

# 対称群の group association scheme の intersection numbers による特徴付け

富山正人 (九州大学大学院数理学研究科)

山崎則男 (九州大学大学院数理学研究科)

## 1 序

association scheme の研究において特に重要視されている問題の 1 つに既知の association scheme の intersection numbers  $\{p_{i,j}^k\}_{i,j,k}$  による特徴付け問題がある。これまでこの問題に関して、P- and Q- polynomial association scheme の場合には多くの結果が得られている。(まだ全ての既知の P- and Q- polynomial association scheme について解決している訳ではない。) しかし、P- and Q- polynomial association scheme 以外のものについてはまだほとんどなされていない。一昨年、本研究者の一人である富山正人により、4 次対称群と 5 次交代群の group association scheme (2 章で定義する。) において解決した。([7] を参照。) 具体的に述べると、5 次交代群の場合はその intersection numbers を持つ association scheme はそれに限り、4 次対称群の場合はそれ以外にも 2 つの association scheme が存在する。その 2 つはこれまで知られていなかった association scheme である。(平成 5 年 3 月の数理解析での代数的組合せ論研究集会にて講演発表。) なお、次数 3 以下の対称群、次数 4 以下の交代群の場合は自明である。

group association scheme の intersection numbers による特徴付け問題は有限群における「指標表を 1 つ与えた時、それを持つ群を決定せよ。」という問題と類似した問題と言える。群の指標表を与えることとその群の group association scheme の intersection numbers を与えることは同じことである。(計算公式がある。) ただし、上の 2 つの問題は全く異なる問題である。例えば dihedral group  $D_8$  と quaternion group  $Q_8$  のように、群としては非同型でも、group association scheme が同型になるような例もある。一方、4 次対称群は指標表から群としては特徴付けされているが、4 次対称群の group association scheme と同じ intersection numbers を持つ association scheme は 3 つある。

本研究の結果は次の通り。

### 主定理 ([8]、[9])

次数 5 以上の対称群の group association scheme と全く同じ intersection numbers を持つ association scheme はそれに限る。

## 2 定義、用語、準備

### 定義

有限集合  $X$  と  $X$  上の  $d+1$  個の関係  $R_i$  ( $i = 0, 1, \dots, d$ ) の組  $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  で以下の 4 条件 (i)–(iv) を満たすものを association scheme と呼ぶ。

- (i)  $R_0 = \{(x, x) : x \in X\}$ 。
- (ii)  $X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d$  かつ  $R_i \cap R_j = \emptyset$  ( $i \neq j$ )。
- (iii) 各  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$  に対し、 ${}^tR_i = \{(x, y) : (y, x) \in R_i\}$  と定義すると  ${}^tR_i = R_j$  となる  $j \in \{0, 1, \dots, d\}$  がある。
- (iv) 各  $i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}$  に対して、  
 $|\{z \in X : (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}|$  は  $(x, y) \in R_k$  のもとで  $x, y$  のとりかたによらず  $i, j, k$  のみにより定まる定数  $p_{ij}^k$  となる。

この  $p_{ij}^k$  達を intersection numbers と呼ぶ。

さらに、次の条件 (v) を満たすものを commutative association scheme と呼び、条件 (vi) を満たすものを symmetric association scheme と呼ぶ。

- (v) 各  $i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}$  に対して、 $p_{ij}^k = p_{ji}^k$ 。
- (vi) 各  $i \in \{0, 1, \dots, d\}$  に対し、 ${}^tR_i = R_i$ 。

### 定義

$G$  を任意の有限群、 $C_0 = \{id\}, C_1, \dots, C_d$  を  $G$  の共役類全体とする。 $G$  の上の関係  $R_i$  ( $i = 0, 1, \dots, d$ ) を  $R_i = \{(x, y) : yx^{-1} \in C_i\}$  で定義する。

このとき  $\mathcal{X}(G) = (G, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  は commutative association scheme になる。これを群  $G$  の group association scheme と呼ぶ。

