して

$$\bar{k}_{nn}(k) \simeq \frac{2m(\gamma-2)^2}{(\gamma-1)(\gamma-3)} + 1 \quad (\gamma > 3) \quad (29)$$

となる。 $2 < \gamma < 3$ の時は

$$\bar{k}_{nn}(k) \simeq \begin{cases} c_1 \left[\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)} N^{\frac{3-\gamma}{\gamma-1}} - 1 \right] + 1 & (k < \frac{\gamma-1}{\gamma-2} N^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}, 2 < \gamma < 3) \\ c_1 \left[c_2 \frac{N^{3-\gamma}}{k^{3-\gamma}} - c_3 \frac{N^{\frac{1}{\gamma-1}}}{k} - 1 \right] + 1 & (k > \frac{\gamma-1}{\gamma-2} N^{\frac{2-\gamma}{\gamma-1}}, 2 < \gamma < 3) \end{cases} \quad (30)$$

となるが、ここで $c_1 = \frac{2m(\gamma-2)^2}{(\gamma-1)(3-\gamma)}$, $c_2 = \frac{(\gamma-1)^{3-\gamma}}{(\gamma-2)^{4-\gamma}}$, $c_3 = \frac{\gamma(3-\gamma)}{2(\gamma-2)^2}$ とした。小さい k では一定だが、大きい k では $\bar{k}_{nn}(k) \propto k^{-(3-\gamma)}$ で減衰する。 $1 < \gamma < 2$ の時は

$$\bar{k}_{nn}(k) = \begin{cases} \frac{2mN(2-\gamma)(2\gamma-1)}{\gamma \ln N} + 1 & (k < 1/(2-\gamma), 1 < \gamma < 2) \\ 4mN \frac{\ln k + \ln(2-\gamma) + \gamma - 1/2}{(2k-1) \ln N} + 1 & (k > 1/(2-\gamma), 1 < \gamma < 2) \end{cases} \quad (31)$$

となる。大きい k に対して $\bar{k}_{nn}(k) \propto \frac{\ln k}{k}$ で減衰する。数値計算の結果 (図 1(b)) では、上記の理論で一定となるところでやや増加傾向が見られる。これはノードが空間上に Poisson 的に配置しており密度に揺らぎがあるためである。同類度 (assortativity) の γ に対する変化を図 1(d) に示した。 $\gamma > 3$ ($\gamma < 3$) で正 (負) の次数相関がある。この性質は、3.3 節の最後で紹介した一次関数による成長+優先的結合モデルと同じであることは興味深い。

4.4 クラスタリング係数

ノードの内的結合強度 a の関数としてのクラスタリング係数は (13) の代わりに

$$C(a) = \frac{\int f_3(a, a', a'') \rho(a') \rho(a'') da' da''}{\int f(a, a') f(a, a'') \rho(a') \rho(a'') da' da''}$$

とすると計算できる。ここで $f_3(a, a', a'')$ は、内的結合強度がそれぞれ a, a', a'' となる 3 つのノードが互いにつながって三角形を構成する確率である。 $a < a' < a''$ の場合 $b = a^{1/d}$, $b' = a'^{1/d}$, $b'' = a''^{1/d}$

¹⁹厳密には $\bar{k}_{nn}(k) = \frac{\int \bar{k}_{nn}(a) p(k|a) da}{\int p(k|a) da}$ を解かねばならない。

