

直線電流磁場によるプラズマの閉じ込め

東大 理 関根孝司

§ 1. 序

金属筒の内部に直線状導体系を筒壁に平行に配置し、導体系を流れる電流の作る磁場により、プラズマを導体に平行な柱状に閉じ込めた場合を考える。このときプラズマにも外部から軸方向に電流を流すこともある。プラズマを完全導体と見なせば、その内部の磁場は零であり、プラズマの境界面はプラズマの気体力学的圧力と外部の磁氣的圧力とが等しくなるような形をとる。ここでは専らその様な平衡の形態、即ちプラズマ柱の断面の形を調べる。プラズマ柱は十分長いとすれば、問題は二次元化される。

柱状のプラズマのピンチには折れ釘型の不安定性がつきまとうが、プラズマ柱を金属円筒中に入れることにより解決される。もっとも直線電流を用いない自己ピンチの場合、金属円筒の半径はプラズマ柱の半径の5倍以下でなければ効果はない¹⁾。直線電流系を用いたプラズマの閉じ込めでも、それら

を囲む金属容器の存在によって，上の型の不安定性がある程度除かれることが期待されるので，容器の影響を考慮した問題を解くことが望ましい。ここでは金属筒の断面の形を任意に与えたときの，その一般的解法を示す。また応用例として金属筒の断面が正方形及び円形の場合について若干の数値計算を実行する。

なお，容器を考慮しない場合については Berkowitz²⁾ 等，³⁾ Sogou などの研究がある。また Berkowitz, Grad, Rubin により，その電磁流体力学的安定性も議論され，カス⁴⁾磁場の安定性が示されている。⁵⁾ 元来，プラズマの閉じ込めの問題は，プラズマ中の磁気空洞の問題と表裏一体の関係にあり，これらについては Imai^{6), 7), 8)} の直観的な解説^{9), 10)}がある。

§2. 問題の定式化

筒状の容器内に，容器の壁に平行に置かれた直線電流系の作る磁場によって，完全導電性プラズマが閉じ込められて，準静的平衡状態が得られたとする。このときプラズマの表面，容器の壁にも軸方向に電流が流れていて，それらは磁場の境界になっている。

プラズマの断面を含む平面を複素変数 $z = x + iy$ による z -平面に対応させると，磁場ベクトル $B(B_x, B_y)$ は，ある z の解

析関数からなる複素ポテンシャル $f(z)$ により

$$B_x - iB_y = B e^{-i\theta} = \frac{df}{dz} \quad (2.1)$$

として表わされる。ただし B は磁場の大きさ、 θ は磁場ベクトルが実軸の正方向となす角である。

いま、 z -平面上の容器とプラズマとの間に適当な cut を入れて、磁場の領域を単連結化し、別の v -平面上の、実軸及び直線 $\text{Im } v = \frac{1}{2}\text{Im } \tau(L)$, $\text{Re } v = \pm \frac{1}{2}$ によって囲まれた長方形領域 (D) に等角写像する (図1を参照)。ただし τ は正の虚部を持つ純虚数で、実軸上の辺は容器の壁に、またそれに平行な

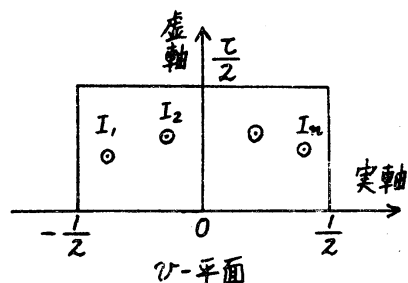


図1

辺はプラズマの表面に、他の二辺は z -平面上の cut にそれぞれ対応させる。もちろん点 z は点 v に対応する。

以下の議論では楕円関数についての様々な記号が使われるので、最初にそれをあげておくのが便利である。

$\wp_\nu(v, \tau)$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$) は周期 $1, \tau$ のテータ関数、 $\text{sn}(u, k)$, $\text{cn}(u, k)$, $\text{dn}(u, k)$ は Jacobi の楕円関数、 $\zeta(u, k) = (2K)^{-1} \wp'_0(v, \tau) / \wp_0(v, \tau)$ は Jacobi のツェータ関数である。ただし $u = 2Kv$ で、テータ関数に付いたダッシュは v について微分することを意味する。また $K = K(k) = F(1, k)$ は第一種完全楕円積分で、 $q = q(\tau) = e^{\pi i \tau}$, $k = k(q) = [\wp_2(0, \tau) / \wp_3(0, \tau)]^{1/2}$ なる関係がある。

容器内の直線状導体の数を n ，代表的な電流を $I(>0)$ とし直線電流を $I_\alpha = K_\alpha I (\alpha=1, 2, \dots, n)$ ，プラズマ電流を $I_0 = K_0 I$ とすれば（ただし $I_0=0$ は全電流が零ということで，プラズマの表面を部分的に違った方向の電流が流れる）， v -平面での f の表示は， z -平面に於けると同じ型と強さの特異性を持ち，同じ境界条件を満たす様に（実軸及び直線 L 上で $\oint \operatorname{Im} f = \text{const.}$ で且つ実軸方向に周期 1 の周期性を持つ）様に定められ

$$f = \mu_0 I \left[K_0 v - \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^n K_\alpha \log \frac{\vartheta_1(v-r_\alpha, \tau)}{\vartheta_1(v-r_\alpha^*, \tau)} \right] \quad (2.2)$$

