

An application of Nesterenko's method to Mahler functions

奈良女子大理 西岡久美子 (Kumiko Nishioka)

1. Mahler functions.

$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^{2^h}$ とおく。Mahler は 1929 年に、代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) に対して、 $f(\alpha)$ が超越数になることを証明した。この証明は関数方程式

$$f(z^2) = f(z) - z$$

に基づいている。Mahler は更に一般的に次の定理を証明している。以下で K は有限次代数体を表わすとする。

定理 1. (Mahler [6]) $f(z)$ は $\mathbb{C}(z)$ 上超越的な K 係数巾級数環 $K[[z]]$ の元で 自然数 $d \geq 2$ に対し関数方程式

$$f(z^d) = \frac{\sum_{i=0}^{d-1} a_i(z) f(z)^i}{\sum_{i=0}^{d-1} b_i(z) f(z)^i}, \quad (a_i(z), b_i(z) \in K[z])$$

をみたすとする。 $\Delta(z)$ は $\sum_{i=0}^{d-1} a_i(z) X^i$ と $\sum_{i=0}^{d-1} b_i(z) X^i$ との X に関する終結式とする。このとき代数的数 α

$(0 < |\alpha| < 1)$ で " $f(z)$ が収束し. $\Delta(\alpha^{d^k}) \neq 0$ ($k \geq 0$) ならば " $f(\alpha)$ は超越数である。

いくつかの代数的独立な中級数 $f_1(z), \dots, f_m(z) \in K[[z]]$ の代数的数 α での値 $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ の代数的独立性については, Mahler, Loxton - van der Poorten, Kubota 等によって研究されている。

定理 2 (Kubota [3]). $f_1(z), \dots, f_m(z) \in K[[z]]$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立で, 自然数 $d \geq 2$ に対し, 関数方程式 $f_i(z^d) = a_i(z)f_i(z) + b_i(z)$, $(a_i(z), b_i(z) \in K(z))$ をみたすとする。このとき, 代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) で " $f_i(z)$ ($i=1, \dots, m$) が収束し, α^{d^k} ($k \geq 0$) が " $a_i(z), b_i(z)$ の pole でないならば, $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ は代数的独立である。

例 (Loxton - van der Poorten [5]). 自然数 $d \geq 2$ に対し,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{d^n}$$

とおく。 $f(z^i) = f(z^{d^i}) + z^i$ が成り立つが, $f(z), f(z^2), \dots, f(z^{d-1})$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立であることが証

明される。定理 2 を適用して、代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) に対して、 $f(\alpha), f(\alpha^2), \dots, f(\alpha^{d-1})$ が代数的独立であることがわかる。

2. Measure of Algebraic independence.

有理整数係数の多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ に対して、

$H(P)$ は P の係数の絶対値の最大値を、 $d(P)$ は P の total degree を表わすとする。 $\beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{C}$ は代数的独立な数とする。 $H(P) \leq H, d(P) \leq \Delta$ なる $P \neq 0$ に対し、

$$|P(\beta_1, \dots, \beta_m)| \geq \varphi(H, \Delta)$$

をみたす H, Δ の関数 φ を見つけることを考える。

Nesterenko は可換環を使って次の定理を得た。

定理 3 (Nesterenko [8]). $H \geq 1, \Delta \geq 1$ とする。定理 2 の仮定の下に、

$$0 \neq P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m], H(P) \leq H, d(P) \leq \Delta$$

なら

$$|P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))| \geq \gamma_2(\Delta) H^{-\gamma_1 \Delta^m}$$

ここで γ_1 は H にも Δ にもよらない正定数で、 $\gamma_2(\Delta)$ は H にはよらないが Δ による正定数である。

この定理においては、 $\delta_2(\rho)$ が Δ についてどのような関数なのかは全く解からない。これを知るために私は次の定理を証明した。

定理 4. 巾級数 $f_1(z), \dots, f_m(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ は自然数 $d \geq 2$ に対し関数方程式

$$f_i(z^d) = \frac{A_i(z, f_1(z), \dots, f_m(z))}{A_0(z, f_1(z), \dots, f_m(z))} \quad (1 \leq i \leq m)$$