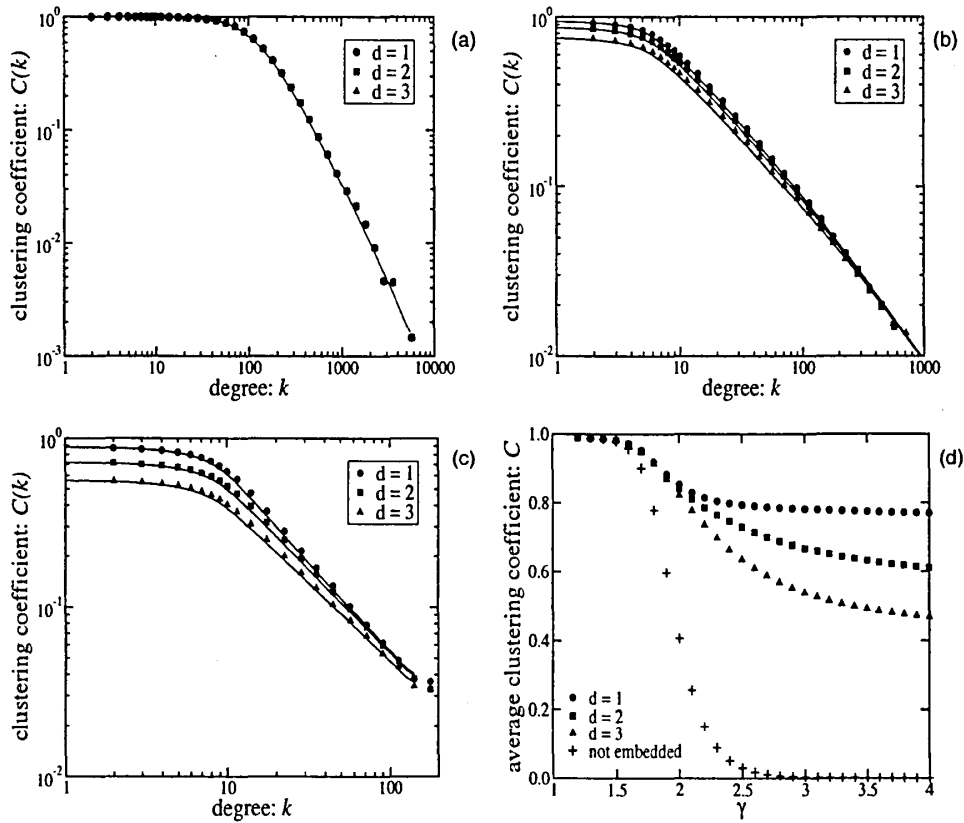


図 2: (a),(b),(c) はそれぞれ $\gamma = 1.5, \gamma = 2.5, \gamma = 3.5$ の場合のクラスタリング係数. (d) 内的結合強度 a の分布の冪指数に対する平均クラスタリング係数. “not embedded” は空間を考慮しない静的ネットワークモデルの場合である. $\gamma < 2$ ではクラスタリング係数は大きく次元 d による依存性は小さい. 一方, $\gamma > 2$ ではクラスタリング係数は次元 d が小さいほど大きくなり, 空間に埋め込まれてない場合にはほとんど 0 となっている.

とおくと最大値ノルムの性質から

$$f_3(a, a', a'') = \begin{cases} f(a, a')f(a, a'') & ((\theta a' a'' > 1) \text{ or } (\frac{1}{b} \geq \frac{1}{b'} + \frac{1}{b''})) \\ \theta^2 \left(bb'b''(b + b' + b'') - \frac{b'b'' + b''b + bb'}{\theta^{1/d}} + \frac{1}{\theta^{2/d}} \right)^d & ((\theta a' a'' < 1) \text{ and } (\theta^{1/d}(b'b'' + b''b + bb') > 2)) \\ \theta^2(2bb'b''(b + b' + b'') - b'b'' - b''b - bb')^d / 4^d & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と求まる. $\gamma < 2$ では積分範囲の大きいほう ($a \sim N^{1/(\gamma-1)}$) が支配的であり, この領域で $f_3(a, a', a'') \sim f(a, a')f(a, a'')$ とみなせるので $C(a) \sim 1$ と予想できる. 実際 a が $1/\sqrt{\theta}$ より小さい場合で $C(a) \sim 1$ となっている. このため次元 d にかかわらず $\gamma < 2$ ではクラスタリング係数は大きい値を保っている. 一方, $\gamma > 2$ の場合に関してクラスタリング係数を解析的に求めることは難しい. ここでは平均クラスタリング係数の数値計算による結果を図 2 に示す. $\gamma > 2$ では空間構造の効果がクラスタリング係数に大きな影響を与えているが, $\gamma < 2$ ではほとんど影響を与えない.

