

氏 名	近 藤 亮 司 こん どう りょう じ
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 287 号
学位授与の日付	昭 和 45 年 1 月 23 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	On potential operators for recurrent Markov chains (再帰的マルコフ連鎖のポテンシャル作用素について)
論文調査委員	(主 査) 教 授 吉 田 耕 作 教 授 松 浦 重 武 教 授 吉 沢 尚 明

論 文 内 容 の 要 旨

マルコフ過程とポテンシャル論との関連については古くは1930年代に研究があるが、近年にいたり確立過程論における見本程過の研究が進むにつれてこの理論は著しく発展した。まず角谷によってブラウン運動とニュートンポテンシャルの関連が明らかにされたのに始まり Doob, Feller, Kac らによって重要な基本的結果が得られた。さらに Hunt は十分一般のマルコフ過程のクラスとポテンシャル論との関係の一般論をうちたてた (1957—1958)。これはそれ自身、古典的理論を総括的に含む新しいポテンシャル論の建設でありその後のマルコフ過程の研究に大きな影響をあたえた。Hunt の理論において特にポテンシャル論的に重要な意味をもつ結果の一つに次のものがある。“マルコフ半群 P_t に対し作用素 $V = \int_0^\infty P_t dt$ が存在するとき V をポテンシャル作用素という。 V はポテンシャル論における完全最大値の原理をみたすが、逆にある正則条件のもとで完全最大値の原理をみたす作用素 V に対してマルコフ半群 P_t が一意的に存在し、 $V = \int_0^\infty P_t dt$ と表現できる。”ところで一次元や二次元のブラウン運動など、いわゆる再帰性をもったマルコフ過程では $\int_0^\infty P_t dt$ は発散するので上のポテンシャル作用素 V は存在しない。これにかかわるものとしては、例えば二次元ブラウン運動では対数ポテンシャルを用いればよいことはよく知られており、二次元ブラウン運動の研究に欠かすことのできない道具となっている。そこで一般の再帰的マルコフ過程に対してもポテンシャル作用素を定義し、その性質をしらべることは興味があり、又理論上も重要なことである。この点に関しては Spitzer, Kemeny-Snell, Orey らによって色々研究されているが、申請者はこの問題を連続時間径数のマルコフ連鎖の場合について取り組み、ほぼ完全な解決をあたえた。

まず主論文(1)は再帰的マルコフ連鎖 (時間径数は常に連続な場合のみ考える) に関するポテンシャル作用素の定義、その存在及びその基本的性質に関するものである。非再帰のときのポテンシャル作用素 $V = \int_0^\infty P_t dt$ は任意の有界な台をもつ (状態空間上の) 実関数 f に対し

(1) $(I - P_t) V f = \int_0^\infty P_s f ds, t > 0, (I$ は恒等作用等) をみたし、又この条件によって V は一意的に定まるので条件(1)を V の定義に採用してもよい。そこで再帰的な場合も条件(1)をポテンシャル作用素 V の定

義にしたいのであるが、そのためには(1)がなりたつ f のクラスを制限しなければならない。この f のクラスとしては、有界な台をもつ実関数で P_t の不変測度 μ に関し $\int f(x) \mu(dx) = 0$ となるものの全体 N をとる。すなわち再帰的マルコフ連鎖のポテンシャル作用素とは、 N 上の作用素 V で条件(1)をみたすものと定義する。主論文(1)の主要な結果は次の二点を示したことである。

- (i) 再帰的マルコフ連鎖に対しそのポテンシャル作用素がある自然な同値をのぞいて一意的に定まる。
- (ii) 再帰的マルコフ過程はその不変測度とそのポテンシャル作用素によって一意的に決定される。