をみたすとする。ここで $A_i(z, X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{C}[z, X_1, \dots, X_m]$ ($0 \leq i \leq m$) で $\text{tot. deg}_X A_i \leq t < d^{1/m}$ とする。このとき多項式 $Q(z, X_1, \dots, X_m) \in \mathbb{C}[z, X_1, \dots, X_m]$ が

$$\deg_z Q \leq M, \quad \text{tot. deg}_X Q \leq N \quad (M \geq N \geq 1)$$

$$Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z)) \neq 0$$

をみたせば、

$$(1) \quad \text{ord}_{z=0} Q(z, f_1(z), \dots, f_m(z))$$

$$\leq c M N^m N^{(m^2 \log t) / (\log d - m \log t)}$$

である。ここで c は M, N によらない正定数である。

この定理において、 $t=1$ のとき (1) 式の右辺は $c M N^m$ となり best possible な評価となる。これと Nesterenko

の方法を使って. Becker が定理 3 において. $\gamma_2(\rho) = \exp(-\gamma \rho^{3m+2})$ としてゐることを証明した.

定理 5 (Becker [1]). $f_1(z), \dots, f_m(z) \in K[[z]]$ は $\mathbb{C}(z)$ 上代数的独立で. $F(z) = {}^t(f_1(z), \dots, f_m(z))$ とおく時. 自然数 $d \geq 2$ に対して関数方程式

$$F(z^d) = A(z)F(z) + B(z), \quad \begin{pmatrix} A(z) \in M_m(K(z)) \\ B(z) \in (K(z))^m \end{pmatrix}$$

をみたすとする. 代数的数 α ($0 < |\alpha| < 1$) で $f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$ が収束し. α^{d^k} ($k \geq 0$) は $A(z), B(z)$ の pole でないとする. 0 でない多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ かつ $H(P) \leq H, d(P) \leq \rho$ ($H \geq 1, \rho \geq 1$) をみたせば

$$|P(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha))| \geq \exp(-\gamma \rho^m (\log H + \rho^{2m+2}))$$

である. ここで γ は H にも ρ にもよらない正定数である.

3. Type of transcendental extension.

0 でない多項式 $P \in \mathbb{Z}[X_1, \dots, X_m]$ に対して.

$$t(P) = \log H(P) + d(P)$$

を定義する. $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{C}$ を代数的独立な数として.

$F = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_m) \subset \mathbb{C}$ とおく. $R \geq \tau \geq 1$ とする.

定義. F の trans. type $\leq \tau$

$$\Leftrightarrow_{\text{def}} \forall \alpha \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_m], \alpha \neq 0 \text{ に対し}$$

$$\log |\alpha| \geq -\delta (t(\alpha))^\tau$$

が成り立つ 定数 $\delta > 0$ が存在する。

F に対し. このような τ を見つけるのは難しい問題である. (Waldschmidt [11]) $F = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_m)$ で F の trans. type $\leq \tau$ なる, $\tau \geq m+1$ でなければならぬことが知られている. 次の例が知られている.

• $\mathbb{Q}(\pi)$ の trans. type $\leq 2 + \varepsilon$. (ここで ε は任意の正の数)

• Choudhowsky [2, Ch. 8]. lattice $\Omega = \mathbb{Z}\omega + \mathbb{Z}\omega'$ に関する β 関数の g_2, g_3 が代数的数なら.

$\gamma(\omega) = 2 \zeta(\frac{\omega}{2})$ とおくとき.

$\mathbb{Q}(\frac{\pi}{\omega}, \frac{\gamma(\omega)}{\omega})$ の trans. type $\leq 3 + \varepsilon$.

