

加法的な高次チャウ群とケーラー微分加群 (Additive higher Chow group and module of absolute Kähler differentials: a research announcement)

By

小野田 実頼 (Mirai ONODA)*

Abstract

This is an announcement of the original paper [4] (Kodai Math. J. 41 (2018), No.1, 167–200). In this paper, we give an overview about a map from the additive higher Chow group of 1-cycles to the module of absolute Kähler differentials, called a *regulator map*.

§ 1. 序文

本稿では、加法的な高次チャウ群とケーラー微分加群の関係について、関連する研究と著者の最近の論文 [4] の結果の概略を述べる。本稿では、 k は標数 0 の体とする。

加法的な高次チャウ群は、体 k 上の truncated polynomial ring $k[x]/(x^m)$ の K 群を代数的サイクルで表現することを目的に Bloch と Esnault により導入された ([1])。その K 群の構造は Hesselholt によりケーラー微分加群と関連していることが知られている ([2]):

$$(1.1) \quad K_{n+1}(k[x]/(x^m), (x)) \simeq \bigoplus_{p \geq 1} \left(\Omega_k^{n-2p} \right)^{\oplus(m-1)}.$$

0-サイクルの加法的な高次チャウ群 $\mathrm{CH}_0(A_k(m), n)$ の構造はよく知られている ([6]) が、一般の場合は非常に難しい。1-サイクルの加法的な高次チャウ群 $\mathrm{CH}_1(A_k(m), n)$ に関する結果として、Park により得られた次のレギュレータ写像の存在がある ([5]):

$$R_{2,m} : \mathrm{CH}_1(A_k(m), n) \rightarrow \Omega_k^{n-2}.$$

Received April 2, 2018. Revised November 12, 2018.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 14C15, 14C25.

Key Words: Chow group; algebraic cycle; regulator map.

*Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology, O-okayama, Meguro-ku, Tokyo 152-8551, Japan.

e-mail: onoda.m.aa@m.titech.ac.jp

© 2020 Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University. All rights reserved.

これは, 同型 (1.1) の, $p = 1$ における直和因子に対応する結果である. 論文 [4] の主結果は, この結果の一般化であり ([4, Corollary 3.20]), Park の使用した加法的高次チャウ群のモジュラス条件を変更することにより得られた.

第二節では, 加法的高次チャウ群の概説を行う. 第三節で主結果を述べ, なぜモジュラス条件を変更したのかの理由を簡単に説明する.

§ 2. 加法的高次チャウ群

序文で述べた加法的高次チャウ群は, 加法的サイクル複体のホモロジー群により定義される ([3, Definition 2.6, Definition 2.7]). $\square := \mathbb{P}^1 \setminus \{1\}$ とし, O を $\mathbb{A}^1$ の原点とする. $m \geq 2$ を整数とし, $D := m[O]$ を, $\mathbb{A}^1$ 上の有効カルティエ因子とする. $\mathbb{A}^1 \times (\mathbb{P}^1)^n$ の座標関数を, $(x, y_1, \dots, y_n)$ で表す. 各 $i \in \{1, \dots, n\}$ と $\varepsilon \in \{0, \infty\}$ に対して, 方程式 $y_i = \varepsilon$ が定める余次元 1 の埋め込みを $\partial_{i,\varepsilon}$ で表す:

$$\partial_{i,\varepsilon} : \square^n \rightarrow \square^{n+1}; \quad (y_1, \dots, y_n) \mapsto (y_1, \dots, y_{i-1}, \varepsilon, y_i, \dots, y_n).$$

次の二つの条件を満たす, $(\mathbb{A}^1 \setminus O) \times \square^n$ の d 次元閉部分整スキーム C によって生成される形式的アーベル群を $z_d(A_k(m), n)_{\text{ssup}}$ で表す:

- C は face condition を満たす.
- C は 強 sup モジュラス条件を満たす.

ここで, face condition とは, Bloch の高次チャウ群の定義で用いられているもので, C はすべての面と正しく交わる, という条件である. また, C が強 sup モジュラス条件を満たすとは, C の $\mathbb{A}^1 \times (\mathbb{P}^1)^n$ における Zariski 閉包 $\overline{C}$ の正規化 $\overline{C}^N$ からの自然な射を

$$\nu_C : \overline{C}^N \rightarrow \mathbb{A}^1 \times (\mathbb{P}^1)^n$$

としたとき, 次のカルティエ因子としての不等式が成り立つような整数 $l \in \{1, \dots, n\}$ が存在するときをいう:

$$\nu_C^*(D \times (\mathbb{P}^1)^n) \leq \nu_C^*(\mathbb{A}_k^1 \times F_l).$$

ここで, F_l は, $y_l = 1$ により定義される $(\mathbb{P}^1)^n$ 上のカルティエ因子である.