そこで当然次の問題はポテンシャル作用素の特性づけ；すなわちある作用素 R が再帰的マルコフ連鎖のポテンシャル作用素となっている条件を R の定性的条件であたえ、その性質をもつ作用素 R から再帰的マルコフ連鎖を構成することであろう。この問題が主論文(2), (3)でほぼ完全に解決された。まず(2)ではこの定性的条件としてポテンシャル論的なある種の最大値原理である semi-complete maximum principle をとればよいこと及び R の定義に本質的に介在する測度（これは出来あがったマルコフ連鎖の不変測度となるべきものである）が有限のとき再帰マルコフ連鎖が構成できることがしめされた。さらに(3)ではこの速度が有限でないときに機成の問題を一層追求し、再帰的マルコフ連鎖が構成できるための一つの十分条件が示された。

論文審査の結果の要旨

申請者は主論文(1), (2), (3)において再帰マルコフ連鎖のポテンシャル作用素の存在、その特質、及びポテンシャル作用素から再帰的マルコフ連鎖の構成の問題について論じ、ほぼ完全な解決を得た。こうした研究がマルコフ過程論にとっていかに重要であるかは、近年のマルコフ過程の研究がポテンシャル論との関連においていかに発展をとげたかということを見れば明らかであるが、又逆にポテンシャル論や作用素論にも新風をふきこむことになるであろう。上の諸問題は主として米国の Spitzet, Kemeny-Snell, Orey, などによって研究され申請者の研究の動機になったのであるが、これらの研究においては時間径数は常に離散的な場合であった。ところで申請者は時間径数が連続な場合をあつかっており、その点で完全に新しい結果ということができる。確立論研究者によく知られているように、時間径数が連続な場合には離散の場合とくらべて根本的に異なった多くの困難が生ずる一方、より強力な解析の手段が適用できてより深く解明できることが多々生ずる。その点で申請者がまず直面した困難点はマルコフ連鎖の実現をどのようにとるかの点であったと思われる。申請者が問題としている諸問題は、マルコフ連鎖とマルコフ半群とを同一視するかぎりすべて解析的な問題として定式化され、その結果も純解析的に（乃至作用素論的に、すなわち確率論の言葉を用いないで）のべうるものである。しかし申請者の研究に見られるように、それらをマルコフ連鎖という一つの確率過程（＝無限次元空間上の測度）をとおして理解し統一的に研究するのが今日の確率論の方法である。この種の問題における確率論的方法の一番基本的なものは、いわゆる強マルコフ性というマルコフ過程の一性質を縦横に駆使することにある。より一般的にいうと解析的な関係性は確率過程の平均的諸量の関係式でありそれを直接確率過程の見本過程の操作（これは無限次元空間の上の操作である）を通じてしらべるのが近代確率論の基本的方法の一つである。この強マルコフ性は、離散時間の場合にはなんら困難なく使いうるが、連続時間のときそれを保障することは色々な困難をとまなう。

申請者はマルコフ半群の強マルコフ過程としての実現として Ray process を用いている。これは D. Ray によって導入されたものであるが、今日のように実用的になったのは主として国田・野本・渡辺（殷）など日本の研究者に負っている。そしてこの強マルコフ過程をもとにして上の諸問題が確率論的方法によって解かれているのである。

主論文(1)では、まず再帰的マルコフ連鎖の不変速度の存在と一意性が示されその表現がえられている。この不変測度を用いてポテンシャル作用素が定義されその存在が示されている。

主論文(2)ではポテンシャル作用素が semi-complete maximum principle をみたすこと及び不変測度が有限のときポテンシャル作用素から再帰マルコフ連鎖が逆に構成できることが示されている。

不変測度が有限でないときの構成の問題は、その完全な解決は困難であるが、主論文(3)でその十分条件がえられている。しかしその条件は申請者が例示しているように必要ではない。けれどもそれがほぼ必要条件に近いことは離散時間のときは申請者の条件が必要十分になること（この結果は阪市大・大島氏 (Osaka J. Math. 6, (1969)によって示された）より知られる。

かくして申請者はこの興味ある問題にはほぼ完全な解決をあたえたのであり、これはマルコフ過程とポテンシャル論に対する重要な寄与である。又申請者はこれらの論文からも十分察せられるとおり、単に確率論のみならずポテンシャル論にも深い造詣をもち、それがこの優れた研究を生んだ一つの要因であろう。

よって、本論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。