

Transfer と同変写像の Lefschetz 数

阪大理 中 岡 稔

$F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} B$ をファイバー空間とし, B は CW 複体, F は有限複体とする. $f: E \rightarrow E$ を恒等写像 $\text{id}: B \rightarrow B$ のファイバーを保つ連続写像とし, $f = f|_F: F \rightarrow F$ の Lefschetz 数を λ_f で表わす. このとき, 準同型 $\tau_f: H^*(E) \rightarrow H^*(B)$ であって, $\tau_f \circ p^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B)$ は λ_f 倍する写像となるものが存在することは Becker-Carson-Gottlieb により示されている ([1]). τ_f は fixed point transfer とよばれている. $\tau_f \neq 0$ ならば f は不動点をもつからである.

この小論文では, ^{の仕事} 恒等写像をほんの少し modify することにより, ファイバーが多様体に向きつくファイバー空間の場合には上の transfer を一般化した coincidence transfer とよばれるべき準同型が存在すること, および同変写像の Lefschetz 数に関する定理が得られることを示そう.

以下, M_1, M_2 は連結で何きのついた閉じた位相多様体とし, それらはともに n 次元であるとする. このとき連続写像 $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ に対し, 合成

$$H^*(M_1; \mathbb{Q}) \xrightarrow{f_!} H^*(M_2; \mathbb{Q}) \xrightarrow{g^*} H^*(M_1; \mathbb{Q})$$

($f_!$ は Gysin 準同型) を考え, この写像の Lefschetz 数を $\lambda_{f,g}$ で表わす. f または g が恒等写像のときは $\lambda_{f,g}$ は通常の λ_g または λ_f に一致し, $U'_2 \in H^n(M_2 \times M_2)$ を M_2 の対角コホモロジー類とすると,

$$(1) \quad \lambda_{f,g} = \langle (f, g)^* U'_2, [M_1] \rangle \in \mathbb{Z}$$

が成り立つ. また, $\lambda_{f,g} \neq 0$ ならば f と g は coincidence (すなわち $f(x) = g(x)$ となる点 $x \in M_1$) をもつ. ([2] 参照.)

さて, 同一の底空間 B 上の二つの局所自明なファイバー空間

$$M_1 \xrightarrow{i_1} E_1 \xrightarrow{p_1} B, \quad M_2 \xrightarrow{i_2} E_2 \xrightarrow{p_2} B$$

が与えられたとし,

$$\bar{f}, \bar{g}: E_1 \rightarrow E_2$$

を恒等写像 $\text{id}: B \rightarrow B$ 上のファイバーを保つ連続写像とする. $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ は $\bar{f}, \bar{g}$ のファイバー上への制限を表わすとする.

補題 $\pi_1(B)$ の $H^n(M_1), H^n(M_2)$ 上への作用が自明な

は, $H^n(E_1)$ の元 $\Lambda_{f,g}$ を

$$\langle \iota^*(\Lambda_{f,g}), [M_1] \rangle = \lambda_{f,g}$$

と定めるものが存在する。

実際, Thom 同型

$$\phi_i: H^*(E_i) \cong H^{*+n}(E_i \times_B E_i, E_i \times_B E_i - dE_i)$$

(d は対角写像) を考え,

$$\bar{U}_i = \phi_i(1), \quad \bar{U}'_i = \bar{U}_i|_{E_i \times_B E_i}$$

とおけば ($i=1, 2$), (1) より

$$\Lambda_{f,g} = \phi_1^{-1}(\bar{U}_1 \cup (f \times g)^* \bar{U}'_2)$$

は求めるものが存在することはわかる。

次の定理の $\tau_{f,g}$ を Coincidence transfer とよぼす。

定理 1 $\pi_1(B)$ の $H^n(M_1), H^n(M_2)$ 上への作用が自明ならば, 準同型

$$\tau_{f,g}: H^*(E_1) \rightarrow H^*(B)$$

で, $\tau_{f,g} \circ p_1^*: H^*(B) \rightarrow H^*(B)$ は $\lambda_{f,g}$ 倍する写像とあるものが存在する。

実際,

$$\tau_{f,g}(\alpha) = p_1!(\alpha \cup \Lambda_{f,g}) \quad (\alpha \in H^*(B))$$

と定義すればよい。

注意 1. 冒頭に述べた fixed point transfer の存在定理は $p_1 = p_2$ で $g = \text{id}$ の場合の定理 1 を基幹として, 順

次に一般化する事によって導かれるのである" ([3]),
それを真似て定理1をもっと一般化する (例えば π_1
(B) の作用に関する仮定をゆる) ことはできない.