境界写像 $\partial : z_d(A_k(m), n) \rightarrow z_{d-1}(A_k(m), n-1)$ を,

$$\partial = \sum_{i=1}^n (-1)^i (\partial_i^0 - \partial_i^\infty)$$

により定める. ここで, ∂_i^ε は, 余次元 1 の埋め込み $\partial_{i,\varepsilon}$ に沿った引き戻しである.

定義 2.1 ([3, Definition 2.6, Definition 2.7]). アーベル群 $z_{d+\bullet}(A_k(m), n + \bullet)_{\text{ssup}}$ は, 自然に cubical object と見なすことができる. 付随する複体 $(\bar{z}_{d+\bullet}(A_k(m), n + \bullet)_{\text{ssup}}, \partial)$ の, $\bar{z}_d(A_k(m), n)_{\text{ssup}}$ におけるホモロジー群を加法的高次チャウ群といい, $\text{CH}_d(A_k(m), n)_{\text{ssup}}$ で表す:

$$\text{CH}_d(A_k(m), n)_{\text{ssup}} := H_0(\bar{z}_{d+\bullet}(A_k(m), n + \bullet)_{\text{ssup}}, \partial).$$

注意. 強 sup モジュラス条件を sup モジュラス条件

$$\nu_C^*(D \times (\mathbb{P}^1)^n) \leq \sup_{1 \leq l \leq n} \nu_C^*(\mathbb{A}_k^1 \times F_l)$$

に置き換えて多少の修正をすることにより, sup モジュラス条件の加法的高次チャウ群 $\text{CH}_d(A_k(m), n)_{\text{sup}}$ が得られる ([5, §2]). 論文 [4] で用いられた加法的高次チャウ群は $\text{CH}_d(A_k(m), n)_{\text{ssup}}$ であり, 論文 [5] で用いられた加法的高次チャウ群は $\text{CH}_d(A_k(m), n)_{\text{sup}}$ である. これらの群の間には, 自然な射

$$(2.1) \quad \text{CH}_d(A_k(m), n)_{\text{ssup}} \rightarrow \text{CH}_d(A_k(m), n)_{\text{sup}}$$

が存在する.

加法的高次チャウ群の定義において考えられているモジュラス条件のうち, 最も弱い条件は “sum モジュラス条件” であり, このモジュラス条件を用いて 0-サイクルの加法的高次チャウ群が計算されている ([6]).

§ 3. 主結果

論文 [4] における主結果の一つは, 加法的高次チャウ群 $\text{CH}_1(A_k(m), n)_{\text{ssup}}$ からケーラー微分加群への非自明なレギュレータ写像の存在である. $\text{CH}_1(A_k(m), n)_{\text{ssup}}$ には自然に k^* -作用が入り, また Ω_k^{n-2} にも, s を正整数としたとき, $\omega \in \Omega_k^{n-2}$, $\alpha \in k^*$ に対して

$$\alpha \star \omega := \alpha^s \omega$$

で定まる k^* -作用が入ることに注意しておく. 微分加群 Ω_k^{n-2} にこの k^* -作用を入れたものを $\Omega_k^{n-2}\langle s \rangle$ で表す.

定理 3.1 ([4, Corollary 3.20]). s を, $m \leq s < 2m$ を満たす整数とする. このとき, k^* -作用を保つ写像

$$L_s : \text{CH}_1(A_k(m), n)_{\text{ssup}} \rightarrow \Omega_k^{n-2}\langle s \rangle$$

が存在する. k が代数閉体のとき, この写像は全射である.

写像の構成や証明は, Park ([5]) と類似の議論をすることにより得られる. Park のレギュレータ写像 $R_{2,m}$ と自然な射 (2.1) との合成が L_{m+1} に一致するという意味で, Park

の結果の一般化になっている．レギュレータ写像の定義や詳細は [4] に委ねるとし，ここでは，なぜ，Park が使用した $\sup$ モジュラス条件を，強 $\sup$ モジュラス条件に変更したのかを簡単に解説する．そのために，レギュレータ写像 $L_s : \mathrm{CH}_1(A_k(m), n)_{\mathrm{ssup}} \rightarrow \Omega_k^{n-2}$ が何に依存して定義されているかの解説から始める．

$C \subset (\mathbb{A}^1 \setminus O) \times \square^n$ を曲線， $p \in |\nu_C^*\{x=0\}|$ を閉点とする． C が強 $\sup$ モジュラス条件を満たすとすれば，

$$\nu_C^*(D \times (\mathbb{P}^1)^n) \leq \nu_C^*(\mathbb{A}_k^1 \times F_l)$$

を満たすような (C に依存した) 整数 l が存在する．レギュレータ写像 L_s は，各閉点 p に対して，(C に依存した) 整数 l を用いて定まる $\mathbb{A}^1 \times (\mathbb{P}^1)^n$ 上の $n-1$ 次微分形式 ω_l の， p における留数 $\mathrm{Res}_p(\nu_C^*\omega_l)$ を利用して具体的に定義される．レギュレータ写像の存在の証明は，次の二つのステップで行われる：