となる。ここに μ_0 は真空中の透磁率， r_α は電流 I_α の v -平面に於ける位置である。また $*$ は複素共役を表わす。(2.2)から

$$\frac{df}{dv} = \mu_0 I \left[K_0 - \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^n K_\alpha \left\{ \frac{\vartheta_1'(v-r_\alpha, \tau)}{\vartheta_1(v-r_\alpha, \tau)} - \frac{\vartheta_1'(v-r_\alpha^*, \tau)}{\vartheta_1(v-r_\alpha^*, \tau)} \right\} \right] \quad (2.3a)$$

$$= \mu_0 I \left[K_0 - i \frac{2}{\pi} K \sum_{\alpha=1}^n K_\alpha \left\{ \frac{\operatorname{sn}(u_\alpha, k) \operatorname{cn}(u_\alpha, k) \operatorname{dn}(u_\alpha, k)}{\operatorname{sn}^2(u-u_\alpha, k) - \operatorname{sn}^2(u_\alpha, k)} - \mathcal{Z}(u_\alpha, k) \right\} \right] \quad (2.3b)$$

を得る。ただし $u_\alpha = u_\alpha' + u_\alpha'' = 2Kr_\alpha$ で， u_α' は実数， u_α'' は純虚数。

式(2.3b)の右辺は明らかに楕円関数であるから，長方形領域 D の零点の中，実軸または直線 L 上にあるものを $s_\alpha (\alpha=1, 2, \dots, n')$ ，実軸上にあるものを $t_\alpha (\alpha=1, 2, \dots, n'')$ ，直線 L 上にあるものを $t_\alpha' = \operatorname{Re} t_\alpha + \frac{\tau}{2} (\alpha=0, 1, \dots, n'''-1)$ とすれば，もちろん $2n = 2n' + n'' + n'''$ であるが，Liouvilleの第四定理により，一般に

$$\sum_{\alpha=1}^n (r_\alpha + r_\alpha^*) - \sum_{\alpha=1}^{n'} (s_\alpha + s_\alpha^*) - \sum_{\alpha=1}^{n''} t_\alpha - \sum_{\alpha=0}^{n'''-1} t_\alpha' = m_0 + n_0 \tau \quad (2.4)$$

が成り立つ。ここに m_0, n_0 は実整数である。そこで

$$t_{n''} = t_0 + n_0 \tau \quad (2.5)$$

と置くと, (2.3)はテータ関数により

$$\frac{df}{dv} = \mu_0 I C_0 \Pi \left\{ \frac{\prod_{\alpha=1}^n \vartheta_\nu(v-s_\alpha, 2\tau) \vartheta_\nu(v-s_\alpha^*, 2\tau)}{\prod_{\alpha=1}^n \vartheta_\nu(v-r_\alpha, 2\tau) \vartheta_\nu(v-r_\alpha^*, 2\tau)} \prod_{\alpha=1}^n \vartheta_\nu(v-t_\alpha, 2\tau) \right\} \prod_{\alpha=1}^n \vartheta_\nu(v-t_\alpha^*, \tau) \quad (2.6)$$

と表わせる。(2.5)なる変換が必要なのはテータ関数の擬周期性のためである。また定数 C_0 は例えば $v=\frac{\tau}{2}$ に対して(2.3a)と(2.6)とが一致するという条件から決められる。

次に複素対数磁場 Ω を

$$\Omega = -\log\left(\frac{1}{B_0} \frac{df}{dz}\right) \quad (2.7)$$

によって導入すると, (2.1)から

$$\Omega = -\log \frac{B}{B_0} + i\theta \quad (2.8)$$

ただしプラズマ表面で $df/dz = B_0 e^{-i\theta_0}$ ($v=\frac{\tau}{2}$ に対応する点で)とする。ここで Ω を容器の形に依らない部分 Ω_0 と依る部分 Ω_1 に分けて

$$\Omega = \Omega_0(v) + \Omega_1(v) \quad (2.9)$$

と置く。ところでプラズマの圧力を p とすると, それは表面での磁気圧と釣り合わねばならないから

$$p = \frac{B_0^2}{2\mu_0} \quad (2.10)$$

即ちプラズマ表面では $B=B_0=\text{const.}$ である。従って(2.8)から Ω は v -平面の直線 L 上で $\text{Re } \Omega = \text{const.}$ でなければならないがこれはそこで $\text{Re } \Omega_0 = \text{const.}$, $\text{Re } \Omega_1 = \text{const.}$ であれば十分である。また実軸上では $\text{Im } \Omega_0 = \text{const.}$ となる様にする(区分的でもよい)。更に Ω は z -平面に於けると同じ型と強さの特異性

を持たねばならないが、これを Ω_0 に負わせると(特異性に関して df/dz を df/dv で置き換えてよいから)

$$\Omega_0 = \log \left\{ \prod_{\alpha=1}^n \frac{\vartheta_1(v-r_\alpha, 2\tau) \vartheta_1(v-r_\alpha^*, 2\tau)}{\vartheta_0(v-r_\alpha, 2\tau) \vartheta_0(v-r_\alpha^*, 2\tau)} \prod_{\alpha=1}^{n'} \frac{\vartheta_0(v-s_\alpha, 2\tau) \vartheta_0(v-s_\alpha^*, 2\tau)}{\vartheta_1(v-s_\alpha, 2\tau) \vartheta_1(v-s_\alpha^*, 2\tau)} \times \prod_{\alpha=1}^{n''} \frac{\vartheta_0(v-t_\alpha, 2\tau)}{\vartheta_1(v-t_\alpha, 2\tau)} \right\} + D_0 \quad (2.11)$$

となる。定数 D_0 も例えば $v=\tau/2$ に対して $\Omega=i0$ という条件から決められる。一方 Ω_1 は更に容器壁での条件を考慮することにより、直接にあるいは積分方程式を解いて決められる。これらを具体的に求めることは次節以下で行なう。

(2.7)から

$$\frac{dz}{dv} = \frac{df}{dv} / \frac{df}{dz} = \frac{1}{B_0} e^{\Omega} \frac{df}{dv} \quad (2.12)$$

