

三次元の双有理幾何学について

京大 理 藤 木 明

X, Y を 2 次元の複素多様体とする。 $f: X \rightarrow Y$ を, surjective birational morphic morphism とする時, f は, σ -process 有限回の積に分解できる。これが, 曲面の双有理幾何学の中心的事実である。この事実により, 次の基本的な結果が証明される。 1. 曲面の正規(孤立)特異点の解消は極小なものに限れば一意である。 2. X をコンパクトな曲面とする。 $P_n = \dim H^0(X, \mathcal{O}(nK))$, (K は X の標準因子) とする時, 次の (1) と (3) は同値である。 (1) X と双有理型同値な曲面の中に「極小」なものが唯一つ存在する。 (3) X が代数的で, $\forall n \geq 0$ に対し $P_n = 0$ が成り立つ。 上の事実の証明の方法を直接 3 次元に拡張するだけでは, 確定的な結果は, 何一つ得られないことをまず示そう。 するために記号と, 基本的事実を述べよう。 X を複素多様体, A を部分多様体とする時, $N_{A/X}$ は, A の X 内での正規法ベクトルを表す。 (1) $\sigma: X \rightarrow Y$ を, 点 P (resp. 非特異曲線 C) による σ -monoidal 変換とし, $A = \sigma^{-1}(P)$ (resp. $\sigma^{-1}(C)$) とおく。この時 A は,

$\mathbb{P}^2$ (resp. C 上の $\mathbb{P}^1$ バンドル) に同型で, $N_{X/K} \cong -H_A$ (resp. $N_{X/K}|_{\sigma^{-1}(Q)} = -H_{\sigma^{-1}(Q)}$, $Q \in C$)

が成り立つ。ここで, $H_A, H_{\sigma^{-1}(Q)}$ は, hyperplane bundle を表わす。

(2) 逆に上のようなら, $A \subset X$ が存在すれば, X と A は, 1 つのようた変換で, ある Y から得られる。(3) (1) で $C \cong \mathbb{P}^1$ としよう。 $N_{C/Y} \cong mH_C$

$\oplus nH_C$. $m \geq n$ とすると, $A \cong \sum_{m-n} \Sigma_k$ は, degree k の Hirzebruch surface.

(4). (3) で, $N_{X/K} \cong [-C^\infty + mE]_A$. ここで, C^∞, E は, 各々 A の ∞ -section とファイバー。

Lemma 1 $A \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ かつ $N_{X/K} \cong [-D_A]$, (ここで D は A の diagonal)

$\iff N_{C/Y} \cong (-H_C) \oplus (-H_C) \quad //$ これは, (3) (4) を組み合わせ

せればよい。この時, (2) より, $T: X \rightarrow Z$ で, $T|_{X-A}$ は, 同型かつ

$T|_A$ は, A の, もう一方のファイバリングに ~~一致~~ 一致するものが

存在する。 $T = T \circ \sigma^{-1}: Y \rightarrow Z$, $Z = T(Y)$ と記す。以下証明は全部略証。

Lemma 2 X はコンパクト, $C \in \mathbb{P}^1$ と同型な, submanifold とする時, $N_{C/X}$

$\cong \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$, $m \geq n \geq -1$ なら, $\forall n$ に対し, $P_n = 0$. ($\mathbb{P}^1$ 上 $\mathcal{O}(m) = H_C$)

pf) adjunction formula により, X 内の非特異曲線 C に対し, $\deg(K_X|_C) =$

$\deg K_C + \deg N_{C/X}$. 今, ある整数 n_0 に対し $P_{n_0} > 0$ とする。 $\deg N_{C/X} \geq -\deg K_C$

とすれば, $\deg(n_0 K_X|_C) < 0$. すなわち C は $|n_0 K_X|$ の fixed component

または, base locus に含まれる。ところが小平[1]により, もし, $\dim$

$H^1(C, N_{C/X}) = 0$ なら, vector space $H^0(C, N_{C/X})$ が parametrized され, C の X 内

での変形族が存在する。 C' と C と異なる同じ族の nonsingular curve

とする時やはり, $\deg(K_X|_C) < 0$ であるから, C' も $|n_0 K_X|$ の member の

support に含まれる。 $\therefore$ 以上の変形族が, C の近

傍全部で動けば、これは不可能である。従って $P_n = 0 \quad \forall n$. lemma
 の条件より、上で述べた仮定がすべてであるからこの場合も $P_n = 0$.
 同様の議論を用いて、次のことも証明される。 $f: X \rightarrow X'$ を、
 X' の正規孤立特異点 P の resolution とする。 $A = f^{-1}(P)$ とおく。

lemma 3 C は A に含まれる curve で IP' と同型とする。

$N_{C/X} \cong \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$, $m \geq n$ とする時, $n < 0$ が成り立つ。

3次元の場合が, hyperplane cut により、2次元の場合に
 reduce できればよいが、なかなか! どういうまく!! かな!!

$f: X \rightarrow Y$ を、3次元多様体の bimeromorphic morphism とする。 f の例外
 集合 S とは、 f が、 Y の点の近傍で biholomorphic でない点の集合である。

$T = f(S)$ とする。 $\dim S = 2 \quad \dim T \leq 1$ である。 $f|_{X-S}: X-S \rightarrow Y-T$ 。

lemma 4 $\exists T' \subset T$: proper analytic subset, s.t. $f|_{X-f^{-1}(T')}: X-f^{-1}(T') \rightarrow Y-T'$ は、 nonsingular curve ε center とする, monoidal 変換の連続で
 得られる。

(1) まず T から $\dim f^{-1}(t) = 2$ となる有限個の点 ~~を~~^を 除く。~~それらは~~
 次に T の有限個の特異点を除く。 t_0 を残りの任意の点とする。
 t_0 の近傍で、 Y の座標を (y_1, y_2, y_3) , $y_3 = 0$ が T の local equation を
 与えるようにする。この近傍を U とし、 $V = f^{-1}(U)$ とする。 $y_3 \cdot f$
 は、 $\pi^{-1}(U) = V$ から、 unit disc $D = \{y_3 / |y_3| < 1\}$ への map を与える。(Ber
 tini の定理より) $y_3 \cdot f: (y_3 \cdot f)^{-1}(D) \rightarrow D$ は、 maximal rank の map
 としてよい。 $\therefore D' = \{y_3 / 0 < |y_3| < 1\}$. $g = y_3 \cdot f$ とおくと、各

fibre $g'(s)$, $s \in D'$ is nonsingular surface τ , $\phi/g'(s): g'(s) \rightarrow U_s$ is nonsingular surface σ の間の, bimeromorphic morphism τ である。ここで $U_s = \{(y_1, y_2, y_3) | y_3 = s\}$ 。従って, $\phi/g'(s)$ は, 曲面の場合の結果によって, σ -process 有限回の積の形にかける。よって, 一種例外曲線の stability theorem [2] を ϕ に対して用いることにより, ϕ は, $\bigcup_{s \neq 0} U_s$ 上, σ -process の積 $\times \text{id}_{D'}: g'(s) \times D' \rightarrow U_s \times D'$ の形をとることが証明できる。p.e.d.