$n$  を 5 以上の自然数、 $S_n$  を  $n$  次の対称群とする。又、 $\Lambda = \Lambda(n)$  を自然数  $n$  の分割全体の集合とする。 $S_n$  の共役類と  $\mathcal{X}(S_n)$  の関係を  $\Lambda$  の元で番号付けする事にし、 $\mathcal{X}(S_n) = (S_n, \{R_\lambda^*\}_{\lambda \in \Lambda})$  を  $S_n$  の group association scheme、 $\mathcal{X} = (X, \{R_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda})$  を  $\mathcal{X}(S_n)$  と同じ intersection numbers を持つ association scheme とする。ここで、 $\mathcal{X}(S_n)$  も  $\mathcal{X}$  も symmetric association scheme となる事が intersection numbers からすぐにわかる。

$x \in X, u \in S_n, \lambda \in \Lambda$  について、

$$\begin{aligned} R_\lambda(x) &= \{y \in X : (x, y) \in R_\lambda\} \\ R_\lambda^*(u) &= \{v \in S_n : (u, v) \in R_\lambda^*\} \end{aligned}$$

としよう。すると  $R_\lambda^*(id) = C_\lambda$  (分割  $\lambda \in La$  に対応する  $S_n$  の共役類) となる。

以降  $\lambda = (1, \dots, 1, i_1, \dots, i_m) \in \Lambda$  (ただし、 $i_1, i_2, \dots, i_m \geq 2$ ) について  $\lambda = (i_1, \dots, i_m)$  と書くことにする。例えば互換に対応する  $S_n$  の共役類は  $R_{(2)}^*(id)$  となる。又、上の  $\lambda$  について

$$\varphi(\lambda) = \sum_{s=1}^m (i_s - 1)$$

とする。

$\Gamma = (X, R_{(2)})$  と  $\Gamma^* = (S_n, R_{(2)}^*)$  を 2 つのグラフとしよう。目標は  $\mathcal{X}$  と  $\mathcal{X}(S_n)$  が同型になることを示すことであるが、次の命題が容易に得られる事により  $\Gamma$  と  $\Gamma^*$  が同型である事を示せば良いことになる。

### 命題

$$\Gamma \simeq \Gamma^* \implies \mathcal{X} \simeq \mathcal{X}(S_n)$$

$S_n$  の元

$$u = (\alpha_1^{(1)} \cdots \alpha_{i_1}^{(1)}) (\alpha_1^{(2)} \cdots \alpha_{i_2}^{(2)}) \cdots (\alpha_1^{(m)} \cdots \alpha_{i_m}^{(m)}) \in R_{(i_1, i_2, \dots, i_m)}^*(id)$$

について、

$$u(\alpha_k^{(s)}) = (\alpha_1^{(1)} \cdots \alpha_{i_1}^{(1)}) \cdots (\alpha_1^{(s)} \cdots \alpha_{k-1}^{(s)} \alpha_{k+1}^{(s)} \cdots \alpha_{i_s}^{(s)}) \cdots (\alpha_1^{(m)} \cdots \alpha_{i_m}^{(m)}).$$

$$u[(\alpha_h^{(s)} \cdots \alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)} \cdots \alpha_{h-1}^{(s)})] \\ = (\alpha_1^{(1)} \cdots \alpha_{i_1}^{(1)}) \cdots (\alpha_h^{(s)} \cdots \alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)} \cdots \alpha_{h-1}^{(s)}) \cdots (\alpha_1^{(m)} \cdots \alpha_{i_m}^{(m)}).$$

とする。 ( $1 \leq s \leq m$ ,  $1 \leq k \leq i_s$ ,  $1 \leq f \leq i_s - 1$ ,  $1 \leq h \leq i_s$ )

例えば、

$$u = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) \in R_{(2,4)}^*(id)$$

のとき、

$$\begin{aligned} u(2) &= (1\ 3\ 4)(5\ 6) \\ u(5) &= (1\ 2\ 3\ 4) \\ u[(2\ 3)(4\ 1)] &= (2\ 3)(4\ 1)(5\ 6) \end{aligned}$$

となる。

ここで、 $u \in R_{(i_1, \dots, i_m)}^*(id)$  とし、 $v \in R_\mu^*(id)$  とする。ただし、 $\mu \in \Lambda$ 、 $\varphi(\mu) \leq \varphi(i_1, \dots, i_m)$  とする。このとき  $(u, v) \in R_{(2)}^*$  となるならば、 $v = u(\alpha_k^{(s)})$  となるかとなるか  $v = u[(\alpha_h^{(s)} \cdots \alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)} \cdots \alpha_{h-1}^{(s)})]$  どちらかである事が容易にわかる。