従ってこれに(2.6), (2.9), (2.11)を代入すると

$$\frac{dz}{dv} = \frac{\mu_0 I}{B_0} C \Theta(v) \quad (2.13)$$

となる。ここに

$$\Theta(v) = e^{\Omega_1(v)} \left\{ \frac{\prod_{\alpha=1}^n \vartheta_0(v-s_\alpha, 2\tau) \vartheta_0(v-s_\alpha^*, 2\tau)}{\prod_{\alpha=1}^n \vartheta_0(v-r_\alpha, 2\tau) \vartheta_0(v-r_\alpha^*, 2\tau)} \prod_{\alpha=1}^{n'} \vartheta_0(v-t_\alpha, 2\tau) \right\} \prod_{\alpha=1}^{n''} \vartheta_1(v-t_\alpha, \tau) \quad (2.14)$$

$$C = C_0 e^{D_0} = e^{i0} \left[\kappa_0 - \frac{i}{2\pi} \sum_{\alpha=1}^n \kappa_\alpha \left\{ \frac{\vartheta_1'(\frac{\tau}{2}-r_\alpha, \tau)}{\vartheta_1(\frac{\tau}{2}-r_\alpha, \tau)} - \frac{\vartheta_1'(\frac{\tau}{2}-r_\alpha^*, \tau)}{\vartheta_1(\frac{\tau}{2}-r_\alpha^*, \tau)} \right\} \right] / \Theta(\frac{\tau}{2}) \quad (2.15)$$

従って複素積分

$$z = \frac{\mu_0 I}{B_0} C \int_{v_0}^v \Theta(v) dv + z_0 \quad (2.16)$$

により v -平面から z -平面への写像を行なうことができる。 v_0 , z_0 は適当に定めてよい。プラズマの境界は、もちろん直線 L に沿う積分により得られる。 t_α ($\alpha=0, 1, \dots, n''-1$)は写像の特異点

で，プラズマ表面のカスポに対応する。また S_α ($\alpha=1, 2, \dots, n'$) はもちろん磁場の中性点に対応する。

§ 3. 容器による因子

(i) 容器の断面が多角形の場合：この場合には Ω_1 は直接求められる。容器の断面を m 角形とし，各頂点の外角を θ_α ，対応する v -平面上の点を C_α ($\alpha=1, 2, \dots, m$) とすると，(2.8) 及び Ω_0 の決め方から，容器の壁に沿って各頂点を反時計回りに過ぎる毎に $\Re \Omega_1$ が θ_α だけ不連続的に増加する。従って前節での要請（直線 L 上で $\Re \Omega_1 = \text{const.}$ ）と合せて

$$\Omega_1(v) = \frac{1}{\pi} \sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha \log \frac{\mathcal{O}_0(v - C_\alpha, 2\pi)}{\mathcal{O}_1(v - C_\alpha, 2\pi)} \quad (3.1)$$

となる。もちろん容器は閉じているから $\sum_{\alpha=1}^m \theta_\alpha = 2\pi$ でなければならない。こうして (3.1) を (2.14) に代入し，(2.16) によって積分するわけである。

(ii) 容器の断面がなめらかな閉曲線の場合：この場合には Ω_1 は積分方程式を解いて求められる。容器の代表的な長さを R ，容器壁上の一点に於ける壁の接線の偏角を ψ ，壁の曲率半径を $R\rho(\psi)$ とし，また壁の形は閉曲線 $z = z_1(\psi)$ ($\psi_0 < \psi \leq 2\pi + \psi_0$) によって与えられるとすれば（ ψ_0 は $v_1 = -\frac{1}{2}$ に対応する角で未知）

$$\frac{dz_1}{d\psi} = R\rho(\psi)e^{i\psi} \quad (3.2)$$

である。なお $\rho(\psi)$ が ψ の一価関数である様に，曲率はいたる

所正と仮定する。さて z_1 に対応する w -平面の実軸上の点を v_1 とし, $d\psi/dv_1 = 2\pi X(v_1) (>0)$ と置けば, Ω_1 は (3.1) の代りに $(\theta_\alpha \rightarrow d\psi$ として)

$$\Omega_1(v) = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v_1) \log \frac{\vartheta_0(v-v_1, 2\tau)}{\vartheta_1(v-v_1, 2\tau)} dv_1 \quad (3.3)$$

を採らねばならない。(2.13) と (3.2) から

$$2\pi R \rho(\psi) e^{i\psi} X(v_1) = \frac{\mu_0 I}{B_0} C \Theta(v_1) \quad (3.4)$$

また容器の壁の全周長 $R\lambda$ は

$$R\lambda = \frac{\mu_0 I}{B_0} |C| \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\Theta(v_1)| dv_1 \quad (3.5)$$

となる。 $\rho(\psi)$ は既知の定関数, λ は定数である。(3.4) を (3.5) で辺々割って, 両辺の偏角と絶対値をとり

$$Q(\psi) = \frac{\lambda}{2\pi\rho(\psi)} \quad (3.6)$$

と置くと

$$\psi = \text{Im} \log [C \Theta(v_1)] \quad (3.7)$$

$$X(v_1) = Q(\psi) \frac{|\Theta(v_1)|}{\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |\Theta(v_1)| dv_1} \quad (-\frac{1}{2} < v_1 \leq \frac{1}{2}) \quad (3.8)$$

なる連立の式が得られる。 $\Theta(v_1)$ は (2.14) により $\Omega_1(v_1)$ を含むが, $\Omega_1(v_1)$ は (3.3) により $X(v_1)$ を含む積分として表わされる。従って (3.7), (3.8) は $X(v_1)$ についての非線形の二重積分方程式である。