次に, nonsingular center の monoidal 変換に, 際しての submanifold の ~~法~~ ^法 バンドルの変化を調べる。

lemma 5 X : 3次元多様体, A を非特異超曲面, C を A に含まれる非特異曲線, $\sigma: X_1 \rightarrow X$ を C を中心とする monoidal 変換とする。 $S = \sigma^*(C)$ とする。この時, $(*) N_{A/X_1} = \phi^* N_{A/X} \otimes (N_{S/X_1})^{-1}$, $A_1 = \sigma^*[A]$. pf) A, S, A_1 の ideal の sheaf $\mathcal{I}_A, \mathcal{I}_S, \mathcal{I}_{A_1}$ を表わす時, $\phi^*(\mathcal{I}_A) = \mathcal{I}_S \cdot \mathcal{I}_{A_1}$ なる関係よりたゞちに lemma を得る。[(*) $N_{A/X}, N_{S/X_1}$ をそれぞれ, $[A], [S]$ に訂正し, 右辺は $(\phi^*[A] \otimes [S]^{-1})_{A_1}$ とする。[.] は divisor に対応する line bundle.] 上の証明で C は点でもよい。

corollary 6 i) $A \cong \mathbb{P}^2$ で C が degree d の curve, $N_{A/X} \cong \mathcal{L} H_A$ とすると, $N_{A_1/X_1} \cong (l-d) H_{A_1}$. ii) $A \cong \mathbb{P}^2$ で C が 1 点, $N_{A/X} \cong \mathcal{L} H_A$ とすると, $N_{A_1/X_1} \cong [lF + C_0]_{A_1}$. C_0 は A_1 の 0-section, F は fibre. $A_1 \cong \Sigma_1$ である。 iii) $A \cong \mathbb{P}^1$ -bundle over a curve τ , C が A の general fibre と d 回交わる curve とする。 $N_{A/X}/F = \mathcal{L} F$ とする。 $N_{A_1/X_1}/F_1 = (l-d) F_1$ である。ここで

F, F_i は general fibre.

実は使えそうの事実は, lemma 2.3 の帰結以外に, 11 の $\epsilon = 3$ が見あたらないので, $\epsilon = 2$ の仮定はどちらを採用しても同じである。従って, $f_i: X_i \rightarrow Y$ $i=1, 2$ を, Y の正規孤立特異点 P として, $f_1^{-1}f_2$ も $f_2^{-1}f_1$ も holomorphic である $\epsilon = 11$ と仮定しよう。
 広中の結果により, X_2 に有限個の特異中心の monoidal 変換をほとんどせば, $f_1^{-1}f_2$ の不確定点を除去することが可能である。

各 monoidal 変換を $\sigma_i: X_{i+1} \rightarrow X_i$ で表す。 $i=0, \dots, r$ 。 $X_0 = X_2$ とする。

$\sigma = \sigma_0 \sigma_1 \dots \sigma_r: X_r \rightarrow X_0$ とする時, $f_1^{-1}f_2 \circ \sigma$ が X_r から X_1 への morphism になる。

σ_r の center を $C_r \subset X_{r-1}$ で表わし, $A_r = \sigma_r^{-1}(C_r)$ とおく。混乱を回避するため, X_1 を Z とおく。 $g = f_1^{-1}f_2 \circ \sigma: X_r \rightarrow Z$ とおく。

Proposition 7 $A_r \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ で, $(*)$ $g|_{A_r}$ は, $\sigma_r|_{A_r}$ と別の fibering が, 適当な条件で成り立つ。

$(*)$ $\dim g(A_r) \geq 1$ としてよい。 $\dim g(A_r) = 2$ とする。まず, $g(A_r)$ が nonsingular としよう。すると $A_r \cong g(A_r)$ か, $A \cong \mathbb{P}^1$ で, $g(A_r) \cong \mathbb{P}^2$ かのいずれかである。 g^{-1} の不確定点の 集合 を T で表わす。 $\dim T = 1$ である。

lemma 4 の T' は有限個の点であるから $g(A_r) \cong \mathbb{P}^1$ -bundle あるいは $\cong \mathbb{P}^2$ である。 general line fibre F に対しては, general line L は T' と交わらない。

従って lemma 4 により, F (resp. L) のある近傍で g は nonsingular curve を center とする monoidal 変換の succession とみてもよい。

この時, $T \cap F = \emptyset$ なら $N_{g(A_r)/F} = -H_F$ 。 $T \cap F \neq \emptyset$ なら, corollary 6 を用いて, $N_{g(A_r)/F} = mH_F$ for some $m > 0$ となる。前者の場合は

p.20(2) により, $g(A_r)$ は contract している。すなわち $T: Z \rightarrow Z_1$ は morphism が存在して, T は, $T(g(A_r))$ を center とする monoidal 変換である。 Z_1 は, Y の resolution であるからこれは仮定に矛盾する。後者の場合は Lemma 3 によりおこりえない。 $g(A_r)$ が singular の時は複雑である。としても, このまゝでは攻撃できそうもない。 $\dim g(A_r) = 1$ の時。

$F \in A_r$ の fibre とする時, $g(F) = g(A_r)$ としてよい。さもないければ

X_1 が $X_2 = Z$ を dominate するからである。これは, $A_r \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ の時のみ可能である。

($\odot$) $g(F) = g(A_r) \neq \emptyset$, $g(F)$ は rational. 再び Lemma 4 を用

いれば, $g(A_r)$ の一般点の逆像, 既約成分は nonsingular rational である

から A_r は rational であることが結論される。 Σ_r から curve C への

holomorphic map を f とし, fibre を F とする。 Σ_r の ∞ -section, fibre を C^∞, f

とすると, $F \sim a\gamma + bf$ と書ける。 $\sim$ は linearly equivalent. $F^2 = a^2r + 2ab = 0$

より, $a \neq 0$ なら, $ar + 2b = 0$ この時 F は rational である。 ~~$\frac{1}{r+2b} \frac{f}{\gamma} \Sigma_r \rightarrow C$~~

~~が $\mathbb{P}^1$ -bundle~~ $\star$ Proposition 7 の statement は, 従って 仮定: $X_1 \xrightarrow{f_1} Y$ が, minimal resolution かつ, $f_1^{-1}(p)$ の各既約成分が nonsingular. という条件のもとで成立する。