4.5 平均ノード間距離

$\gamma > 3$ の場合に平均ノード間距離 L は冪則 $L \propto N^\alpha$ に従う。このような冪則は、格子状のネットワークで一般的に見られるが、ここでの冪指数は $1/d$ よりやや小さいが、この原因は明らかではない。 $\gamma \simeq 3$ の場合に対数的な振る舞い $L \propto \ln N$ をみせ、 $\gamma < 3$ では対数よりゆつくりと増加している。このような $\gamma < 3$ での遅い増加は、内的結合強度が大きいペア同士は空間上の距離に関係なく繋がっていることに由来する。このことは、 $\max(\theta a_i a_j) = \theta N^{\frac{2}{\gamma}-1} \gg 1$ から明らかである。このような空間上の距離によらない結合はショートカットと呼ばれ、Watts と Strogatz のモデルで見たようにショートカットは数が少なくてもネットワークを著しく小さいものにするからである。

4.6 まとめ

空間的に埋め込んだネットワークモデルを用いてノードの属性とネットワーク構造の関係を調べた。属性値の分布の冪指数 $\gamma > 2$ なら次数分布の冪指数 ν は一致するが、 $\gamma < 2$ の時は $\nu \simeq 2$ である。このクロスオーバー的な性質が多くの静的ネットワークモデルで次数分布の冪指数が2になること [96, 101] の原因であると思われる。 $\gamma < 2$ の場合は、空間構造のあるなしに関わらずクラスター係数が高くすることができる。一方、 $\gamma > 2$ の場合（次数分布の冪指数が2よりずっと大きい場合）には空間構造の次元がクラスター係数を決めている。さらに次数分布の冪指数が3を超える場合、ネットワークはスモールワールドとしての特性（平均ノード間距離が小さい）を失う。

多くの実在のネットワークで次数分布の冪指数 ν は2から3の間である [13, 15, 16]。冪指数が3に近い場合には、高クラustering係数を生むために何らかの空間的な構造が関わっていることが予想される。一方、冪指数が2に近ければ空間構造は高クラustering係数の再現に必ずしも必要ではない。 $\nu < 3$ では次数相関が負である。人間関係や生物に見られるネットワークでは次数相関が正であることが知られており、このモデルの結果と一致しない。この問題を解決する方法はいくつか考えられる。たとえばノードの分布に非一様性を入れることや内的結合強度 a の分布に外からカットオフを入れることで次数相関を変えることができる [103]。

5 むすびに

本稿では複雑ネットワークモデルの概略を紹介した。この分野の進展は著しく、本稿で紹介した話題以外でも興味深い研究は多くある。ネットワーク上のダイナミクスについてはほとんど触れなかったが、生体内の情報伝達、疫学や物流などの様々な対象で重要なトピックである。またネットワーク上の情報探索も計算機科学や情報処理の分野で特に着目されている今後の発展が期待できる研究分野である。ネットワーク構造の違いにより同じような要素からなるシステムでも全く異なる機能が実現するというのが複雑ネットワーク研究の面白さである。本稿によって若手物理学者がこの研究分野に興味を持っていただければ幸いである。

謝辞

今出早海氏をはじめとする第51回物性若手夏の学校準備局の皆様には原稿のチェックをしていただきなど大変お世話になりました。また、本研究の成果の一部は基礎物理学研究所計算機システムによってもたらされました。