( $1 \leq s \leq m$ ,  $1 \leq k \leq i_s$ ,  $1 \leq f \leq i_s - 1$ ,  $1 \leq h \leq i_s$ )

よって次の補題が得られる。

## 補題

- (1)  $\lambda = (i_1, \dots, i_m) \in \Lambda$  とし、 $\mu \in \Lambda$  は  $\varphi(\mu) \leq \varphi(\lambda)$  を満たすとする。  
このとき  $p_{(2), \mu}^\lambda \neq 0$  となる必要十分条件は  $\varphi(\mu) = \varphi(\lambda) - 1$  であり、かつ次の条件のうち1つが成り立つ事である。

- (i)  $\mu = (i_1, \dots, i_{s-1}, i_s - 1, i_{s+1}, \dots, i_m)$  ( $1 \leq s \leq m$ ,  $i_s \geq 3$ )
- (ii)  $\mu = (i_1, \dots, i_{s-1}, i_{s+1}, \dots, i_m)$  ( $1 \leq s \leq m$ ,  $i_s = 2$ )
- (iii)  $\mu = (i_1, \dots, i_{s-1}, f, i_s - f, i_{s+1}, \dots, i_m)$   
( $1 \leq s \leq m$ ,  $i_s \geq 4$ ,  $2 \leq f \leq i_s - 2$ )

- (2)  $\lambda \in \Lambda$  とする。このとき、 $(x, y) \in R_\lambda$  となる任意の  $x, y \in X$  に対して、 $\partial(x, y) = \varphi(\lambda)$  となる。(  $\partial$  はグラフ  $\Gamma$  上の距離。 ) 特に、 $\Gamma$  は直径  $d(\Gamma) = n - 1$  の連結な2部グラフとなる。

上の補題 (2) により、例えば  $x, y \in \Gamma$  に対して、

$$\partial(x, y) = 2 \iff (x, y) \in R_{(2,2)} \cup R_{(3)}$$

となる。これは、対称群が 3 互換の共役類を持つ事を意味している。

### 3 Spherical Representation

この章では、主定理を証明するための主な道具となる association scheme の spherical representation (association scheme の球面への埋め込み) を紹介する。

#### 命題

$G$  を一般の有限群、 $\chi$  を  $G$  の 1 つの既約指標とする。又、 $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$  を group association scheme  $\mathcal{X}(G)$  と全く同じ intersection numbers を持つ commutative association scheme とする。又、 $\mathcal{E}$  を  $|X|$  次元エルミート空間、 $\langle \cdot, \cdot \rangle$  を標準内積とする。このとき、次を満たす写像  $- : X \rightarrow \mathcal{E}$  が存在する。

$$(x, y) \in R_i \iff \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \chi(a_i)$$

ここで、 $a_i$  は共役類  $C_i$  の代表元。

特に、 $\chi$  が実指標ならば、 $\mathcal{E}$  は  $|X|$  次元ユークリッド空間としてよい。

#### 証明

一般に  $\mathcal{X}$  の Bose-Mesner 代数には、次のような原始冪等元が存在する。  
([1] の Chapter II.7 を参照。)

$$E = \frac{1}{|X|} \sum_{i=0}^d \chi(id) \chi(a_i) A_i.$$

ただし、 $A_i$  は  $R_i$  における隣接行列。これより、 $\bar{x} = \sqrt{\frac{|X|}{\chi(id)}} E \hat{x}$  ( $\hat{x}$  は  $y$  成分が  $\delta_{x,y}$  である長さ  $|X|$  の列ベクトル。) となる写像  $- : X \rightarrow \mathcal{E}$  が上を満たすものである。  $\square$

次数  $n$  の対称群は  $n$  点集合上の 2 重可移置換群であるので、各分割  $\lambda = (i_1, \dots, i_s) \in \Lambda$  に対応する共役類について、

$$\chi(\lambda) = n - 1 - \sum_{s=1}^m i_s$$

となる実指標が存在する。本研究ではこれについての spherical representation  $\tau : X \rightarrow \mathcal{E}$  ( $\mathcal{E}$  は  $|X|$  次元ユークリッド空間) が主定理の証明のための強力な武器となる。

## 4 証明の概略

以下、証明の概略を述べる。

(Step 1.)