一般に簡単な resolution では, この事実が成立

する case が多いことに注意する。 f とえば, $g \in \mathbb{C}^3$ の自己

同型で $g: (z_1, z_2, z_3) \mapsto (e^{n_1} z_1, e^{p_1} z_1, e^{q_1} z_2)$ $(n, p) = (n, q) = 1$ で定義される

ものとし, $G = \{g\}$ とする。 $\mathbb{C}^3/G$ は, 原点の image 点, 孤立特異点

をもつ normal analytic space になる。 $\mathbb{C}^3/G$ の resolution は上の性質を

持つ。(修士論文参照)。 Prop. 7 で $g|_{A_r}: A_r \rightarrow g(A_r)$ の fibre が connected

であること証明できる。しかしそれにせよ、これだけでは、なんの興味もなないことである。次に A_{r-1} の X_r での proper transform $B = \sigma_r^{-1}[A_{r-1}]$

を調べよう。まず、 σ_r の center $C_r \subset A_{r-1}$ の時を考える。 A_r が $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ であつたから、 $C_r \cong \mathbb{P}^1$ であり、 $N_{C_r/A_{r-1}} \cong \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(m)$ $m < 0$ である。 A_{r-1} が $\mathbb{P}^2$ であるか、あるいは $\mathbb{P}^1$ -bundle であるか、 C_r がその fibre なることがこのようであることは、^(H) あるいは ^(H) から、 A_{r-1} が Σ_m for some $m > 0$ と同型で C_r は、その 0-section である。(H) 実際、後者の場合なら $N_{C_r/A_{r-1}} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ である。) この時 $0 \rightarrow N_{C_r/A_{r-1}} \rightarrow N_{C_r/A_{r-1}}|_{C_r} \rightarrow N_{A_{r-1}/X_r}|_{C_r} \rightarrow 0$ なる exact sequence が成立する。

$N_{C_r/A_{r-1}} \cong \mathcal{O}(-m)$ である。さらに p.2 (H) により、 $N_{A_{r-1}/X_r}|_{C_r} \cong \mathcal{O}(\ell)$, $0 < \ell < m$.

このような場合、一般には、exact sequence は split しない。さて、resolution の例外集合 $\tilde{p}(P)$ の既約成分は、nonsingular を仮定したから、 $\dim g(B)$

≤ 1 であるか、 $B \cong \mathbb{P}^1$ かつ $g(B) \cong \mathbb{P}^2$ のいずれかである。後者としよう。

すると p.5 の終りの議論と、ほぼ同様にして矛盾が生じる。

$\dim g(B) = 1$ とする。 $B \cong \Sigma_m$ で、 $B \cap A_{r-1}$ は B の 0-section であるから、 $r+6$ なら B_* は 1 点に contract せざるを得ない。これは矛盾である。

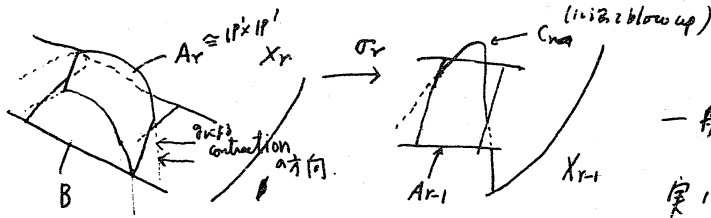
~~Proposition 8~~ Proposition 8 $\star$ の仮定と上の記号で $g(B)$ は 1 点である。

p4) $C_r \subset A_{r-1}$ は上で見た。 $C_r \cap A_{r-1}$ が有限個の点とする。この時 B は有限個の例外曲線を持つ ruled surface である。この時、仮定

$\star$ より容易に、 $\dim g(B) = 2$ なら、 $C_r \cap A_{r-1}$ は 1 点であることが結論できる。再び p.5 末の議論により、矛盾が生じる。 $\dim g(B) = 1$ と

すると Prop 7 より、 B は $A_r \cap B$ の連結成分の上への fibre structure を

も7。F図。この時, p.6の中程と同様にして B は rational.



lemma 4.12 より, $g(A_r)$

一般点の fibre は tree になる.

実は $C_{r-1} \cap A_{r-1} = 1$ 点. この点

で, C_r と A_{r-1} が transversal に交わっているのは, B は Σ_r の 1 点で quadratic transformation して得られる surface であり, そのような曲面では, B の fibre の proper transform 以外には, self-intersection number が 0 の curve は存在しない. 従って, この場合も除外し得た.

lemma 9. C_r が A_{r-1} に, 点 P で k 次の order で接する時, B は, $B \cap A_r$ の 1 点において, 特異点をもつ. この点 は, rational double point A_{r+k}

同型である. pf) P の近傍で, X_{r-1} の局所座標 $x, y, z \in \mathbb{C}^3$ で $z^k = y^2$ が,

A_{r-1} の local equation, $x=0, y=0$ が, C_r の local equation になるように

とすれば, B の特異点 は, $z^k = (y^2/x) \cdot x$ で与えられ, これは rational double point A_{r+k} の方程式である. *f.e.d.*

さてこの時, rational double point の resolution が self-intersection = -2

の nonsingular rational curves の tree に resolution ^{でき} する ~~ことができる~~ ^と ~~いうこと~~ ^を ~~使う~~ ^て ~~使う~~ ^て $B \cap A_{r+k}$

この場合も矛盾を導くことが出来る. *f.e.d.*

問 10. $\dim g(B) = 0$ から矛盾を生じるか? これが矛盾なら, nonsingular

on ~~surfaces~~ ^{surfaces} の system に resolution τ する, normal (isolated) singularity