参考文献

- [1] 安田 雪, ネットワーク分析—何が行為を決定するか, 新曜社, (1997).
- [2] 金光 淳, 社会ネットワーク分析の基礎—社会的関係資本論にむけて, 勁草書房, (2003).
- [3] B. Solomonoff and Anatol Rapoport, “Connectivity of random nets” *Bull. Math. Biol.* **13**, 107 (1951).
- [4] P. Erdős and A. Rényi, “On the evolution of random graphs”, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences* **5**, 17 (1960).
- [5] M. E. J. Newman, A.-L. Barabási and D. J. Watts (eds.), *The Structure and Dynamics of Networks*, Princeton University Press, Princeton (2003).
- [6] B. Bollobás, *Random Graphs*, Academic Press, London, (1985).
- [7] E. Ravasz, A.-L. Barabási, “Hierarchical organization in complex networks”, *Phys. Rev. E* **67**, 026112 (2003).
- [8] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of ‘small-world’ networks”, *Nature* **393**, 440 (1998).
- [9] D. J. Watts, *Small Worlds*, Princeton University Press, Princeton, (1999). 邦訳: 栗原聡, 福田健介, 佐藤進也 訳, スモールワールド—ネットワークの構造とダイナミクス, 東京電機大学出版局, (2006)
- [10] R. Albert, H. Jeong and A. -L. Barabási, “Diameter of the world-wide web”, *Nature* **401**, 130 (1999).
- [11] A. Broder, R. Kumar, F. Maghoul, P. Raghavan, S. Rajagopalan, R. Stata, A. Tomkins and J. Wiener, “Graph structure in the web”, *Computer Networks* **33**, 309 (2000).
- [12] A. -L. Barabási and R. Albert, “Emergence of scaling in random networks”, *Science* **286**, 509 (1999)
- [13] R. Albert and A. -L. Barabási, “Statistical mechanics of complex networks”, *Rev. Mod. Phys.* **74**, 47 (2002).
- [14] S. H. Strogatz, *Nature* **410**, 268 (2001).
- [15] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, “Evolution of networks”, *Adv. Phys.* **51**, 1079 (2002); *Evolution of Networks* Oxford University Press, New York, (2003).
- [16] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks”, *SIAM Review* **45**, 167 (2003).
- [17] R. Pastor-Satorras, M. Rubi and A. Diaz-Guilera (eds.), *Statistical Mechanics of Complex Networks* Springer-Verlag (2003).
- [18] E. Ben-Naim, H. Frauenfelder, Z. Toroczkai (eds.), *Complex Networks* Springer-Verlag (2004).
- [19] A. -L. Barabási, *LINKED -The New Science of Networks*, Perseus Publishing, (2002). 邦訳: 青木薫 訳, 新ネットワーク思考, NTT 出版, (2003).
- [20] D. J. Watts, *SIX DEGREES -The Science of a Connected Age*, William Heinemann, (2003). 邦訳: 辻竜平, 友知政樹 訳, スモールワールド・ネットワーク—世界を知るための新科学的思考法, 阪急コミュニケーションズ, (2004).
- [21] M. Buchanan, *Nexus: Small Worlds and the Groundbreaking Science of Networks*, W W Norton & Co Inc (2003). 邦訳: 阪本芳久 訳, 複雑な世界, 単純な法則 ネットワーク科学の最前線, 草思社 (2005).
- [22] 増田直紀, 今野紀雄, 「複雑ネットワーク」とは何か—複雑な関係を読み解く新しいアプローチ, 講談社 (2006).
- [23] A. -L. Barabási and E. Bonabeau, Scale-free Networks, *Scientific American*, May (2003). 邦訳: 世界の名瀬を読み解くスケールフリーネットワーク, 日経サイエンス, 9月号, (2003).
- [24] 林幸雄, Scale-free ネットワークの生成メカニズム, *応用数理*, **14**[4], 58 (2004)
- [25] 増田直紀, 巳波浩佳, 今野紀雄, 構造と機能から見たネットワーク, *応用数理*, **16**[1], 2 (2006)
- [26] 増田直紀, 今野紀雄, 複雑ネットワークの科学, 産業図書 (2005).
- [27] S. Milgram, “The small world problem”, *Psychol. Today* **2**, 60 (1967).
- [28] J. M. Kleinberg, “Navigation in a small world”, *Nature* **406**, 845 (2000).
- [29] D. J. Watts, P. S. Dodds, M. E. J. Newman “Identity and search in social networks”, *Science* **296**, 1302 (2002).

