

$Spin(4, 1)$ 上の球函数の展開について

早大 理工 大石生田 雅一

§1 序 Harish-Chandra は [2] に於て半単純リー群 G 上のある種の球函数の指数函数の中による展開を与え且、これは、 G 上の Paley-Wiener 型定理、特に逆 Fourier 変換の性質の研究に重要な意義を持つ。しかし、この展開に現れる「係数」はルート系に関する複雑な induction をもって与えられているので、一般には詳しい性質は明らかではない。ここでは $G = Spin(4, 1)$ に対し、この展開の「特異点」の分布を求め、これは $Spin(4, 1)$ 上の Paley-Wiener 型定理の証明に必要となる。([5])。

§2 Harish-Chandra とよる $E(z, \nu, \lambda)$ の展開

$\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ とよ、 $\mathbb{C}$ 複素数体、実数体、整数環を表わす。
 λ , $k = \mathbb{C}$ or $\mathbb{R}$ 上の線型空間 E, E' に対して、 E から E' への線型写像 (k 上の) 全体を $Hom_k(E, E')$ と書く。

$G = Spin(4, 1)$, K をその極大コンパクト部分群。又、 $\lambda \in$

各々のリ-環, σ 対応する Cartan involution $\theta \in \Theta$ とする。

$G = KAN$, $\sigma = \sigma_K + \sigma_A + \sigma_N$ σ 岩沢分解 対応する $g \in G$ の分解 $g = k(g) \exp H(g) n(g)$ $k(g) \in K$, $H(g) \in \sigma$, $n(g) \in N$ とする。 $\alpha \in \sigma(\sigma)$ と関する正の制限ルートとすれば, $\mathbb{Q}$ と $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma, \mathbb{Q})$ とは $\alpha \leftrightarrow \mathbb{Z}\alpha$ と $\mathbb{F}$, $\mathbb{Z}$ 同一視出来る。又, W $\sigma(\sigma)$ の Weyl 群とすれば, W は K の中心の位数 2 の部分群と同一視出来る。 W の単位元を e , 位数 2 の元を θ と書くと, $\theta\alpha = -\alpha \in \mathbb{F}$, $\mathbb{Z}$ $\text{Hom}_{\mathbb{R}}(\sigma, \mathbb{Q})$ と作用する。

$M \in \sigma$ の K に対する中心化群, (τ_i, V_i) ($i=1, 2$) $\in K$ の既約 $\mathbb{Z}$ -タリ表現。このとき, $V_M = \{v \in \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_2, V_1); T_i(m)v = vT_i(m)\}$ $\forall m \in M$ とおく。又 T_i $\in K$ の展開環の表現へ拡張し, 再び同一の記号 T_i で表わす。

$z = z, z \in \mathbb{Q}, v \in V_M, g \in G$ に対して,

$$(1) \quad E(z, v, \alpha) = \int_K e^{(z - \frac{1}{2})\alpha(H(\alpha R))} T_1(K(\alpha R)) v T_2(R^{-1}) dR.$$

$z = z$ dR は K の正規化された Haar 測度とする。

$V_M = \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(V_M, V_M)$, $H \in \sigma$, $\alpha(H) = 1$ とする H に対して, $A_t = \exp(tH)$ ($t \in \mathbb{R}$) とおく。おると Harish-Chandra による $E(z, v, A_t)$ の展開定理 4 次の様になる。([2] 及び, [6] の 9 章)

命題 1 V_M に値を取る $\mathbb{Q}$ 上の有理型函数 C_ω ($\omega \in W$)

と, V_M 値をとり有理函数 Γ_R ($R=0, 1, 2, \dots$) が存在して, 次の性質を有する:

$$(2) \quad E(z, v, a_t) = \Phi(z, t) C_e(z) v + \bar{\Phi}(-z, t) C_o(z) v$$

$$t \in \mathbb{R} \quad t > 0, \quad v \in V_M$$

$$(3) \quad \Phi(z, t) = e^{(z-\frac{3}{2})t} \sum_{R=0}^{\infty} \Gamma_R(z) e^{-Rt} \quad t \in \mathbb{R} \quad t > 0.$$

但し, 上の等式は $\mathbb{C}$ の適当な open dense な部分集合 $O(t_1, t_2)$ 上の正則函数として成立する。

注意. Γ_R は k に関する帰納的方程式により定義される。

2, 上の等式は T_1, T_2 により定められる。 $t > 0$ を固定し $z \in O(t_1, t_2)$ として $\Phi(z, t) C_e(z)$, $\bar{\Phi}(-z, t) C_o(z)$ は $O(t_1, t_2)$ 上正則であるか。 $\mathbb{C}$ 上有理型に解析接続出来る。