に属しては, それ ~~は~~ surface の中に, lemma 1. をみたす $\mathbb{P}^1$ ~~が~~ ^が

存在するか. (もしよければ, minimal resolution かどうかを判定

できることにはなるだろう。 $\dim g(B)=0$ なら、すでにみたように、
 $C \subset A_{r-1}$ であることに注意しておく。 1つの例をあげよう。
 $A_{r-1} \cong \mathbb{P}^1$ とすると、 $N_{A_{r-1}} = [-D_{A_{r-1}}]$ であることがわかり、(lemma 1). A_r は、
 別の方向に contract できる。 lemma 1 のすぐあとの記号を用いて
 $\tau(A_r) = C'$, $\tau(B) = B'$ とおく。 $C' \cong \mathbb{P}^1$, $B' \cong \mathbb{P}^2$ で、 $N_{B'/2} \cong -H_{B'}$ がわかる。
 $N_{C'/2} \cong (-H_C) \oplus (-H_C)$ である。 B' の contraction $\tau_1: Z \rightarrow Z_1$ とし、 $C' = \tau_1(C')$ とおく。
lemma 11 一般に $X: 3\text{-fold}$, $\mathbb{P}^1 \subset X$, $N_{\mathbb{P}^1/X} \cong \mathcal{O}(m) \oplus \mathcal{O}(n)$ $\begin{matrix} n \leq m < 0 \\ \text{or } n = m = 0 \end{matrix}$ とする
 時、 $\sigma: X \rightarrow X$ を、 $\mathbb{P}^1$ の点 P における monoidal 変換とする。 X_1 における
 $\mathbb{P}^1$ の proper transform C_1 とする時、 $N_{C_1/X_1} \cong \mathcal{O}(m-1) \oplus \mathcal{O}(n-1)$.
 pf) $\mathbb{P}^1$ を含み、 $\sigma = \tau \circ \tau_1$ に transversal に交わる surface E_1, E_2 が、
 $\mathbb{P}^1$ の近傍に存在し、 $N_{E_1/X} \cong \mathcal{O}(m)$, $N_{E_2/X} \cong \mathcal{O}(n)$ を満たす。 $\sigma^{-1}[E_1]$ と
 $\sigma^{-1}[E_2]$ が、 C_1 に transversal に交わる nonsingular surface となるから、 $N_{C_1/X_1} \cong$
 $N_{\sigma^{-1}[E_1]} \oplus N_{\sigma^{-1}[E_2]}$, $E_i' = \sigma^{-1}[E_i]$ $i=1, 2$ である。 あとは曲面論である。 qed.
 この lemma を用いれば $N_{C_1/X_1} \cong \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$ である。 lemma 3 に矛盾。(1)
 が、上のような場合はありえない。 一般に $g(B)$ は nonsingular
 とはいえないが、 $g(B)$ が nonsingular のこの法バンドル $N_{g(B)/X_1}$ を
 調べることは意味があるだろう。 すなわち 図 $g: X \rightarrow X_1$ を、
 birational morphism, $\mathbb{P}^1 \subset X$, $g(\mathbb{P}^1) \cong \mathbb{P}^1$ とする時、 $N_{\mathbb{P}^1/X}$ と $N_{g(\mathbb{P}^1)/X_1}$ を較べよ。
 図 3 でよく似た問題でより一層重要な問題は、 birational map
 の monoidal 変換への分解可能性の問題である: $f: X \rightarrow Y$ を、3
 次の birational map とする時、 monoidal 変換の successions,

$\sigma_j: X_j \rightarrow X_{j-1}$, $\tau_j: Y_j \rightarrow Y_{j-1}$ $j=1, \dots, m$, $j=1, \dots, n$ $X_0=X$, $Y_0=Y$, $X_m=Y_n=Z$ が

存在し、 $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_m$, $\tau = \tau_1 \cdots \tau_n$ とおく時、 $f\sigma = \tau$ が成り立つか。

この問題に7.11でも、上と同様の考察が11.3.11.3でできるが、これに7.11.7は、触れず11.2として、例を示そう。

$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(x, y, z)$ とし、 $C \in \mathbb{C}^3$ で $x=0$, $f(y, z)=0$ で定義される (plane) curve

とする。 $\sigma: X \rightarrow \mathbb{C}^3$ を C に沿う monoidal 変換とする時、 X は $\mathbb{C}^3$ で

$xt=f(y, z)$ で定義される孤立特異点 P を持つ。点 P の resolution を

$\sigma_1: X_1 \rightarrow X$ を点 P の resolution とする。 $\sigma\sigma_1: X_1 \rightarrow \mathbb{C}^3$ は、一般には、

monoidal 変換の succession で、得られる、birational morphism と ~~なる~~ なる。

今 $f(y, z) = y^2 + z^d$ $d=2k+1$ とし、 $\sigma\sigma_1$ が上の意味で monoidal 変換

に分解できることを示そう。 ($d=2k$ の時は、 $\sigma\sigma_1$ 自身が monoidal

変換に分解する。) まず X_1 の resolution.

Lemma 12. $x^2 + y^2 + z^2 + u^d = 0$ $d=2k+1$ で定義される孤立特異点 P は、

点 P の monoidal 変換を k 回繰り返すことにより ~~得る~~ resolution

できる。 $\varphi: \tilde{X} \rightarrow X$ を resolution とする。 P を特異点、 $\varphi(P) = \bigcup_{i=1}^k \Theta_i$ と

する。ここで Θ_i は、 i 番目の monoidal 変換により得られる曲面と

する。この時、 $\Theta_i \cong \Sigma_2$, $i=1, \dots, k-1$. $\Theta_k \cong (\Sigma_2$ の 0 -section を contract

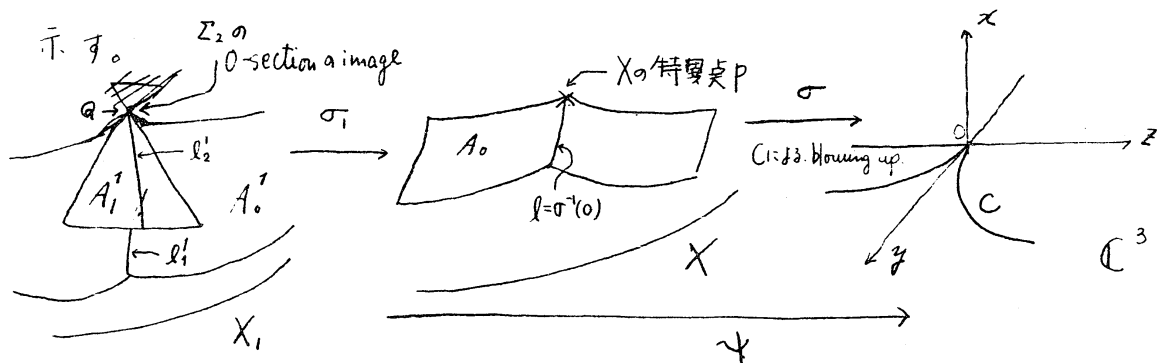
した surface), $N_{\Theta_k/F_2} = -2H_{F_2}$. F_i は Θ_i の general fibre. $\Theta_i \cap \Theta_{i+2}$ $i=1, \dots,$

$k-1$ は、 Θ_i の 0 -section, Θ_{i+1} の ∞ -section.