第一の積分 (3.3) を形式的に実行するために, $X(v_1)$ を周期 1 の関数として Fourier 分解する。即ち

$$X(v_1) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos 2m\pi v_1 + b_m \sin 2m\pi v_1) \quad (3.9)$$

$$a_m = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v_i) \cos 2m\pi v_i dv_i \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.10)$$

$$b_m = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v_i) \sin 2m\pi v_i dv_i \quad (m=1, 2, \dots) \quad (3.11)$$

とすると

$$\log \frac{y_0(v, 2\tau)}{y_1(v, 2\tau)} = \pi i v + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1+q^{2m})} (e^{2m\pi i v} - q^{2m} e^{-2m\pi i v}) + \text{const.} \quad (0 \leq \Im_m v < \Im_m \tau) \quad (3.12)$$

を利用して

$$\Omega_1(v) = 2\pi i v + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(1+q^{2m})} [(a_m - ib_m) e^{2m\pi i v} - (a_m + ib_m) q^{2m} e^{-2m\pi i v}] \quad (3.13)$$

となる(定数項は省いてよい)。またCに含まれる定数 $\Omega_1(\frac{\tau}{2})$ は a_m には依らず

$$\Omega_1(\frac{\tau}{2}) = q - 2i \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m b_m}{m(1+q^{2m})} \quad (3.14)$$

となる。ここで、 a_m, b_m ($m=1, 2, \dots$)は反復法に依って数値的に解くことができる(ただ一つの境界を持つ領域の数値的な等角写像法に対してもこの方法がしばしば利用される¹¹⁾)。

即ち近似的なFourier係数 $a_m^{(j)}, b_m^{(j)}$ を使って(2.14), (2.15), (3.7), (3.8), (3.13)から $X^{(j+1)}(v_i)$ ($-\frac{1}{2} < v_i \leq \frac{1}{2}$)を計算し、修正Fourier係数 $a_m^{(j+1)}, b_m^{(j+1)}$ を(3.10), (3.11)によって求めるということを繰り返せば、ある誤差の範囲内でそれらは真のFourier係数に収束することが期待される。多くの場合出発値は $a_m^{(0)} = b_m^{(0)} = 0$ ($m=1, 2, \dots$)としてよいであろう。もちろん m は実際には適当な有限の数

N で打ち切る。

こうして積分方程式を解いて a_m, b_m ($m=1, 2, \dots, N$) が一たん求まれば, それらを (3.13) に代入し, (2.14), (2.15), (2.16) により写像が行なわれる。

容器の断面を表わす閉曲線が 0 または負の曲率の部分を持つ場合にも, 変曲点で区切れば, 上の方法を拡張することは容易である。

§ 4. 対称的な場合

直線電流系の配置及び容器の断面の形が z -平面上で, ある点のまわりに回転対称性を持つ場合には, 方程式が非常に簡単化される。 n 本の直線電流はその大きさが全く同じで, 方向は対称的または反対称的で, 系の中心のまわりに n_s 回回転対称であり (ただし電流の方向では区別しない), 容器の断面も同じ点のまわりに m 回回転対称で, m は n の倍数とする。とくに断面が正 m 角形のときは $m = \alpha n_s$ ($\alpha=1, 2$) の場合に限る。またその頂点の一つは v -平面の実軸上の点 c に対応するとする。ここで, 直線電流の一つの位置を v -平面上で r とし, またプラズマ電流と全直線電流との比 $\varepsilon = I_0/(nI_1)$ を導入する。以後任意の複素数 w に対して $\tilde{w} = n w$, 更に $K_n = K(k_n), k_n = k(\frac{r}{n})$ 等と置く。このとき積分 (2.15) は一般に

$$Z = \frac{\mu_0 I_1}{B_0} C_1 \int_{\tilde{r}_0}^{\tilde{r}} \Theta d\tilde{r} + Z_0 \quad (4.1)$$

となる。

(i) 直線電流の配置

a. 平行配置: $n = n_s T^n$, とくに $\alpha = 2$ のときには $C = 0$ とする。 r を純虚数として, $u = 2K_n \tilde{r}$ と置くと

$$\Theta(r) = e^{\Omega_1(r)} \frac{[\vartheta_\nu(\tilde{r}-s, (2-\nu)\tilde{r}) \vartheta_\nu(\tilde{r}+s, (2-\nu)\tilde{r})]^{2-\nu}}{[\vartheta_0(\tilde{r}-\tilde{r}, 2\tilde{r}) \vartheta_0(\tilde{r}+\tilde{r}, 2\tilde{r})]^2} \quad (4.2)$$

$$\nu = \begin{cases} 0 & (\mathcal{I}_m s \neq \frac{1}{2} \mathcal{I}_m \tilde{r}) \\ 1 & (\mathcal{I}_m s = \frac{1}{2} \mathcal{I}_m \tilde{r}) \end{cases}$$

$$C_1 = e^{i\theta_0} [\varepsilon + i \frac{Z}{\pi} K_n Z(u)] / \Theta(\frac{\pi}{2}) \quad (4.3)$$

ただし

$$s = \frac{1}{2K_n} F(\zeta, k_n), \quad \zeta = \left[\frac{\operatorname{sn}(u, k_n) \operatorname{cn}(u, k_n) \operatorname{dn}(u, k_n)}{Z(u, k_n) - \pi i \varepsilon / (2K_n)} + \operatorname{sn}^2(u, k_n) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.4)$$