- [30] M. Faloutsos, P. Faloutsos and C. Faloutsos, "On power-law relationships of the internet topology", *Computer Communications Review* **29**, 251 (1999).
- [31] S. Redner, "How popular is your paper? An empirical study of the citation distribution", *Eur. Phys. J. B* **4**, 131 (1998).
- [32] M. E. J. Newman, "Scientific collaboration networks: I. Network construction and fundamental results", *Phys. Rev. E* **64**, 016131 (2001); "Scientific collaboration networks: II. Shortest paths, weighted networks, and centrality", *isid* **64**, 016132 (2001); "The structure of scientific collaboration networks", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **98**, 404(2001).
- [33] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai and A.-L. Barabási, "The large-scale organization of metabolic networks", *Nature* **407**, 651 (2000)
- [34] H. Jeong, S. Mason, A.-L. Barabási and Z. N. Oltvai, "Lethality and centrality in protein networks", *Nature* **411**, 41 (2001).
- [35] K. Ebel, L. -I. Mielsch and S. Bornholdt, "Scale-free topology of e-mail networks", *Phys. Rev. E* **66**, 035103 (2002).
- [36] F. Liljeros, C. R. Edling, L. A. N. Amaral, H. E. Stanley and Y. Aberg, "The web of human sexual contacts", *Nature* **411**, 907 (2001).
- [37] L. A. N. Amaral, A. Scala, M. Barthélemy and H. E. Stanley, "Classes of small-world networks", *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* **97**, 11149 (2000).
- [38] R. Cohen and S. Havlin, "Scale-free networks are ultrasmall", *Phys. Rev. Lett.* **90**, 058701 (2003).
- [39] S. Morita, K. -i. Oshio, Y. Osana, Y. Funabashi, K. Oka, and K. Kawamura, "Geometrical structure of the neuronal network of *Caenorhabditis elegans*", *Physica A* **298**, 553 (2001).
- [40] J. A. Dunne R. J. Williams, and N. D. Martinez, "Food-web structure and network theory: The role of connectance and size", *Proc. Nat. Acad. Sc. USA* **99**, 12917 (2002).
- [41] J. Camacho, R. Guimerà and L. A. Nunes Amaral "Robust Patterns in Food Web Structure", *Phys. Rev. Lett.* **88**, 228102 (2002)
- [42] J. M. Montoya and R. V. Solé. "Small World Patterns in Food Webs", *J. theor. Biol.* **214**, 405 (2002).
- [43] R. Albert, H. Jeong and A. -L. Barabási, "Attack and error tolerance of complex networks", *Nature* **406**, 378 (2000).
- [44] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, "Epidemic dynamics and endemic states in complex networks", *Phys. Rev. E* **63**, 066117 (2001).
- [45] A. L. Lloyd and R. M. May "How viruses spread among computers and people", *Science* **292**, 1316 (2001); "Infection dynamics on scale-free networks", *Phys. Rev. E* **64**, 066112 (2001).
- [46] R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, "Immunization of complex networks", *Phys. Rev. E* **65**, 036104 (2002).
- [47] D. Stauffer, A. Aharony *Introduction to Percolation Theory*, Taylor & Francis.(1994). 邦訳：小田垣孝 訳, パーコレーションの基本原理, 吉岡書店 (2001).
- [48] M. Molloy and B. Reed, "A critical point for random graphs with a given degree sequence", *Random Structures and Algorithms* **6**, 161 (1995).
- [49] R. Pastor-Satorras, A. Vázquez and A. Vespignani, "Dynamical and correlation properties of the Internet", *Phys. Rev. Lett.* **87**, 258701 (2001).
- [50] M. E. J. Newman, "Assortative mixing in networks", *Phys. Rev. Lett.* **89**, 208701 (2002).
- [51] D. S. Callaway, J. E. Hopcroft, J.M. Kleinberg, M. E. J. Newman and S. H. Strogatz, "Are randomly grown graphs really random?", *Phys. Rev. E* **64**, 041902 (2001).
- [52] E. Ravasz, A. L. Somera, D. A. Mongru, Z. N. Oltvai, and A.-L. Barabási, "Hierarchical Organization of Modularity in Metabolic Networks", *Science* **297**, 1551 (2002).
- [53] M. E. J. Newman and M. Girvan, "Finding and evaluating community structure in networks", *Phys. Rev. E* **69**, 026113 (2004); M.E.J. Newman, "Detecting community structure in networks", *Eur. Phys. J. B* **38**, 321 (2004)
- [54] I. Derényi, G. Palla and T. Vicsek, "Clique Percolation in Random Networks", *Phys. Rev. Lett.* **94**, 160202 (2005).