証明は direct computation によるのを省略。

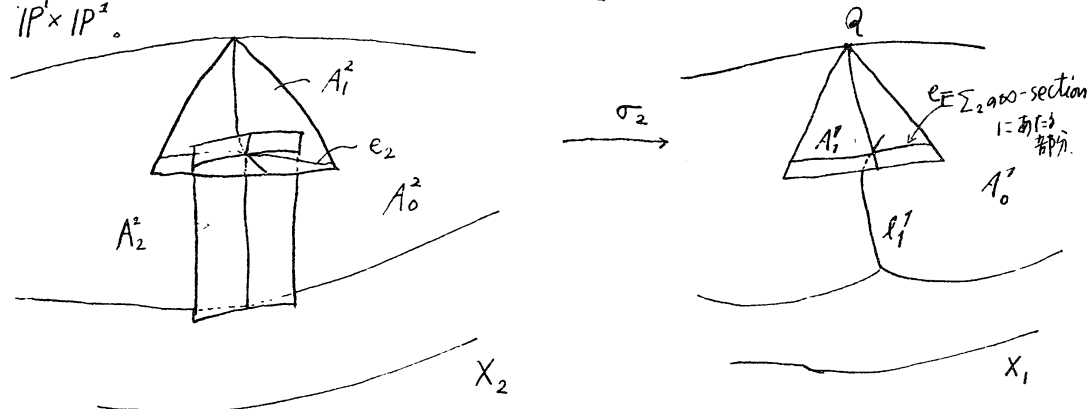
lemma 11.3.11.3 より、 $f(y, z) = y^2 + z^d$, $d=2k+1$ とした時、 $\sigma\sigma_1: X_1 \rightarrow \mathbb{C}^3$

が完全にわかる。まず $d=3$ とする。 $\psi = \sigma\sigma_1$ とおく。 $\psi^{-1}(C) = A_0' \cup A_1'$ とする。ここで $A_1' \neq C$ の proper transform, A_1' は上記号で X の特異点の resolution σ_1 の例外曲面。従って $A_1' \cong \Sigma_2$ 0-section. これを図で示す。



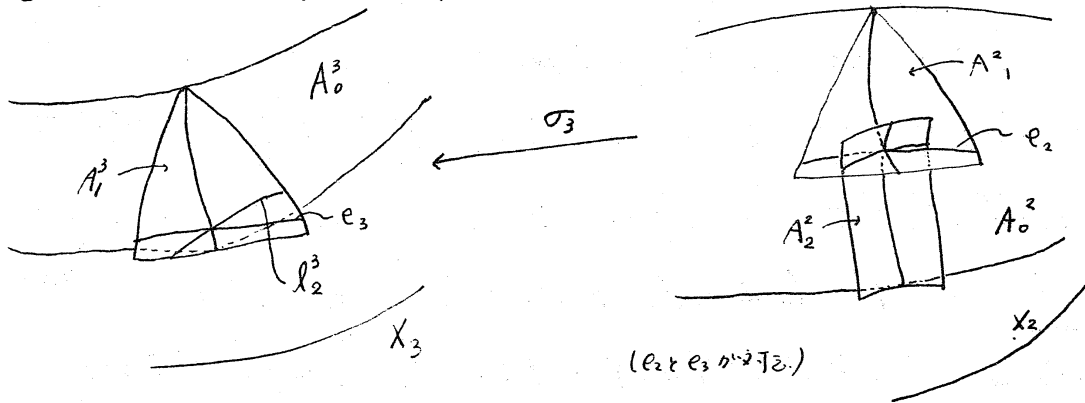
X の特異点 P の記述: ある affine open において $xt = y^2 + z^3$ で定義されることがある。 Q の近傍で $X_1: (\frac{x}{z})/(\frac{t}{z}) = (\frac{y}{z})^2 + z$ $A_1: z=0, (\frac{x}{z})/(\frac{t}{z}) = (\frac{y}{z})^2$. $l_1' = \sigma_1^{-1}[l]$ とする。 $\sigma_2: X_2 \rightarrow X_1$ は l_1 に沿った monoidal 変換とする。 $A_2^2 = \sigma_2^{-1}[A_1]$, $A_0^2 = \sigma_2^{-1}[A_0']$, $A_2^2 = \sigma_2^{-1}[l_1]$ とする。(一般に A_i^k は $\sigma_k^{-1}[\dots \sigma_{i+1}^{-1}[A_i^1]]$, すなわち A_i^k の X_k における proper transform を表わす。ただし $k \geq i$.) さて, この時, $A_0^2 \xrightarrow{\sigma_2} A_0'$, A_1^2 は, 1 種例外曲線と含む。 (は, 非特異化)

$$A_2^2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$$

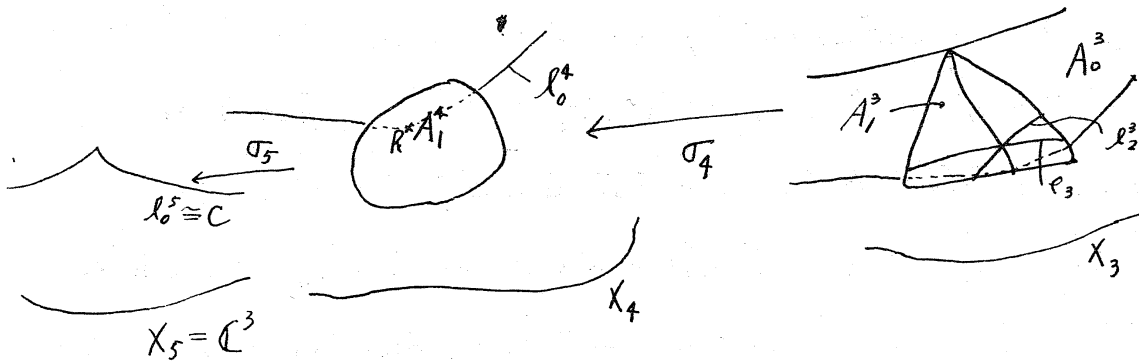


この時, A_2^2 はもう 1 方のファイバが $\mathbb{P}^1$ の方向に contractible.

$\sigma_3: X_2 \rightarrow X_3$ をこの contraction とする。 $\sigma(A_2^2) = \ell_2^3$ とする。 この時 A_0^3 は、 $\mathbb{C}$ との $\mathbb{P}^1$ -bundle に同型。 A_1^3 は A_1^2 と同型。



この時 A_0^3 が自然にファイバー方向に contractible。 contraction を $\sigma_4: X_3 \rightarrow X_4$ とする。 $\sigma_4(A_0^3) = \ell_0^4$ とする。 この時 $A_1^4 \cong \mathbb{P}^1$ 。



この時 A_1^4 が contractible 2; contraction を $\sigma_5: X_4 \rightarrow X_5$ とする。

この時、 $\sigma\sigma_2 = \sigma_5\sigma_4\sigma_3$ が成り立つ。 つまり $\sigma\sigma_1 = \psi = \sigma_5\sigma_4\sigma_3\sigma_2^{-1}$

というふうに monoidal 変換に分解できた。 $d=5$ にすると少し違、に situation が出現するが、これを説明すると徒に紙数を費やすので、結果だけ述べる。 p.10 の記号を用いて $\sigma\sigma_1 = \psi$ とおく。

Proposition 13. ^{p.10 のように} $f(x, y) = x^2 + y^d$ とおく。 この時、 $\psi_d = \sigma\sigma_1$ とおくと、

すると ψ_d は、 monoidal 変換に分解できる。 d は任意。

一般に, isolated singularity, $xy = z^a + u^b$ a, b 整数 ≥ 2 .