で, ζ は実数または純虚数である。

b. 反平行カスプ型配置: これも $n = n_s T^n$, 電流は交互に反平行に並ぶ。とくに $\alpha = 2$ のときは $C = 0$ とする。 n を偶数として $\hat{r} = \frac{n}{2} r$, $\hat{r} = \frac{n}{2} \tau$ と置くと

$$\Theta(r) = e^{\Omega_1(r)} \left\{ \frac{\vartheta_3(\tilde{r}, 2\tilde{r})}{\vartheta_0(\tilde{r}-\tilde{r}, 2\tilde{r}) \vartheta_0(\tilde{r}+\tilde{r}, 2\tilde{r})} \right\}^2 \vartheta_3(\tilde{r}, \tilde{r}) \quad (4.5)$$

$$C_1 = e^{i\theta_0} \frac{1}{2\pi} \mathcal{I}_m \left[\frac{\vartheta_3'(\hat{r}, \hat{r})}{\vartheta_3(\hat{r}, \hat{r})} - \frac{\vartheta_0'(\hat{r}, \hat{r})}{\vartheta_0(\hat{r}, \hat{r})} \right] / \Theta(\frac{\pi}{2}) \quad (4.6)$$

c. 反平行ミラー型配置: 同方向の電流を二本一組にして交互に反平行に並べる。この場合は $n_s = \frac{n}{2} T^n$, 常に $C = 0$ とする。 $\hat{r}$, $\hat{r}$ の定義は b と同じで, $\nu = \frac{n}{4}$, $\tilde{r} = \nu r$, $\tilde{r} = \nu \tau$ と置

と

$$\textcircled{H}(v) = e^{\Omega_1(v)} \left\{ \frac{\vartheta_0(\tilde{v}-s, 2\tilde{c})\vartheta_0(\tilde{v}+s, 2\tilde{c})\vartheta_3(\tilde{v}, 2\tilde{c})}{\vartheta_0(\tilde{v}-\tilde{r}, 2\tilde{c})\vartheta_0(\tilde{v}+\tilde{r}, 2\tilde{c})\vartheta_0(\tilde{v}-\tilde{r}^*, 2\tilde{c})\vartheta_0(\tilde{v}+\tilde{r}^*, 2\tilde{c})} \right\}^2 \times \vartheta_3(\tilde{v}, \tilde{c}) \quad (4.7)$$

$$C_1 = e^{i\theta_0} \frac{1}{2\pi} \mathcal{L}_m \left[\frac{\vartheta_3'(\bar{r}, \bar{c})}{\vartheta_3(\bar{r}, \bar{c})} - \frac{\vartheta_0'(\bar{r}, \bar{c})}{\vartheta_0(\bar{r}, \bar{c})} \right] / \textcircled{H}\left(\frac{\tau}{2}\right) \quad (4.8)$$

ただし $u = K_v s$ は, $u_0 = 2K_v \bar{r}$ とし, 方程式

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^4(u, k_v) - \frac{\mathcal{L}_m(\mathcal{M}(u_0, k_v) \mathcal{M}^*(u_0, k_v) \mathcal{D}n(u_0, k_v))}{\mathcal{L}_m(\mathcal{M}(u_0, k_v) \mathcal{M}(u_0, k_v) \mathcal{D}n^*(u_0, k_v))} \left[\left| \frac{\mathcal{M}(u_0, k_v)}{\mathcal{D}n(u_0, k_v)} \right|^2 - |\mathcal{M}(u_0, k_v)|^2 \right] \\ \times \mathcal{M}^2(u, k_v) - \left| \frac{\mathcal{M}(u_0, k_v) \mathcal{M}(u_0, k_v)}{\mathcal{D}n(u_0, k_v)} \right|^2 = 0 \quad (4.9) \end{aligned}$$

の一つの純虚数の根である。

(ii) 容器の断面の形

a. 正多角形: 正 m 角形とすると

$$\Omega_1(v) = \frac{2}{\alpha n} \log \frac{\vartheta_0(\alpha(\tilde{v}-\tilde{c}), 2\alpha\tilde{c})}{\vartheta_1(\alpha(\tilde{v}-\tilde{c}), 2\alpha\tilde{c})} \quad (4.10)$$

b. なめらかな閉曲線: この場合には

$$\Omega_1(v) = \frac{2}{n} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} X(v_i) \log \frac{\vartheta_0(\tilde{v}-v_i, 2\tilde{c})}{\vartheta_1(\tilde{v}-v_i, 2\tilde{c})} dv_i \quad (4.11)$$

従って (3.13) で $\tilde{c}$ を $\tilde{c}^n$, v を $\tilde{v}$ でそれぞれ置き換え, 右辺を n で割ればよい。特に直線電流が容器の対称軸上にある場合には $X(v_i)$ は偶関数であるから, Fourier 正弦係数 $b_m (m=1, 2, \dots)$ は消える。

§ 5. 結果

容器の断面の形が正方形 ($m=4$) または円形 ($Q=1$) の場合についての計算例を示す。

(i) 自己ピンチ：直線電流を置かず，プラズマ自身の電流磁場によって閉じ込める場合は中性点がないので単純になる。容器の断面を正方形とすると，(2.13)，(2.14)，(2.15)，(3.1) 及び対称性により

$$\frac{dz}{dv} = - \left| \frac{\mu_0 I_0}{B_0} \right| \left[\frac{J_0(4v, 8\tau)}{J_1(4v, 8\tau)} \right]^{\frac{1}{2}} = - \left| \frac{\mu_0 I_0}{B_0} \right| k^{-\frac{1}{2}} \operatorname{sn}^{-\frac{1}{2}}(u, k) \quad (5.1)$$

ただし $8Kv = u$ で， k, K は $1 - 4q^8$ に対応する母数及び第一種完全楕円積分である。(5.1) を積分するために，Jacobi の技法¹²⁾により

$$h^2 = \frac{(1+\sqrt{k})^2}{2(1+k)}, \quad h'^2 = \frac{(1-\sqrt{k})^2}{2(1+k)} \quad (h^2 + h'^2 = 1) \quad (5.2)$$

$$\sqrt{\operatorname{sn}(u, k)} = \frac{(h+h')\zeta}{\sqrt{1-h^2\zeta^2}\sqrt{1-h'^2\zeta^2}} \quad \text{または} \quad \zeta^2 = \frac{2(1+k)\operatorname{sn}(u, k)}{[1+\operatorname{sn}(u, k)][1+k\operatorname{sn}(u, k)]} \quad (5.3)$$

