

対角部分空間配置のホモトピー分解 Homotopy decomposition of diagonal arrangements

京都大学理学研究科 岸本大祐*

Daisuke Kishimoto

Department of Mathematics, Kyoto University

1 主定理

本稿では入江幸右衛門さんとの共同研究 [IK] について述べる. 空間 X を固定する. 部分集合 $\sigma \subset [m] = \{1, \dots, m\}$ に対して定まる X^m の部分空間

$$\Delta_\sigma(X) = \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid x_{i_1} = \dots = x_{i_k}, \{i_1, \dots, i_k\} = [m] - \sigma\}$$

を X^m の対角部分空間という. 対角部分空間の配置を考えるのだが, 配置方法を組み合わせ的に記述するのが便利である. 以下, K を頂点集合を $[m] = \{1, \dots, m\}$ とする抽象単体複体とする. ただし, 空部分集合は常に K に属する. 単体複体 K に対して対角部分空間配置

$$\{\Delta_\sigma(X)\}_{\sigma \in K}$$

が定まる. 数々ある部分空間配置のうち, 対角部分空間配置は特に重要である. 例えば次の例が挙げられる.

例 1.1. $m-1$ 次元単体の $m-3$ 骨格に対応する対角部分空間配置は組み合わせ配置である.

*kishi@math.kyoto-u.ac.jp

したがって、 K の定める対角部分空間配置の和

$$\Delta_K(X) = \bigcup_{\sigma \in K} \Delta_\sigma(X).$$

のトポロジーは重要な研究対象である。(先行研究に関しては [KS, Ki, Ko, L, M, MW, PRW] 参照) [ZZ] や [BBCG] にあるように、部分空間配置やその補空間のホモトピー分解は非常に強力な結果である。Faten Labassi さん [L] は $\Delta_K(X)$ の懸垂のホモトピー分解を、 K が $m-1$ 単体の $m-d-1$ 骨格で $2d > m$ をみたすときに示した。その証明は単体の骨格の対称性に大きく依存しているため、一般の単体複体 K に対して同様の手法を用いることはできない。そこで、われわれは Labassi さんの研究指導者である Sadok Kallel さんから、一般の K に対して同様の分解ができないかという質問を受けた。次の定理がこの質問に対する肯定的な答えである。証明方法は Labassi さんのとは全く異なる。

定理 1.2. 空間 X が連結 CW 複体であり、 $2(\dim K + 1) < m$ であるとき、

$$\Sigma \Delta_K(X) \simeq \Sigma \left(\bigvee_{\sigma \in K} \widehat{X}^{|\sigma|} \vee \widehat{X}^{|\sigma|+1} \right)$$

となる。ここで、 $\widehat{X}^k$ は $k > 0$ のとき k 個の X のスマッシュ積、 $k = 0$ のとき一点を意味する。

この定理の系として、 K の定める対角部分空間配置の補空間の Euler 数を計算する。

系 1.3. 空間 X が n 次元連結閉多様体であり、 $2(\dim K + 1) < m$ であるとき、補空間 $X^m - \Delta_K(X)$ の Euler 数は次で与えられる。

$$\chi(X)^m - (-1)^{mn} \chi(X) \left(1 + \sum_{\emptyset \neq \sigma \in K} (\chi(X) - 1)^{|\sigma|} \right)$$

Proof. X はコンパクト多様体なので、 $\Delta_K(X)$ は mn 次元多様体 X^m のコンパクト、局所可縮な部分空間である。よって、Lefschetz 同型定理より、

$$H_i(X^m, X^m - \Delta_K(X); \mathbb{Z}/2) \cong H^{mn-i}(\Delta_K(X); \mathbb{Z}/2)$$

となり, $\chi(X^m, X^m - \Delta_K(X)) = (-1)^{mn} \chi(\Delta_K(X))$ を得る. 定理 1.2 から

$$\chi(X^m, X^m - \Delta_K(X)) = (-1)^{mn} \chi(X) \left(1 + \sum_{\emptyset \neq \sigma \in K} (\chi(X) - 1)^{|\sigma|}\right)$$

となることがわかり, $\chi(X^m) = \chi(X^m, X^m - \Delta_K(X)) + \chi(X^m - \Delta_K(X))$ により証明終わり. $\square$

注意 1.4. 系 1.3 において X のコンパクト性は必要である. 例えば, X がユークリッド空間 $\mathbb{R}$ で K が空集合のみからなるとき, 補空間 $X^m - \Delta_K(X)$ は S^{m-2} にホモトピー同値であるので, 系 1.3 の公式は成り立たない.

2 証明の流れ

定理 1.2 の証明は, おおまかに次の三つの段階 (どれも非常に初等的) を踏む.