- i) L_s は， l に取り方に依存しない．よって，射 $z_1(A_k(m), n)_{\mathrm{ssup}} \rightarrow \Omega_k^{n-2}$ を定める．
- ii) この射は， $\mathrm{CH}_1(A_k(m), n)_{\mathrm{ssup}} \rightarrow \Omega_k^{n-2}$ を誘導する．

ii) を示すには，曲面 $W \in z_2(A_k(m), n+1)_{\mathrm{ssup}}$ に対して， $L_s(\partial W) = 0$ を証明すればよい．その証明の中で，留数写像の相互法則を利用する．今回利用した相互法則は以下である：

定理 3.2 ([7, Theorem 4.2.15]).

- (1) W を k 上の曲面とし， $p \in W$ を閉点とする．このとき，曲面 W 上の点 p を含む曲線 C に沿った留数 $\mathrm{Res}_{W>C>p}$ の和について，

$$\sum_{W>?>p} \mathrm{Res}_{W>?>p} = 0.$$

- (2) C を k 上固有な曲線とする．このとき，曲線 C 上の点 p に沿った留数 $\mathrm{Res}_{C>p}$ の和について，

$$\sum_{C>?} \mathrm{Res}_{C>?} = 0.$$

W が強 $\sup$ モジュラス条件を満たすことから，レギュレータ写像の計算において一律に同じ添え字 l を選ぶことができるため，同じ微分形式の和として書くことができ，定理 3.2 (2) を利用して $L_s(\partial W) = 0$ を証明することができる．

強 $\sup$ モジュラス条件を $\sup$ モジュラス条件に変更しても，同様の議論を途中まで行うことができる． C が $\sup$ モジュラス条件を満たすとき，ヴェイユ因子の不等式

$$\nu_C^*(D \times (\mathbb{P}^1)^n) \leq \sup_{1 \leq l \leq n} \nu_C^*(\mathbb{A}_k^1 \times F_l)$$

が成り立つことから，左辺の $[p]$ の係数を n_p とすれば，

$$n_p[p] \leq \nu_C^*(\mathbb{A}_k^1 \times F_l)$$

を満たすような (p に依存した) 添え字 l が存在する. レギュレータ写像 L_s は, 各閉点 p に対して, (p に依存した) 添え字 l を用いて定まる $\mathbb{A}^1 \times (\mathbb{P}^1)^n$ 上の微分形式 ω_l の, p における留数 $\text{Res}_p(\nu_C^* \omega_l)$ を利用して具体的に定義することができる.

この場合, 大部分の証明はうまくいくが, 曲面 W に対して, 等式 $L_s(\partial W) = 0$ を証明することができない. これは, 各点 p に依存して添え字 l が定まるため, 同じ微分形式の和になっていないことから, 定理 3.2 (2) を利用することができないのが原因である. 局所的には添え字をそろえることができるが, 全体で添え字をそろえることができない. これが, 強 sup モジュラス条件に変更した理由である.

注意. 定理 3.1 のレギュレータ写像は, sum モジュラス条件に対して考えることはできず, この sum モジュラス条件を用いた加法的高次チャウ群の構造を調べるには, 別のアプローチが必要だと思われる.

謝辞

RIMS 研究集会「代数的整数論とその周辺 2017」にて講演の機会をくださいました世話人の角皆先生, 山崎先生, 水澤先生に感謝いたします.

References

- [1] Bloch, S., Esnault, H., An additive version of higher Chow groups, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **36** (2003), No. 3, 463–477.
- [2] Hesselholt, L., K -theory of truncated polynomial algebras, *Handbook of K-theory*, Vol. **1**, 71–110, Springer, Berlin, 2005.
- [3] Krishna, A., Park, J., Moving lemma for additive higher Chow groups, *Algebra Number Theory* **6** (2012), No. 2, 293–326.
- [4] Onoda, M., A Regulator Map for 1-cycles with Modulus, *Kodai Math. J.* **41** (2018), No. 1, 167–200.
- [5] Park, J., Regulators on additive higher Chow groups, *Amer. J. Math.* **131** (2009), no. 1, 257–276.
- [6] Rülling, K., The generalized de Rham-Witt complex over a field is a complex of zero cycles, *J. Algebraic Geom.* **16** (2007), No. 1, 109–169.
- [7] Yekutieli, A., An explicit construction of the Grothendieck residue complex, With an appendix by Pramathanath Sastry. *Astérisque* No. **208** (1992), 127 pp.