と置くと

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{\operatorname{sn}(u, k)}} = \frac{F(\zeta, h) + F(\zeta, h')}{\sqrt{2(1+k)}} \quad (5.4)$$

となるから，結局

$$z = \left| \frac{\mu_0 I_0}{B_0} \right| \Lambda^{-1} [(1+i)(H+H') - F(\zeta, h) - F(\zeta, h')] \quad (5.5)$$

ただし

$$\Lambda = 2^{\frac{7}{2}} K k^{\frac{1}{2}} (1+k)^{\frac{1}{2}}, \quad H = F(1, k), \quad H' = F(1, k') \quad (5.6)$$

である。プラズマの境界の形は図2に示した。

(ii) 対称的に配置した直線電流：容器の断面が正方形及び円形で，電線の数 $n=2, 4$ ，配置が平行及びカスプ型，ミラー

型の場合について計算した。容器断面が正方形と円形とではトポロジカルに大差がないので、円形の場合の $n=4$ 、平行電流配置のみについてのプラズマ境界の形を図3~6に示す。これは Simpson の公式により数値積分したもので、相対誤差は 10^{-4} 以下である。Fourier 係数の必要項数は q と共に増大し、その変化は著しい。精度 10^{-5} で21項とったものもある。また反復回数は最高8回であった。一般に解の独立なパラメータは三つあり、例えば ε , q , $\eta=r/\frac{1}{2}\varepsilon$ をとるのが便利である。ただし図3~6は全て $\eta=0.5$ に対するものである。図中の記号 $a, b, \dots, e$ は $q=0.1, 0.3, \dots, 0.9$ に対応し、また $\circ, \cdot$ はそれぞれ電線の位置、中性点を示す。特別な場合に対する q の値は表1を見よ。また図5で $q \ll 1$ のときはハイポサイクロイドになる。なお以上の計算は全て東大大型計算機センター HITAC 8700/8800 システムによるものである。

図	記号	q	
3	C'	0.5923	中性点が容器壁上にできる。
4	C'	0.5636	プラズマが大きくくびれて境界が接触する。
6	C'	0.5832	プラズマの電線に近い部分がくびれて境界が接触(カスがない)
"	C''	0.6393	" (カスあり)

表 1

§ 6. まとめ

上では境界の形しか示さなかったが，プラズマが単原子理想気体で，閉じ込めは断熱的と仮定すると，閉じ込めたときの圧力，温度と初期条件とを関係づけることができる。それによれば，ある場合には同一の物理的条件下で，プラズマの温度を最高にする様な電線の位置が存在する。

また上の結果と，直線電流に依る磁気空洞とを組合せればハードコアピンチの場合を扱うことができる。この場合，プラズマの内側及び外側の境界面上での磁気圧が等しくなる様に（それは勿論プラズマの圧力に等しい）二つの独立な解を適合させればよい。

なお，カスプ型，ミラー型の場合には，カスプの境界が交わらない様に

$$\left[\alpha_m \frac{d}{dz} \log H(\xi + t\alpha) \right]_{\xi=0} \leq 0$$

（ $\alpha=0, 1, \dots, n^m-1$ ）という必要条件が付く。ただし α は実数である。ここではプラズマの平衡形態を求めることに主眼を置いたので，安定性の議論は今後に残された重要な課題であろう。

参 考 文 献

- 1) R. J. Taylor, Proc. Phys. Soc. London B 70 (1957) 1049.

- 2) J. Berkowitz, K. O. Friedrichs, H. Goertzel, H. Grad, J. Killeen, E. Rubin, *Peaceful Uses of Atomic Energy* (United Nations, Geneva), 31 (1958) 171.
- 3) C. Sozou, *J. Plasma Phys.* 3 (1969) 651.
- 4) J. Berkowitz, H. Grad, and H. Rubin, *Peaceful Uses of Atomic Energy* (United Nations, Geneva), 31 (1958) 177.
- 5) H. Grad, and H. Rubin, *Peaceful Uses of Atomic Energy* (United Nations, Geneva), 31 (1958) 190.
- 6) A. M. Downs, R. C. Hewson-Browne, A. Diermendjian, and P. C. Kendal, *Quart. J. Mech. and Appl. Math.* 19 (1966) 27.
- 7) C. Sozou, *J. Fluid Mech.* 24 (1966) 689.
- 8) T. Kambe, *Institute of Space and Aeronautical Science, University of Tokyo, Report No. 433* (1968).
- 9) I. Imai, *数理科学* 1 (1970) 85.
- 10) I. Imai, *数理科学* 2 (1970) 64.
- 11) B. Noble, in "Nonlinear Integral Equations", edited by P. M. Anselone (The University of Wisconsin Press, Madison, 1964), P. 288
- 12) C. G. J. Jacobi, in "Mathematische Werke I (C. G. J. Jacobi's Gesammelte Werke)" (Chelsea Publishing Company, New York, 1969), P. 375.