1. $2(\dim K + 1) < m$ という条件を用いて, $\Delta_K(X)$ を全空間とするホモトピーファイブレーションを構成する.
2. このホモトピーファイブレーションのファイバー包含写像は懸垂すると左ホモトピー逆写像をもつことを示す.
3. 一般に, ホモトピーファイブレーションの包含写像の懸垂が左ホモトピー逆写像をもつとき, 全空間の懸垂がファイバーと底空間を用いて分解されることを示し, $\Delta_K(X)$ に応用する.

1 について: $2(\dim K + 1) < m$ という条件から, 任意の点 $(x_1, \dots, x_m) \in \Delta_K(X)$ の成分のうち半分より多くが X の同じ点であることがわかる. このような点を対応させることにより, 連続写像 $\pi: \Delta_K(X) \rightarrow X$ を得る. この写像を K の単体 σ に対して $\Delta_\sigma(X)$ に制限したものは射影 $X^{|\sigma|+1} \rightarrow X$ と同一視される. つまり, π は共通の底空間をもつファイブレーションの和となり, 一般にこのように構成されるものはホモトピーファイブレーションであることが知られている. ([F, Proposition, pp.180] を参照) よって, $\pi: \Delta_K(X) \rightarrow X$ はホモトピーファイブレーションである.

2 について: まず, X がホップ空間のときに左ホモトピー逆元を直接構成する. (これは懸垂せずにつくれる) 次に一般の場合をこの特別な場合

に懸垂写像 $E = \Omega\Sigma$ を通して帰着させる. 1 でつくったホモトピーファイブレーションのファイバーは多面体積と呼ばれる空間で, この空間は懸垂すると分解することが知られている. ([BBCG] 参照) この分解が上の帰着を可能にしている.

3 について: ホモトピーファイブレーション $F \xrightarrow{j} E \xrightarrow{\pi} B$ に対して, Σj の左ホモトピー逆写像 r が存在するとする. $f \in H^*(F)$ に対して, $\bar{f} = \Sigma^{-1}r^*(\Sigma f) \in H^*(E)$ は

$$j^*(\bar{f}) = f$$

をみたす. よって, F が有限型なら Leray-Hirsch の定理より, 合成

$$\begin{aligned} \Sigma E &\xrightarrow{\text{pinch}} \Sigma E \vee \Sigma E \vee \Sigma E \xrightarrow{\Sigma\pi \vee r \vee \Delta} \Sigma B \vee \Sigma F \vee \Sigma(E \wedge E) \\ &\xrightarrow{1 \vee 1 \vee (\pi \wedge r)} \Sigma B \vee \Sigma F \vee \Sigma(B \wedge F) \end{aligned}$$

がコホモロジーで同型になることがわかる. ここで, Δ は対角写像である. F が一般の場合も少し工夫すると上の合成写像がホモロジーで同型になることがわかる. よって, J.H.C. Whitehead の定理より上の合成写像はホモトピー同値である. これを $\Delta_K(X)$ に応用すると, $\Delta_K(X)$ を X と多面体積の懸垂を用いて分解できる. 上で述べた通り, 多面体積の懸垂は分解するので, ここで得た分解はさらに細かく分解し, 主定理を得る.

参考文献

- [BBCG] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, and S. Gitler, *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Math. **225** (2010), 1634-1668.
- [F] E.D. Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics **1622**, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [IK] K. Iriye and D. Kishimoto, *Homotopy decomposition of diagonal arrangements*, preprint.

- [KS] S. Kallel and I. Saihi, *Homotopy groups of diagonal complements*, arXiv:1306.6272.
- [Ki] S. Kim, *Shellable complexes and topology of diagonal arrangements*, Discrete Comput. Geom. **40** (2008), 190-213.
- [Ko] D.N. Kozlov, *A class of hypergraph arrangements with shellable intersection lattice*, J. Comb. Theory, Ser. A **86** (1999), 169-176.
- [L] F. Labbasi, *Sur les diagonales épaisses et leurs complémentaires*, to appear in Homotopy and Related Structures.
- [M] M.S. Miller, *Massey products and k -equal manifolds*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2012**, no. 8, 1805-1821.
- [MW] M. Miller and M. Wakefield, *Formality of Pascal arrangements*, Proc. Amer. Math. Soc. **139** (2011), no. 12, 4461-4466.
- [PRW] I. Peeva, V. Reiner, and V. Welker, *Cohomology of real diagonal subspace arrangements via resolutions*, Compositio Math. **117** (1999), 99-115.
- [ZZ] G.M. Ziegler and R.T. Živaljević, *Homotopy types of subspace arrangements via diagrams of spaces*, Math. Ann. **295**, (1993), 527-548.