以下の議論は $t > 0$ を固定し $z \in O(t_1, t_2)$ の特殊値の性質と分布を扱う。

§3 Γ_R , 及び C_ω の計算

K, M の既約 $\mathbb{Z}$ -格子表現の同値類の全体をそれぞれ, $\hat{K}, \hat{M}$ で表わす。表現の highest weight を与えられ,

$$R = \{ (n, n') ; n, n' \in \mathbb{Z} \quad n - n' \in \mathbb{Z} \quad n' \leq n \}$$

$$\hat{M} = \{ n'' ; n'' \in \mathbb{Z} \quad n'' \geq 0 \}$$

と同一視出来る。

$$\tau \in (n, n') \in K \text{ かつ } \tau$$

$$M(\tau) = \{ n'' \in M \mid m' \leq n'' \leq n, n - n' \in \mathbb{Z} \}$$

$$2, \tau_i \in (m_i, n'_i) \in K \quad i=1, 2 \text{ かつ } \tau$$

$$M(\tau_1, \tau_2) = M(\tau_1) \cap M(\tau_2)$$

と書く。

$\omega_M = 2 \times M$ の Casimir 作用素とあると $\sigma \in (n') \in M$ かつ τ , $\sigma(\omega_M) = n''(n''+1) \text{ id}_\sigma$ (id_σ は σ の表現空間上の恒等作用素). $2 \ (n'') \in M(\tau) \text{ かつ } \tau$.

$$C_{n''}(z, \tau) = \frac{\varepsilon^{2n''} 2^{-2z+3} \Gamma(2z) \Gamma(-z + \frac{3}{2} + n) \Gamma(-z + \frac{1}{2} - m')}{\Gamma(-z + \frac{3}{2} + n'') \Gamma(-z + \frac{1}{2} - n'') \Gamma(z + \frac{3}{2} + n) \Gamma(z + \frac{1}{2} - m')}$$

とある。

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & n' < 0 \\ 1 & n' \geq 0 \end{cases}$$

2, Γ は普通の Γ -函数とある。

命題 2

$$1) M(\tau_1, \tau_2) \neq \emptyset \iff V_M \neq \{0\}.$$

2) $M(\tau_1, \tau_2) \neq \emptyset$ とある。各 $p \in M(\tau_1, \tau_2)$ かつ τ $V_p \neq 0 \in V_M$ が存在して, $\tau_1(\omega_M)V_p = V_p \tau_2(\omega_M) = p(p+1)V_p$ であり, $\{V_p \mid p \in M(\tau_1, \tau_2) \text{ かつ } V_p \neq 0\}$ は V_M の基底となる。

2, $i=1, 2$ かつ τ , 次の等式が成立する。

$$(5) \int_N e^{-|z\tau| \frac{3}{2} \alpha_H(\pi)} V_p \tau_i(K(\pi, \theta))^{-1} d\pi = C_p(z, \tau_i) V_p.$$

$\equiv -i \int d\pi$ は $N = \exp 0\pi$ 上の ham 測度であり,
 $\int_N e^{-3\alpha H(i\pi)} d\pi = 1$ とする正規化をせよとされている。
 3. 1, $\operatorname{Re} z > 0$ とする。

$$(6) \begin{cases} C_e(z) V_p = C_p(z, \tau_2) V_p \tau_2(\lambda) \\ C_o(z) V_p = C_p(-z, \tau_1) V_p \tau_1(\lambda) \end{cases} \quad p \in M(\tau_1, \tau_2)$$

さらに, $T_R(z) V_p = \sum_{q \in M(\tau_1, \tau_2)} T_R(z, p, q) V_q$ と書き表
 めることを, $a_{r,q}, b_q \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$\begin{aligned} (7) \quad & \{2Rz - R^2 + p(p+1) - q(q+1)\} T_R(z, p, q) \\ &= 6 \sum_{j=1}^{\infty} \{z - (\frac{3}{2} + R - 2j)\} T_{R-2j}(z, p, q) \\ &+ 4 \sum_{j=1}^{\infty} (2j-1) \sum_{r \in M(\tau_1, \tau_2, p)} a_{r,q} T_{R-2j-1}(z, p, r) \\ &- 4 \sum_{j=1}^{\infty} j b_q T_{R-2j}(z, p, q) \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

$$T_R(z, p, q) \equiv 0 \quad R < 0$$

$$T_0(z, p, q) = \begin{cases} 1 & p=q \\ 0 & p \neq q \end{cases}$$

$$2, \quad M(\tau_1, \tau_2, p) = \{r \in M(\tau_1, \tau_2) \mid |r-p| \leq 1\}$$

証明の概略.