の非特異化を構成する π と τ 可能である。(修論参照) $\varphi_{(x,u)} = \tau^* + u^*$

とある。 Ψ の monoidal 変換を實現して Ψ をおとし "T" する。

図 $f: X \rightarrow Y$ を 3次元の birational morphism とする。最初 $\Gamma = \mathbb{Q}$ の Γ -monoidal 変換 Γ の分解が Γ であることは、 Γ と Γ と Γ の Γ であることが、 Γ の

例であるが、 f の fundamental point が、 Y の 1 点 P 、ある 11 は、非特異曲線 C であるとして、 f が、 Y の、 P あるいは、 C を center とする monoidal 変換を dominate するか? という問題が生じる。まず、1 点 P の

場合 12 反例をあげよう。 $Y = \mathbb{C}^3$, $\sigma_i: Y_i \rightarrow Y$ を原点での blowing up とする。

反例 birational morphism $f: X \rightarrow \mathbb{C}^2$. $f|_{X-f^{-1}(0)}: X-f^{-1}(0) \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^2 - \{0\}$.

また、(1)より、 $\sigma^* f: X \rightarrow Y_1$ は dominating である。したがって $\sigma^* f$ は $\sigma^* f$ である。

11 さすか繁雄であろが、これを正確に述べよう。

(1) 上の記号で示すに, $A'_i = \sigma_i^{-1}(a)$ とおく。 $A'_i \cong \mathbb{P}^2$, $N_{A'_i/Y} \cong -H_{A'_i}$ である。

$\mathbb{C}^3 = \mathbb{C}^3(Z_1, Z_2, Z_3)$ とする。 $Z_1 = 0$ で定義される plane E_0 と L, X, Y, Z の

ζ の proper transform E_1 とする。 $E_1 \cap A'_1$ は A'_1 の line l' がある。これを l'_1

とす。 $N_{\mathcal{L}'_i} = -H_{\mathcal{L}'_i}$ である。 $p \in \mathcal{L}'_i$ 上の任意の点とす。

(2) $\sigma_2: Y_2 \rightarrow Y_1$ を点 P における monoidal 変換とする。 $A_2^2 = \sigma_2^{-1}(P)$ とすると、

$$A_2^2 \cong \mathbb{P}^2, \quad NA_2^2/\kappa_2 \cong -H_{A_2^2} \text{ とある。 } A_1' \text{ a proper transform, } \sigma_2^{-1}[A_1'] \in A_2' \text{ とある。}$$

$A'_2 \cong \Sigma_1$ である。 $\sigma_2^{-1}[l'_1] = l'_2$ となる l'_2 は A'_2 の fibre τ である。 $N_{A'_2/l'_2}$

$$\cong -2H_{\mathbb{P}^2} \text{ 上 } \exists, (pf) \quad \sigma_2[E_1] = E_2 \text{ 上 } \exists \exists, \mathcal{L}'_2 \subset E_2 \text{ 上 } \exists \exists, \sigma_2|_{E_2}: E_2 \longrightarrow E_1$$

12. 真 $P \in E_2$ に $\delta_1 H$ の monoidal 変換 である。従って $N_{\mathcal{H}_E}^{\mathcal{H}_E} = -2H_{E_2}$ である。

E_2 は l'_2 と transversal に A'_2 に交わるから, $N_{A'_2/X_2}|_{l'_2} \cong N_{l'_2/E_2} = -2H_{l'_2}$ である。

(3) $E_2 \cap A'_2 = l'_2$ である。 l'_2 は A'_2 上の line である。 $\sigma_3: X_3 \rightarrow X_2$ 。

l'_2 は center とする monoidal 変換である。 $A'_3 = \sigma_3^{-1}(l'_2)$ と書く。 $A'_3 = \sigma_3^{-1}[A'_2]$

と書く。 $\sigma_3|_{A'_3}: A'_3 \rightarrow A'_2$ は $p_2 = A'_2 \cap l'_2$ による monoidal 変換である。 $\sigma_3^{-1}[l'_2]$

$= l'_3$ である。 $p_2 \in l'_2$ であるから, $N_{l'_2/X_2} = -H_{l'_2}$ である。 $\neq \tau = N_{A'_2/X_2}|_{l'_2} = -2H_{l'_2}$

である。(pf). E_2 は l'_2 と交わる。 $\sigma_3^{-1}[E_2] = E_3$ と書く。 E_3 は A'_3 と transversal

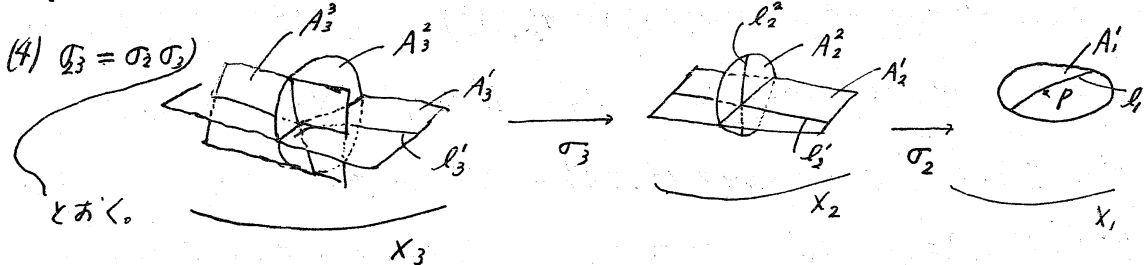
に交わる。 $\sigma_3|_{E_3}: E_3 \rightarrow E_2$ は σ_3 の center l'_2 が E_2 に含まれてゐるから

isomorphism である。従つて $N_{A'_3/X_3}|_{l'_3} = N_{l'_2/E_2} = N_{l'_2/X_2} = -2H_{l'_2} = -2H_{l'_3}$.) $\neq \tau =$

$N_{l'_3/X_3} \cong (-H_{l'_3}) \oplus (-2H_{l'_3})$ である。(pf) l'_3 は A'_3 と E_3 が transversal に