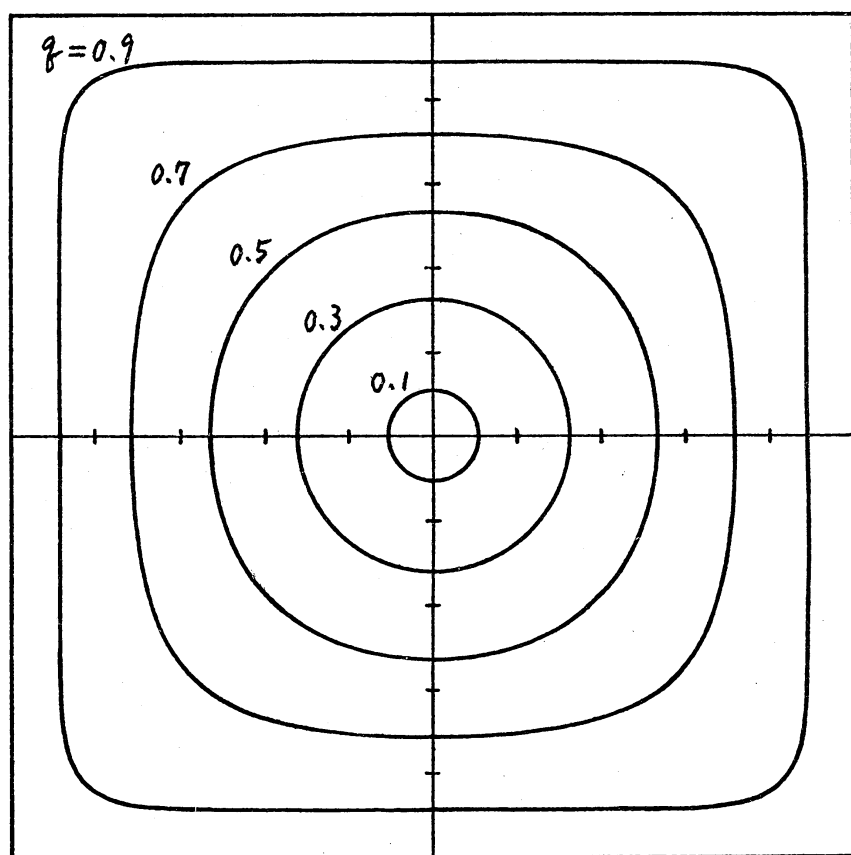


图 2

$$\varepsilon = -2.0$$

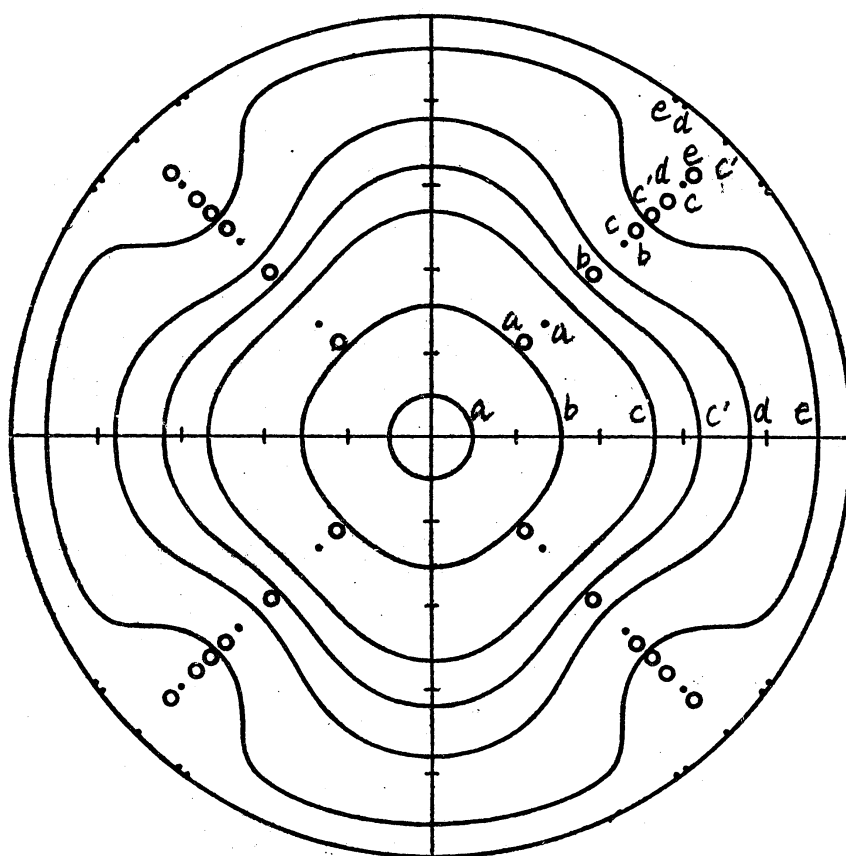


图 3

$$\xi = -0.5$$

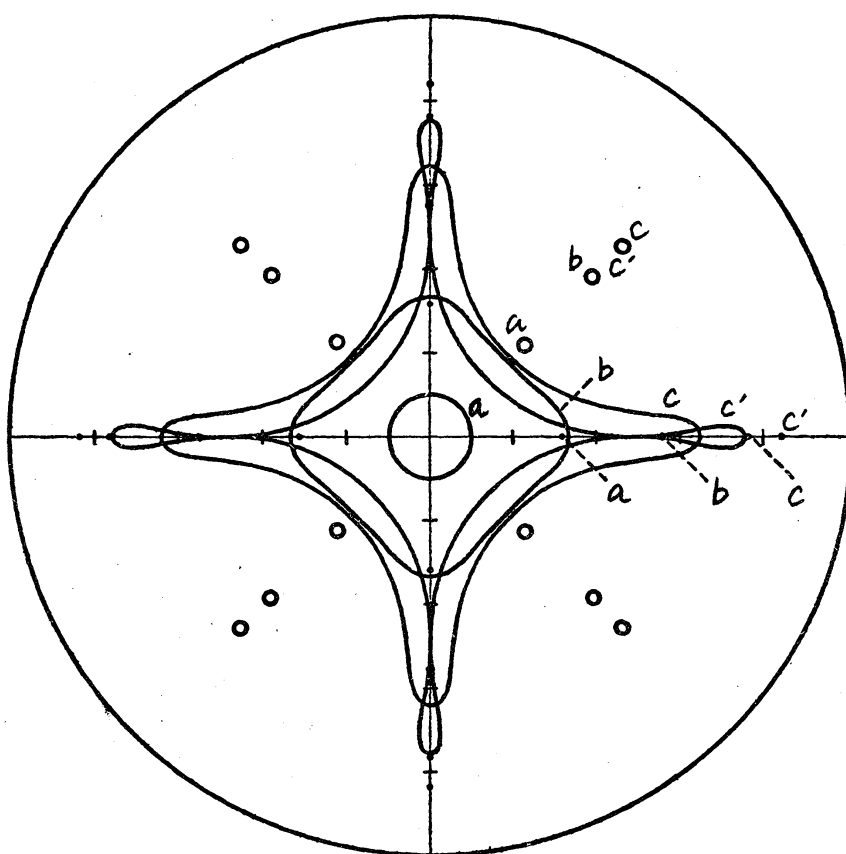