(ここで ε は任意の正の数)

定理より.

trans. type of $\mathbb{Q}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) \leq 3m+2$

がわかる. これは trans. degree 3 以上で有限な trans. type を持つような体の最初の例と手える.

4. Example.

q は 3 以上の自然数とし. $0 \leq t \leq q-1$, $i \geq 0$ とする.
自然数 n は

$$n = n_0 + n_1 q + \cdots + n_r q^r, \quad n_r \neq 0$$

$$0 \leq n_0, \dots, n_r \leq q-1$$

と一意に表わせるが. このとき, $n = (n_r, \dots, n_1, n_0)$ と表わし, $0 = (0)$ としておく.

$S(t, i) = \left\{ n = (n_r, \dots, n_0) \mid \begin{array}{l} n_r, \dots, n_0 \text{ の中に } q^i \text{ が} \\ \text{高々 } i \text{ 回表われる} \end{array} \right\}$
と定義する.

$$f_{ti}(z) = \sum_{n \in S(t, i)} z^n$$

とおくとき, $\{f_{ti} \mid 0 \leq t \leq q-1, i \geq 0\}$ は次の関数方程式をみたす.

$$P_t(z) = \frac{1-z^q}{1-z} - z^t.$$

$$f_{t0}(z) = \begin{cases} P_0(z)(1 + f_{00}(z^q)) & (t=0) \\ P_t(z)f_{t0}(z^q) & (t \neq 0) \end{cases}$$

$$f_{t1}(z) = \begin{cases} P_0(z)f_{01}(z^q) + f_{00}(z^q) + 1 & (t=0) \\ P_t(z)f_{t1}(z^q) + z^t f_{t0}(z^q) & (t \neq 0) \end{cases}$$

$$f_{ti}(z) = P_t(z)f_{ti}(z^q) + z^t f_{t, i-1}(z^q)$$

$$(0 \leq t \leq q-1, i \geq 2).$$

Mahler [7] は $f_{t0}(z)$ が $\mathbb{C}(z)$ 上超越的であることを

証明した。我々は次の定理を証明した。

定理 6 (with Keiji Nishioka).

$\{f_{ti} \mid 0 \leq t \leq q-1, i \geq 0\}$ は $\mathbb{C}(X)$ 上代数的独立である。

従ってこれら f_{ti} に定理 5 を適用することが出来る。

References

- [1] Becker, P.-G.: Effective measures for algebraic independence of the values of Mahler type functions, preprint.
- [2] Chudnovsky, G.V.: Contributions to the theory of transcendental numbers, A.M.S., Surveys and monographs (19) 1984.
- [3] Kubota, K.K.: On the algebraic independence of holomorphic solutions of certain functional equations and their values, Math. ann. 227(1977), 9-50.
- [4] Loxton, J.H. and van der Poorten, A.J.: Transcendence and Algebraic independence by a Method of Mahler, Transcendence Theory: Advances and Applications, ed. by A. Baker (Academic Press, 1977).
- [5] Loxton, J.H. and van der Poorten, A.J.: A class of hypertranscendental functions, Aequationes Mathematicae 16 (1977), 93-106.
- [6] Mahler, K.: Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse von Funktionalgleichungen. Math. Ann. 101 (1929), 342-366.
- [7] Mahler, K.: On the generating function of the integers with a missing digit, J. Indian Math. Soc. 15 (1951), 33-40.
- [8] Nesterenko, Yu.V.: On a measure of the algebraic independence of the values of certain functions, Mat. Sb. 128(170)(1985); English transl. in Math. USSR Sb. 56 (1987), 545-567.

- [9] Nishioka, Kumiko: On an estimate for the orders of zeros of Mahler type functions, preprint.
- [10] Nishioka, Keiji and Nishioka, Kumiko: Algebraic independence of functions satisfying a certain type of functional equations, preprint.
- [11] Waldschmidt, M.: Nombres transcendants, Lecture Notes in Math., No. 402 (Springer, 1974).