- [55] C. Castellano, F. Cecconi, V. Loreto, D. Parisi and F. Radicchi, "Self-contained algorithms to detect communities in networks", *Eur. Phys. J. B* **38**, 311 (2004)
- [56] P. Sen, "Complexities of social networks: A Physicist's perspective", arXiv: physics/0605072 (2006).
- [57] R. Milo, S. Shen-Orr, S. Itzkovitz, N. Kashtan, D. Chklovskii, U. Alon, "Network Motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks", *Science* **298**, 824 (2002); R. Milo, S. Itzkovitz, N. Kashtan, R. Levitt, S. Shen-Orr, I. Ayzenshtat, M. Sheffer and U. Alon, "Superfamilies of Evolved and Designed Networks", *ibid* **303**, 1538 (2004).
- [58] S. Mangan and U. Alon, "Structure and function of the feed-forward loop network motif", *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **100**, 11980 (2003).
- [59] Y. Artzy-Randrup, S. J. Fleishman, N. Ben-Tal and L. Stone, "Comment on 'Network Motifs: Simple Building Blocks of Complex Networks' and 'Superfamilies of Evolved and Designed Networks'", *Science*, **305**, 1107 (2004)
- [60] A.-L. Barabási and Z. N. Oltvai, "Network biology: understanding the cell's functional organization", *Nature Reviews Genetics*, **5** 101 (2004).
- [61] B. M. Waxman, "Routing of Multipoint Connection", *IEEE JSAC* **6**, 1617 (1988).
- [62] S.-H. Yook, H. Jeong and A.-L. Barabási, "Modeling the Internet's large-scale topology", *Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A.* **99**, 13882 (2002)
- [63] M. T. Gastner and M. E. J. Newman, "The spatial structure of networks", *cond-mat/0407680*.
- [64] Y. Hayashi, "A Review of Recent Studies of Geographical Scale-Free Networks", *IPSJ Journal* **47**, 776 (2006).
- [65] M. E. J. Newman, S. H. Strogatz and D. J. Watts, "Random graphs with arbitrary degree distributions and their applications", *Phys. Rev. E* **64**, 026118 (2001)
- [66] S. Maslov, K. Sneppen, "Specificity and Stability in Topology of Protein Networks", *Science* **296**, 910 (2002)
- [67] M. E. J. Newman, C. Moore and D. J. Watts, "Mean-field solution of the small-world network model", *Phys. Rev. Lett.* **84**, 3201 (2000).
- [68] M. E. J. Newman and D. J. Watts, "Renormalization group analysis of the small-world network model", *Phys. Lett. A*, **263**, 341 (1999)
- [69] M. E. J. Newman and D. J. Watts, "Scaling and percolation in the small-world network model" *Phys. Rev. E* **60**, 7332 (1999)
- [70] C. Moore and M. E. J. Newman, "Epidemics and percolation in small-world networks", *Phys. Rev. E* **61**, 5678 (2000)
- [71] H. Hong, M. Y. Choi and B. J. Kim, "Synchronization on small-world networks", *Phys. Rev. E* **65**, 026139 (2002)
- [72] D. J. de S. Price, "Networks of scientific papers", *Science* **149**, 510 (1965).
- [73] H. A. Simon, "On a class of skew distribution functions", *Biometrika* **42**, 425 (1955).
- [74] P. L. Krapivsky, S. Redner and F. Leyvraz, "Connectivity of Growing Random Networks", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4629 (2000); P. L. Krapivsky and S. Redner, "Organization of growing random networks", *Phys. Rev. E* **63**, 066123 (2001).
- [75] A.-L. Barabasi, H. Jeong, Z. Neda, E. Ravasz, A. Schubert and T. Vicsek "Evolution of the social network of scientific collaborations" *Physica A* **311**, 590 (2002).
- [76] E. Eisenberg and E. Y. Levanon "Preferential Attachment in the Protein Network Evolution", *Phys. Rev. Lett.* **91**, 138701 (2003).
- [77] S. N. Dorogovtsev, J. F. F. Mendes and A. N. Samukhin, "Structure of Growing Networks with Preferential Linking", *Phys. Rev. Lett.* **85**, 4633 (2000).
- [78] Alain Barrat and Romualdo Pastor-Satorras, "Rate equation approach for correlations in growing network models", *Phys. Rev. E* **71**, 036127 (2005)
- [79] P. Holme and B. J. Kim "Growing scale-free networks with tunable clustering", *Phys. Rev. E* **65**, 026107 (2002).