交わり両方とも nonsingular であるから, $N_{l'_3/X_3} = N_{l'_3/A'_3} \oplus N_{l'_3/E_3} = (H_{l'_3})$

$\oplus (-H_{l'_3})$)



$l'_1 \subset A'_1 \subset X_1$, $\sigma_{23}^{-1}[l'_1] = l'_3$ である。 $\tau =$ 。 $\sigma_4: X_4 \rightarrow X_3$ 。

l'_3 は center とする monoidal 変換である。 $\sigma_4^{-1}[l'_3] = A_4^*$ と書く。 (3) の最後から

$A_4^* \cong \Sigma_1$, $A'_4 = \sigma_4^{-1}[A'_2]$ と書く。 $l'_4 = A'_4 \cap A_4^*$ は, やはり (3) の最後の

事実より A_4^* の 0-section である。 (3) における議論と同様に,

$N_{l'_4/X_4} = N_{l'_4/A'_4} \oplus N_{l'_4/A_4^*} = (-H_{l'_4}) \oplus (-H_{l'_4})$

(5) $\sigma_{234} = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4: X_4 \rightarrow X_1$ と書く。 $l'_4 = \sigma_{234}^{-1}[l'_2]$ である。 $\sigma_5: X_5 \rightarrow X_4$

l'_4 を center とする monoidal 変換 $\sigma_5^{-1}[l'_4] = A_5^2$ とおく。Lemma により $A_5^2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, $p_i: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$, $i=1,2$ は 1st factor, 2nd factor への射影とする。 σ_5 により induced される A_5^2 の fibre structure が p_i に一致するとする。この時 P.2.12 より, birational morphism $\sigma'_5: Y_5 \rightarrow Y'_5$ が存在し, $\sigma'_5|_{Y_5 - A_5^2} \cong \sigma_5|_{Y_5 - A_5^2}$ かつ $\sigma'_5|_{A_5^2}: A_5^2 \rightarrow \sigma'_5(A_5^2)$ が p_2 と一致する。 $\ell' = \sigma'_5(A_5^2)$ とおく。

(6) $f: Y'_5 \rightarrow \mathbb{C}^3$ の birational morphism σ'_5 ; $f \circ \sigma'_5 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \circ f_2$ となる f_2 が存在することは明らかである。 birational map $g: Y_5 \rightarrow Y_1$ $g = \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5 \sigma_5^{-1}$ で定義すれば, g により ℓ' の各点と, curve ℓ'_2 が対応する。すなわち $g: Y_5 \rightarrow Y_1$ は dominating である。 $g = \sigma_1^{-1} \circ f$ であるから $f: Y'_5 \rightarrow \mathbb{C}^3$ が求める example である。

(7) $f^{-1}(0) = \sigma'_5(A_5^2) \cup \sigma'_5(A_5^2) \cup \sigma'_5(A_5^2) \cup \sigma'_5(A_5^2)$. $\sigma'_5(A_5^2) = B^d$ $d=1,2,3,4$ とする。 $B^1 \cong \Sigma_2$ $N_{B/Y'_5}|_{F^1} \cong -2H_{F^1}$ $B^2 \cong \mathbb{P}^2$ $N_{B/Y'_5}|_{F^2} \cong -2H_{B^2}$,

B^3 は Σ_2 より, 2回 σ -process を行い得られる surface. $N_{B/Y'_5}|_{F^3} \cong -H_{F^3}$ $B^4 \cong \mathbb{P}^2$ $N_{B/Y'_5}|_{F^4} \cong -2B^4$ である。 // A_1 の proper transform が Σ_m になるもの

$B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4$ のような奇妙な を構成することはできる。

図形が点の逆像として表われてくる以上, 一般の birational morphism に関しては, 予想のたてようもない。

次に nonsingular curve C が, birational morphism $f: X \rightarrow Y$ の基本集に属している場合は, どうだろうか。 C 上に, $\dim f^{-1}(Q) = 2$ とする点がある場合には容易に(当然の)反例がある。今, $\dim f^{-1}(Q) = 1 \quad \forall Q \in C$ とする。

Theorem 1 Y を $\mathbb{C}^3$ の原点の近傍, C を Y の curve とする。 C の原点での既約成分の中に非特異なもの C_0 があれば, f は, C_0 を center とする Y の monoidal 変換を dominate する。 ($\dim f^{-1}(0)=1$ $Q \in C$ の仮定)

(pf) $Y \subset \mathbb{C}^3$ の座標を (x, y, z) , C_0 が $x=y=0$ で定義されてゐることをする。
 $a=(a_0, a_1) \in \mathbb{P}^1$ に対し, $a_0x+a_1y=0$ で定義される plane を E_a , $z=0$ との交線を l_a と書く。 $|E_a|$ は $a \in \mathbb{P}^1$ の上の linear system とする。 $\tilde{E}_a = f^{-1}(E_a)$ とし, $|\tilde{E}_a|$ の fixed component を F とする。 linear system $L = |E_a| - F$ の base locus B が空集合であることは示される。 L の general member は, $|E_a|$ の general member の proper transform $\tilde{E}_a$ である。 再び lemma 4 による。
 $Y \rightarrow 0$ は f は, nonsingular center の monoidal 変換の succession と見られる。
 $\tilde{E}_a \cap \tilde{E}_b \subset f^{-1}(0)$, かつ, $\tilde{E}_a, \tilde{E}_b$ が general の時, 成り立つ。 従って, $z \notin B$ ($f^{-1}(0)$ の既約成分 D_i が B に含まれる $\iff D_i \subset \tilde{E}_a$ for general $\tilde{E}_a$)
 従って, $\tilde{E}_a \cap \tilde{E}_b = B$ かつ, general $\tilde{E}_a, \tilde{E}_b$ である。 ~~従って, B は有限個の点からなり, 1 に対して成立する。(よって $B \neq \emptyset$ は $\dim B = 1$.)~~ $\tilde{l}_a$ は $f^{-1}(l_a)$ の proper transform とする。
 $f|_{\tilde{l}_a}: \tilde{l}_a \rightarrow l_a$ は, biholomorphic map である。 $\tilde{l}_a \cap S = R$ とする。 S は f の例外集合。 $R \neq B$ を示そう。 この時 $R \in f^{-1}(0) \cap \tilde{E}_a$ から $\bar{B} = \emptyset$ である。 実際 $\tilde{E}_a \cap f^{-1}(0) = B$ が成立するからである。($z \notin S$ かつ $\tilde{E}_a$ は general member) R の近傍の local coordinate $(u, v, w) \in U/\mathbb{C}_a$ が $\tilde{l}_a$ の parameter となるように取る。 この座標に関して $f \in x = f_1(u, v, w)$
 $y = f_2(u, v, w)$, $z = f_3(u, v, w)$ と表す。 座標 x, y が general にとり, $x = t(u, v, w)g_1(u, v, w)$, $y = t(u, v, w)g_2(u, v, w)$, g_1, g_2 は互いに素な素数とするとする。

g_1, g_2 は、 R で同時に 0 にはならないことを示せばよい。この時、 $g_1=0$ が E_a の方程式に対応して 11 からである。さて f は la parameter が x ととれる時、 $x = t(4, 0, 0) g_1(4, 0, 0)$ となる。これが degree 1 の map を表すためには、 $t(0, 0, 0) = 0$ であるから $g_1(0, 0, 0) \neq 0$ なければならない。q.e.d.