图 4

$$\mathcal{E} = 0.0$$

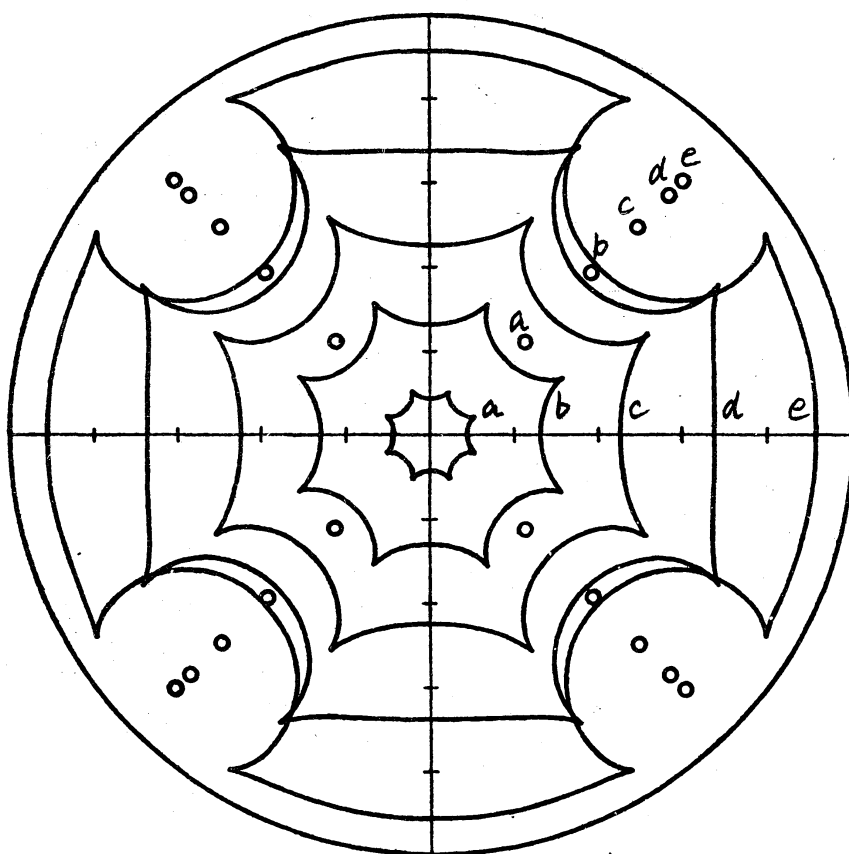


图 5

$$\varepsilon = 1.0$$

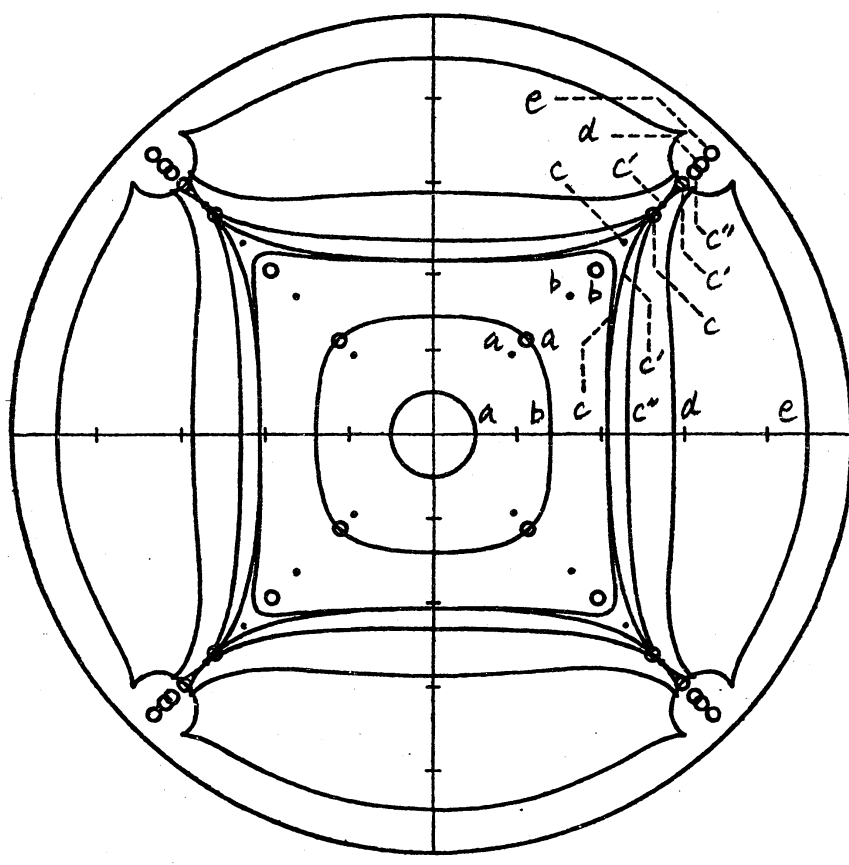


图 6