- [80] A. Vázquez, “Growing network with local rules: Preferential attachment, clustering hierarchy, and degree correlations”, *Phys. Rev. E* **67**, 056104 (2003).
- [81] K. Klemm and V. M. Eguíluz, “Growing scale-free networks with small-world behavior”, *Phys. Rev. E* **65**, 0361123 (2002).
- [82] A. Vázquez, M. Boguñá, Y. Moreno, R. Pastor-Satorras and A. Vespignani, “Topology and correlations in structured scale-free networks”, *Phys. Rev. E* **67**, 046111 (2003).
- [83] R. Xulvi-Brunet and I. M. Sokolov, “Evolving networks with disadvantaged long-range connections”, *Phys. Rev. E* **66**, 026118 (2002).
- [84] S. S. Manna and P. Sen, “Modulated scale-free network in Euclidean space”, *Phys. Rev. E* **66**, 066114 (2002); “Scale-free network on a vertical plane”, *ibid* **66**, 066104 (2003).
- [85] S. S. Manna, G. Mukherjee and Parongama Sen, “Clustering properties of a generalized critical Euclidean network” *ibid* **69**, 017102 (2004).
- [86] J. Jost and M. P. Joy, “Evolving networks with distance preferences”, *Phys. Rev. E* **66**, 036126 (2002).
- [87] M. Barthélemy, “Crossover from scale-free to spatial networks”, *Europhys. Lett.* **63**, 915 (2003).
- [88] J. Dall and M. Christensen, “Random geometric graphs”, *Phys. Rev. E* **66**, 016121 (2002).
- [89] G. K. Zipf, *Human Behaviour and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Reading, MA (1949).
- [90] D. Sornette, *Critical Phenomena in Natural Sciences*, Springer, Heidelberg, 2nd edition (2003).
- [91] M. E. J. Newman, “Power laws, Pareto distributions and Zipf’s law”, *Contemporary Physics* **46**, 323 (2005).
- [92] K.-I. Goh, B. Kahng, and D. Kim “Universal Behavior of Load Distribution in Scale-Free Networks”, *Phys. Rev. Lett.* **87**, 278701 (2001).
- [93] M. Catanzaro and R. Pastor-Satorras, “Analytic solution of a static scale-free network model”, *Eur. Phys. J. B* **44**, 241 (2005).
- [94] G. Caldarelli, A. Capocci, P. De Los Rios, and M. A. Muñoz, “Scale-free networks from varying vertex intrinsic fitness”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 258702 (2002).
- [95] M. Boguñá and R. Pastor-Satorras, “Class of correlated random networks with hidden variables”, *Phys. Rev. E* **68**, 036112 (2003).
- [96] N. Masuda, H. Miwa, N. Konno, “Analysis of scale-free networks based on a threshold graph with intrinsic vertex weights”, *Phys. Rev. E* **70**, 036124 (2004); N. Masuda, N. Konno, R. Roy and A. Sarkar, “Rigorous results on the threshold network model”, *J. Phys. A* **38**, 6277 (2005).
- [97] J. -S. Lee, K.-I. Goh, B. Kahng and D. Kim, “Intrinsic degree-correlations in the static model of scale-free networks”, *Eur. Phys. J. B* **49**, 231 (2006).
- [98] V. D. P. Servedio, G. Caldarelli, and P. Buttà, “Vertex intrinsic fitness: How to produce arbitrary scale-free networks”, *Phys. Rev. E* **70**, 056126 (2004).
- [99] C. P. Warren, L. M. Sander, and I. M. Sokolov, “Geography in a scale-free network model”, *Phys. Rev. E* **66**, 056105 (2002).
- [100] A. F. Rozenfeld, R. Cohen, D. ben-Avraham, and S. Havlin, “Scale-Free Networks on Lattices”, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 218701 (2002); D. ben-Avraham, A. F. Rozenfeld, R. Cohen, and S. Havlin, “Geographical embedding of scale-free networks”, *Physica A* **330**, 107 (2003).
- [101] N. Masuda, H. Miwa, N. Konno, “Geographical threshold graphs with small-world and scale-free properties”, *Phys. Rev. E* **71**, 036108 (2005).
- [102] S. Morita, “Crossover in scale free networks on geographical space”, *Phys. Rev. E* **73**, 035104R (2006).
- [103] S. Morita, In preparation.