まず, 1) と 2) の前半より, K は $SL(2) \times SL(2)$ と同型であ
 り, M は その 非角部分群と考えられる ([4]) から, 表

現の分岐律を適用すればよい。(5)の左辺は G の主
 系列の *intertwining operator* から得られる。(*intertwining
 operator* と *type* T_i の K -finite ベクトルに作用させると
 上の積分が得られる。) $\gamma = z$, (5)の両辺の $T \in (n, n')$ に
 関する巡回公式を調べると, 同一であることが分る。従って
 (5)は $n = |M| = p$ の場合と帰着され, この場合は, 実際に積
 分を計算して得られる。(6)については [6] の 9 章, 9.1.6
 と同様の議論によつて与えられる。最後に (7)は Tr の定義式
 に於ける V_M 上の線型写像の V_p に因する行列要素を計算す
 るだけでよいから, 結局は積分が複雑な計算を必要とする。特に
 (6) (7) (8) の表現と関する可成り詳しい分岐律についての
 結果が必要となる。

§.4 $\Phi(z, t)$ の「特異点」の分布.

$t > 0$ を固定したとき $z \mapsto \Phi(z, t)$ のベクトル値函
 数としての特異点を $\Phi(z, t)$ の特異点と呼ぶ。 $t > 0$
 を固定したとき $z \mapsto \Phi(z, t)$ の特異点の集合は 命題 1
 により $\mathbb{C}$ の discrete な部分集合であることが分る。そこで
 (5)の両辺の特異点の周りの Laurent 展開を与えることが出来
 る。(11)により $E(z, v, t)$ は z の函数として整函数であ
 る。そこで, Laurent 展開の係数の $t \rightarrow +\infty$ での行動を

考えると, (3) により, $z \mapsto \Phi(z, t) C_0(z) V$, $z \mapsto \Phi(z, t) C_0(z) V$ の特異点は $t > 0$ に無関係に定まり, 1 高々 1 位の極であることが結論出来る。故に, 「 $\Phi(z, t)$ の特異点」が意味を持つ。さらに, (6) を考えれば, $z \mapsto \Phi(z, t) V_p$ は高々 2 位の極しか持たないことが分る。 $\Phi(z, t) V_p$ の特異点についての次の命題が成立する。

命題 3 $M(t_1, t_2) \neq \emptyset$ とする。 $t \in \mathbb{R}$, $t > 0$ 及び $p \in M(t_1, t_2)$ を固定し, $z \mapsto \Phi(z, t) V_p$ は $\mathbb{C}$ 上 V_M の値をとる有理型関数であり, その特異点は t に無関係に定まり, 1 位の極である。さらに次の点を除いては, 関数 $\Phi(z, t) V_p$ は正則である。

- 1) $z = k$ $k > 0$ $k - p \in \mathbb{Z}$
- 2) $z = k + \frac{1}{2}$ $k \in M(t_1, t_2)$, $p < k$
- 3) $z = k + \frac{1}{2}$ $2k \in \mathbb{Z}$, $p - k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k < \min(M_1', M_2')$
- 4) $z = -k - \frac{1}{2}$ $k \in M(t_1, t_2)$ $k < p$

証明の概略.

$t > 0$, $z \mapsto \Phi(z, t) C_0(z) V_p$, $z \mapsto \Phi(-z, t) C_0(z) V_p$ の $z = z_0$ に於ける留数をそれぞれ $\psi_e(z_0, t)$, $\psi_o(z_0, t)$ とする。このとき, ψ_e, ψ_o は $\mathbb{C} - K$ 上の実解析関数。

$\Psi_e(z_0, \alpha), \Psi_0(z_0, \alpha)$ であって 函数等式

$$\Psi_w(z_0, k_1, \alpha, k_2) = T_1(k_1) \Psi_w(z_0, \alpha) T_2(k_2)$$

$$k_1, k_2 \in K, \alpha \in G \setminus K \quad w = e, \alpha$$

を満す様の一意的に拡張出来る。

さうして $\mathfrak{g}$ を G 上の両側不変微分作用素全体の作る環とすると $\Psi_w(z_0, \alpha)$ は $\mathfrak{g}$ に関する同時固有函数となる。又、このとき、その固有値は z_0 及び ρ によって一意に決定される。

I 丁の結果の内で、 $\mathfrak{g}$ に関する固有値と $\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi_w(z_0, \alpha_t)$ の行動とに関する断片の部分は $\Psi_w(z_0, \alpha_t) = \psi_w(z_0, t)$ の $t=0$ と無関係に成立する。このことから、(7)を用いて、 z_0 が命題 3 の除外集に在りければ、 $\psi_w(z_0, t) = 0$ が結論出来る。

尚、詳しい証明は [5] に就いて發表する予定である。

参考文献

- [1] H. Boerner: Darstellungen von Gruppen, Springer
- [2] Harish-Chandra: Differential equations and semi-simple Lie groups (unpublished)

[37] M. Mamiida : An analogue of Paley-Wiener-theorem on the de Sitter group (to appear)

[41] R. Takahashi : Sur les représentations unitaires des groupes de Lorentz généralisés.

Soc. Math. France., 91 289-433 (1963)

[51] P.C. Trombi, V.S. Varadarajan : Asymptotic behaviour of eigenfunctions on a semisimple Lie group ; the discrete spectrum.

Acta Math, 129, 237-280 (1972)

[61] G. Warner : Harmonic analysis on semisimple Lie groups II, Springer.