注意2. B が有限複体の場合には fixed point transfer は S 写像で実現でき, (したがってそれは一般コホモロジーに対しても定義でき 非常に価値のある応用をもつ) ^[4] coincidence transfer が S 写像で実現できるかどうかについては筆者は知らない.

上に述べた補題よりまた次の定理が得られる.

定理2. 有限群 G が M_1, M_2 上に何をも保つ同相写像によって作用し, G の M_1 上への作用は自由と仮定する.
 $f, g: M_1 \rightarrow M_2$ を同変写像とするとき, $\lambda_{f,g}$ は G の位数 $|G|$ で割り切れる.

実際, ファイバー空間

$$M_1 \xrightarrow{i_1} E_G \times_G M_1 \xrightarrow{p_1} B_G, \quad M_2 \xrightarrow{i_2} E_G \times_G M_2 \xrightarrow{p_2} B_G$$

をファイバーを保つ連続写像

$$\bar{f} = i_1 \times f, \quad \bar{g} = i_1 \times g: E_G \times_G M_1 \rightarrow E_G \times_G M_2$$

に対し, 補題を適用して得られる $\lambda_{\bar{f}, \bar{g}} \in H^n(E_G \times_G M_1)$
を $H^n(M_1/G)$ の元とみなせば,

$$\langle p_1^*(\lambda_{\bar{f}, \bar{g}}), [M_1] \rangle = \lambda_{f,g}$$

が成り立つから, 求める結果が得られる.

系1. 定理2の仮定に加えて、さらに M_1 はホモロジー球面と仮定する。このとき同変写像 $f: M_1 \rightarrow M_2$ の写像度は $|G|$ を法としてすべて同じである。

とくに

系2. M を有限群 G が自由に作用するホモロジー球面とすると、同変写像 $f: M \rightarrow M$ の写像度は $1 \pmod{|G|}$ である。

注意. 系2はホモトピー球面の場合には[5]で別の方法で示されている。

最後に、定理2に関連して次のことを注意しておく。

M を連結で何ものついた閉多様体とし、その上に有限群 G が何ものを保って自由に作用しているとき、同変写像 $f: M \rightarrow M$ の Lefschetz 数 λ_f は $|G|$ の倍数であることが定理2より得られるが、 G が Artin-Tate 群 (かならず G の可換部分群はすべて巡回群であるような有限群) のときは、同様のことが任意の有限群体に対して成り立つ。かならず

定理3. 有限群体 X 上に Artin-Tate 群 G が自由に作用しているとき、同変写像 $f: X \rightarrow X$ の Lefschetz 数は $|G|$ で割り切れる。

実際、ファイバー空間 $X \xrightarrow{i} E_G \times_G X \xrightarrow{p} B_G$ と写像

$f = \text{id}_X$ に対し冒頭の定理を適用すれば,

$$\tau_f \circ p^* = \lambda_f : H^*(B_G) \rightarrow H^*(B_G)$$

となる準同型 $\tau_f : H^*(E_G \times_G X) \rightarrow H^*(B_G)$ が存在するが,

十分大きな g に対しては: $H^g(E_G \times_G X) = H^g(X/G) = 0$

で, また, G が Artin-Tate 群であることから $H^g(B_G)$

$= \mathbb{Z}[G]$ となる g が無限に存在するから ([2]), $\lambda_f \equiv$

$0 \pmod{|G|}$ が成り立つ.

注意 定理3は G が有限巡回群の場合は [6] で

示されている. また, G が有限巡回群で $f = \text{id}$ の場合は

もっと古典的で [7] で示されている.

文 献

- [1] Becker-Carson-Gottlieb: The Lefschetz number and fibre preserving maps. Bull. Amer. Math. Soc. 81 (1975).
- [2] 中田 稔: 不動点定理とその周辺 (岩波書店), 1977.
- [3] Gottlieb: Fibre bundles and the Euler characteristic. J. Diff. Geom. 10 (1975).
- [4] Becker-Gottlieb: The transfer map and fibre bundles, Topology 14 (1975).
- [5] Rubinsztein: On the equivariant homotopy of spheres, Dissertationes Mathematicae 134 (1976).

[6] Casson-Gottlieb: Fibrations with compact fibres, Amer. J. Math. 99 (1975).

[7] Floyd: On periodic maps and the Euler characteristics of associated spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952).