グラフ  $\Gamma = (X, R_{(2)})$  内に  $(x_1, x_3) \in R_{(3)}$ ,  $(x_2, x_4) \in R_{(2,2)}$  となるような 4 角形  $x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 \sim x_1$  は存在しない。

この証明は主定理の証明の中でも最も複雑な部分となっている。( [8] を参照。) なお 3 章で述べた spherical representation がここでも強く効いている。

以下は [9] を参照。

(Step 2.)

任意の点  $x \in X$  に対し、グラフ  $\Delta_x = (R_{(2)}(x), R_{(2,2)})$  は Johnson graph  $J(n, 2)$  と同型となる。

これは、グラフ  $\Gamma$  の点の近傍の association scheme としての構造が、 $\Gamma^*$  のそれと一致する事を意味する。なお、 $J(n, 2)$  はパラメーター

$$(p_{(2),(2)}^{(0)}, p_{(2),(2,2)}^{(2)}, p_{(2),(2,2,2)}^{(2,2)}, p_{(2),(2,3)}^{(3)}) = \left( \binom{n}{2}, \binom{n-2}{2}, \binom{n-4}{2}, \binom{n-3}{2} \right)$$

の strongly regular graph であり、このパラメーターによる特徴付けの結果 ([2],[3],[4],[5],[6] を参照) を証明で使う。この証明のために次の spherical representation の補題が重要である。

## 補題

$\Gamma$  における4角形  $x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 \sim x_1$  が  $(x_1, x_3) \in R_{(2,2)}$  と  $(x_2, x_4) \in R_{(2,2)}$  を満たすならば、 $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 + \bar{x}_3 - \bar{x}_4 = \bar{0}$  となる、ただし、 $\bar{0}$  は零ベクトル。

以降  $X$  の1点を固定し、それを  $id$  と名付ける。

(Step 3.) [帰納法]

$0 \leq l \leq d(\Gamma)$  に対し、次の条件  $T(l)$  を満たす。

条件  $T(l)$  :

- (i)  $\varphi(i_1, \dots, i_m) \leq l$  を満たす  $(i_1, \dots, i_m) \in \Lambda$  に対して、 $R_{(i_1, \dots, i_m)}(id)$  の点と  $R_{(i_1, \dots, i_m)}^*(id)$  の点を同一視できる。
- (ii)  $\Gamma$  の誘導部分グラフ  $(\cup_{\varphi(i_1, \dots, i_m)=0}^l R_{(i_1, \dots, i_m)}(id), R_{(2)})$  と  $\Gamma^*$  の誘導部分グラフ  $(\cup_{\varphi(i_1, \dots, i_m)=0}^l R_{(i_1, \dots, i_m)}^*(id), R_{(2)}^*)$  が同型になる。  
つまり、 $\varphi(i_1, \dots, i_m) \leq l$  となっている  
 $\Gamma$  の点  $u = (\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_{i_1}^{(1)}) \dots (\alpha_1^{(m)} \dots \alpha_{i_m}^{(m)}) \in R_{(i_1, \dots, i_m)}(id)$  と  $\partial(id, v) = \partial(id, u) - 1$  となる  $\Gamma$  の点  $v$  に対し、 $u \sim v$  となる必要十分条件が、 $v = u(\alpha_k^{(s)})$  となるか  $v = u[(\alpha_h^{(s)} \dots \alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)} \dots \alpha_{h-1}^{(s)})]$  となることである。  
 $(1 \leq s \leq m, 1 \leq k \leq i_s, 1 \leq f \leq i_s - 1, 1 \leq h \leq i_s)$
- (iii)  $\varphi(i_1, \dots, i_m) \leq l + 1 \leq d(\Gamma)$  となる  
 $u = (\alpha_1^{(1)} \dots \alpha_{i_1}^{(1)}) \dots (\alpha_1^{(m)} \dots \alpha_{i_m}^{(m)}) \in R_{(i_1, \dots, i_m)}^*(id)$  に対し、次が成り立つ。  
 $(1 \leq s, s' \leq m, 1 \leq k, k', h \leq i_s, 1 \leq k'' \leq i_{s'}, 2 \leq f \leq i_s - 2)$ 
  - (iiia)  $(u(\alpha_k^{(s)}), u(\alpha_{k+1}^{(s)})) \in R_{(3)} \quad (i_s \geq 3 \text{ のとき})$
  - (iiib)  $(u(\alpha_k^{(s)}), u(\alpha_{k'}^{(s)})) \in R_{(2,2)} \quad (i_s \geq 4, |k - k'| \neq 1, i_s - 1 \text{ のとき})$
  - (iiic)  $(u(\alpha_k^{(s)}), u(\alpha_{k''}^{(s')})) \in R_{(2,2)} \quad (s \neq s' \text{ のとき})$
  - (iiid)  $(u(\alpha_k^{(s)}), u[(\alpha_h^{(s)} \dots \alpha_{h+f-1}^{(s)})(\alpha_{h+f}^{(s)} \dots \alpha_{h-1}^{(s)})]) \in R_{(3)} \quad (i_s \geq 4, 2 \leq f \leq i_s - 2 \text{ のとき})$