さらに、 $t = t(u, v, z) = u + \dots$ という展開をもつと承えてよい。
すなわち S は R で nonsingular である。

lemma 14 4-11. $f^{-1}(0) \cap S$ に、 S の nonsingular point R が含まれるは、 C の既約成分に nonsingular のものが存在する。

pf) Koopman [3] より R の近傍の座標 (u, v, w) に由り、 f は次の形をとる。 $x = u^S, y = u^S (\sum_{k=0}^A u^k h_k(w) + u^A v), z = w$ $\begin{matrix} S, S \geq 0, A \geq 0 \end{matrix}$ $\therefore t$ $u=0$ が S の local equation になるとしてよい。従って $u=0$ の image は $x=0, y=0$ で定義される nonsingular curve である。

lemma 15 定理の仮定で (~~一既約成分~~が plane curve, すなわち

$\mathbb{C}^3$ のある nonsingular hypersurface に一点の近傍に含まれるとする。この時、 $f^{-1}(0) \cap S$ の点 T 、 S の nonsingular point でもあるものが存在する。

pf) C が $\mathbb{C}^3$ で $f_0(x, y) = 0, z = 0$ で定義されているとしてよい。 $x=y=0$ で定義される line を l とする。 $\tilde{l}$ と l の proper transform とし $\tilde{l} \cap S = R$ とする。 R で S が non-singular であることが上と同様にして証明される。// lemma 14, 15 をあわせると

Theorem 1': Theorem 1 の C に 関する仮定で、 C が plane curve

とするにおきかえる。この時、 C の既約成分に nonsingular なものが存在し、これを C_0 とする時、定理 1 の帰結が成立する。// 一般に

Lemma 16 定理 1 の条件で、 C は任意の curve とする。 $\dim f^{-1}(Q) = 1$ $\forall Q \in C$ なら、 C の中に、非特異な成分 C_0 が存在する。

pf) Lemma 14 から、 $f^{-1}(0) \cap Y$ には nonsingular point が存在することさえあれば、 $\dim f^{-1}(0) = 1$ から、 $R \in f^{-1}(0) \cap Y$ 、 $Y = \mathbb{C}^3$ の原点を通る 2 本の line l_1, l_2 の proper transform $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ が、 $R \in \tilde{l}_1 \cap \tilde{l}_2$ するものがある。 $O \in Y \subset R \in X$ の座標 (x, y, z) 、 $(u, v, w) \in \tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ がそれぞれ $\begin{matrix} y=z \\ x=w=0 \end{matrix}$, $\begin{matrix} x=z \\ u=w=0 \end{matrix}$, $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2$ がそれぞれ $v=w=0$ $u=w=0$ で定義されるようにとる。さうして $(*) u=v=0$ で定義される line は、 $z=0$ なる plane の proper transform に含まれる // としてよい。この時、 f は、 $u=x, v=y, z=g(u, v, w)$ という形で与えられる。Weierstrass の予備定理が使える。 g は、 w に関して m 次の Weierstrass polynomial $z^2 + p_1 z + p_2$ $m > 1$ だと、上の式から f が原点の近傍で、 $|x| < \epsilon$ なら $|z| < \epsilon$ となる。よって $m=1$ の時、 f は R の近傍で同型。 R のとりかえに反する。これは条件 $(*)$ に矛盾したのである。書きなれたが、この条件は、

C が plane curve の時に成立する //。 plane curve の時は Lemma 13, p.e.d

Corollary 17 $\dim f^{-1}(Q) = 1 \forall Q \in C$ なら、 C は plane curve。

今まで、 f と Y に関し local に考えてきた。これを global にするために、

Definition 1 X, Y を複素多様体、 $f: X \rightarrow Y$ birational morphism とする

時、 f が複合 monoidal 変換とは、 $\forall x \in X, \forall y \in Y$ に対し、近傍 $U_x \ni x, U_y \ni y$ $s.t. y = f(x)$

と nonsingular complex manifolds U_i とその open subset V_i, V_i nonsingular

submanifold $A_i, i=0, 1, \dots, r$ が存在し, $U_0 = U_y, U_r = U_x$ かつ U_i は U_{i-1} より A_{i-1} を center とする monoidal 変換で得られる。さらに, これを, $\sigma_i: U_i \rightarrow U_{i-1}$ と考える時, $f|_{U_x} = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_r$ が成立する。この時を言う。

Theorem 2 $f: X \rightarrow Y$ は birational morphism, $\dim^f(Q) \leq 1 \forall Q \in Y$ とする。 $(f'$ の不確定点を C とする。) この時 f は, 複合 monoidal 変換である。証明は, C の特異点の近傍ごとに考えて今までこの結果を寄せ集めればできる。

訂正 1. シンポジウムで話した松中先生の例に因りて center surface が, 非特異に contract するのは誤りであった。ここに慎んで訂正します。実際 Ann. Math. Vol. 75, P. 176a 記号で, $E_0 \cong \mathbb{P}^2$, $N_{E_0/U} = -2H_{E_0}$ であつた。contract した場合は, Theorem 1 あるいは系 17 からわかることである。

2. P. 67 の $g(A_r: A_r \rightarrow g(A, 1))$ の fibre の連結性は, 訂正して「なるかつた。」あとこの議論に支障はなぬ。

3. P. 75 行目: $N_{B/2} = -2H_{B'}$ であつた。従つて Z_1 は singular point であつた。この時下から 8 行目のように矛盾が生じるかどうか意味があるかわからぬ。

Reference: [1] Kodaira: Ann. Math. Vol. 75. [2] Kodaira: Amer. Jour. Math. 1963. [3] Koopman: Bull. Amer. Math. Soc. 34 その他 [4] Aepli: Comm. Math. Helv. 33 [5] Hopf: Comm. Math. Helv. 29 [6] Kuhlmann: Archiv. Math. II [7] Moisiezov: Amer. Math. Soc. 1968, [8] Šavarevič and others. Algebraic surfaces. [9] Zariski. Intro. to the problem of minimal models.