条件  $T(d(\Gamma))$  の (ii) は正にグラフ  $\Gamma$  と  $\Gamma^*$  が同型であるという主張である。

帰納法において (ii) の証明については次の補題を使う。(これは spherical representation より容易に得られる。)

### 補題

$x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 \sim x_1$  を  $\Gamma$  における4角形で、 $(x_1, x_3) \in R_{(2,2)}$ 、 $(x_2, x_4) \in R_{(2,2)}$  を満たすものとする。又、 $y \in X$  を  $y \not\sim x_1$ 、 $\partial(y, x_2) = \partial(y, x_4) = 2$  を満たす点とする。このとき次が成り立つ。

- (1)  $(y, x_2) \in R_{(3)}$  か  $(y, x_4) \in R_{(3)}$  ならば  $y \sim x_3$  となる。
- (2) もし  $x_4 \sim z \sim y$ 、 $x_2 \not\sim z$ 、 $(x_1, z) \in R_{(2,2)}$  となる点  $z \in X$  があるならば  $y \sim x_3$  となる。

同じく (iii) については次の補題を使う。(これも spherical representation より容易に得られる。)

### 補題

$x_1 \sim x_2 \sim x_3 \sim x_4 \sim x_1$  を  $\Gamma$  における4角形で、 $(x_1, x_3) \in R_{(2,2)}$ 、 $(x_2, x_4) \in R_{(2,2)}$  を満たすものとする。 $x_1 \sim x_2 \sim x_5 \sim x_6 \sim x_1$  を  $\Gamma$  における4角形とする。このとき次が成り立つ。

- (1)  $(x_4, x_6) \in R_{(3)}$  ならば  $(x_3, x_5) \in R_{(3)}$ 。
- (2)  $(x_4, x_6) \in R_{(2,2)}$  ならば  $(x_3, x_5) \in R_{(2,2)}$ 。

### 参考文献

- [1] E. Bannai and T. Ito, *Algebraic Combinatorics I*, Benjamin-Cummings, California, 1984.
- [2] L. C. Chang, "The uniqueness and nonuniqueness of the triangular association schemes", *Sci. Record. (New Ser.)* **3** (1959), 604-613.

- [3] L. C. Chang, "Association schemes of partially balanced designs with parameters  $v = 28$ ,  $n_1 = 12$ ,  $n_2 = 15$  and  $p_{11}^2 = 4$ ", Sci. Record. (New Ser.) **4** (1960), 12-18.
- [4] W. S. Connor, "The uniqueness of the triangular association scheme", Ann. Math. Stat. **29** (1958), 262-266.
- [5] A. J. Hoffman, "On the uniqueness of the triangular association scheme", Ann. Math. Stat. **31** (1960), 492-497.
- [6] S. S. Shrikhande, "On a characterization of the triangular association scheme", Ann. Math. Stat. **30** (1959), 39-47.
- [7] M. Tomiyama, "Characterization of the group association scheme of  $A_5$  by its intersection numbers", to appear in J. Math. Soc. Japan.
- [8] M. Tomiyama and N. Yamazaki, "On a condition of the group association scheme of the symmetric group", in preparation.
- [9] M. Tomiyama and N. Yamazaki, "Characterization of the group association scheme of the symmetric group", preprint.

富山正人

九州大学大学院数理学研究科数理学専攻

〒812-81 福岡市東区箱崎6丁目10番1号

e-mail : tomiyama@math.kyushu-u.ac.jp

山崎則男

九州大学大学院数理学研究科数理学専攻

〒812-81 福岡市東区箱崎6丁目10番1号

e-mail : norio@math.kyushu-u.ac.jp