

非拡大写像および擬非拡大写像の不動点近似法について

千葉大学・法政経学部 青山 耕治

Koji Aoyama

Faculty of Law and Economics,
Chiba University

2010 *Mathematics Subject Classification.* 47J20, 47H09, 47H10.

Keywords and phrases. Viscosity approximation method, 非拡大写像, 不動点.

概要

Moudafi [17] によって導入された不動点近似法 (viscosity approximation method) に関する最近の結果 (主に文献 [5]) の紹介を行う。

1 はじめに

C を Hilbert 空間の閉凸集合, f を C 上の縮小写像, T を C 上の非拡大写像, $\{\lambda_n\}$ を $[0, 1]$ の数列とする。2000 年, Moudafi [17] は T のある不動点を近似するために, 次のような点列 $\{y_n\}$ の収束性を考察し, その応用例を示した。ここで, $\{y_n\}$ とは, 任意の $y_1 \in C$ および

$$y_{n+1} = \lambda_n f(y_n) + (1 - \lambda_n) T y_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

によって定義される C の点列である。その後, [17] の結果の一般化や種々の非線形問題への応用などを含むたくさんの研究成果が発表され現在に至っている (例えば, [18, 20] など)。

本稿では, Moudafi [17] の一般化, 特に, f を縮小写像の列 $\{f_n\}$ にした場合について結果とその応用例を取り上げる。なお, 研究集会の講演では, T が非拡大写像の列の場合の結果 (主に [5] の内容) と擬非拡大写像の列の場合の結果 (主に [10] の内容) を扱ったが, ページ数に制限があるため, 本稿では前者のみの紹介となる。

以下, Moudafi によって導入された不動点近似点列を, その一般化も含めて Moudafi 型点列と呼ぶことにする。

2 準備

以下, H を実 Hilbert 空間, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を H の内積, $\|\cdot\|$ を H のノルム, I を H 上の恒等写像, C を H の空でない閉凸部分集合, $\mathbb{N}$ を正の整数の集合とする。

写像 $S: C \rightarrow H$ が非拡大であるとは、すべての $x, y \in C$ に対して $\|Sx - Sy\| \leq \|x - y\|$ が成り立つときをいう。特に、非拡大写像 $S: C \rightarrow C$ を C 上の非拡大写像という。写像 $f: C \rightarrow C$ が縮小写像であるとは、 $\theta \in [0, 1)$ が存在し、すべての $x, y \in C$ に対して $\|f(x) - f(y)\| \leq \theta \|x - y\|$ が成り立つときをいう。このとき、 f を C 上の θ -縮小写像という。写像 $S: C \rightarrow H$ の不動点の集合を $\text{Fix}(S)$ で表す。つまり、 $\text{Fix}(S) = \{z \in C : Sz = z\}$ である。 S が非拡大のとき、 $\text{Fix}(S)$ は H の閉凸部分集合であることが知られている (例えば, [19] を参照)。

C は閉凸であるから、各 $x \in H$ に対して、 $\|z - x\| = \min\{\|y - x\| : y \in C\}$ となる点 $z \in C$ がただ一つ存在する。 x にその z を対応させる写像を P_C と表し、 P_C を H から C の上への距離射影という。距離射影 P_C は非拡大であることが知られている (例えば, [19] を参照)。

$\{S_n\}$ を C から H への写像の列とする。 $\{S_n\}$ が条件 (Z) を満たすとは、以下が成り立つときをいう [1, 3, 8, 9, 11, 12]。

$\{x_n\}$ が C の有界点列で $x_n - S_n x_n \rightarrow 0$ ならば、 $\{x_n\}$ の弱収積点 (weak cluster point) は $\{S_n\}$ の共通不動点である。

$\{S_n\}$ が条件 (R) を満たすとは、以下が成り立つときをいう [1, 4]。

C の空でない有界部分集合 D に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{y \in D} \|S_{n+1}y - S_n y\| = 0$ となる。

$\{S_n\}$ が $D \subset C$ で安定あるとは、任意の $z \in D$ に対して $\{S_n z : n \in \mathbb{N}\}$ が一点集合になるときをいう。

後で使う補助定理を列挙しておく。

補助定理 2.1 ([5, Lemma 2.2]). C_1, C_2 を H の空でない閉凸部分集合、 $\{S_n\}$ を C_1 から H への非拡大写像列、 $\{T_n\}$ を C_2 から H への非拡大写像列とする。 $\{S_n\}$ および $\{T_n\}$ は条件 (R) を満たし、すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $C_1 \supset T_n(C_2)$ であり、 $\{T_n\}$ の共通不動点が存在すると仮定する。このとき、 $\{S_n T_n\}$ は条件 (R) を満たす。

補助定理 2.2 ([5, Lemma 2.3]). $\{S_n\}$ を C から H への非拡大写像列、 $\{\gamma_n\}$ を $[0, 1]$ の数列とする。 $\gamma_{n+1} - \gamma_n \rightarrow 0$ であり、 $\{S_n\}$ が条件 (R) を満たし、 $\{S_n\}$ の共通不動点が存在すると仮定する。このとき、 $\{\gamma_n I + (1 - \gamma_n) S_n\}$ は条件 (R) を満たす。

A を H から H への集合値写像とする。 A と A のグラフ $\{(x, x') \in H \times H : x' \in Ax\}$ を同一視し、 $A \subset H \times H$ と表す。 A が単調 (monotone) 作用素であるとは、すべての

$(x, x'), (y, y') \in A$ に対して $\langle x - y, x' - y' \rangle \geq 0$ が成り立つときをいう。単調作用素 A が極大であるとは、以下が成り立つときをいう。

$B \subset H \times H$ が単調作用素で $A \subset B$ ならば、 $A = B$ である。

$A \subset H \times H$ を極大単調作用素、 $\rho > 0$ とする。このとき、 $(I + \rho A)^{-1}$ は、 H から $\text{dom}(A) = \{x \in H : Ax \neq \emptyset\}$ の上への一価写像であることが知られている。写像 $(I + \rho A)^{-1}$ は A のリゾルベント (resolvent) とよばれ、 J_ρ で表す。 J_ρ は非拡大であり、 $\text{Fix}(J_\rho) = A^{-1}0 = \{x \in H : Ax \ni 0\}$ であることが知られている (例えば, [19] を参照)。

3 非拡大写像列に関する収束定理

本節では、縮小写像の列を伴った Moudafi 型点列の収束性に関する結果を紹介する。まず、Moudafi 型点列と Halpern 型点列 [16] の関係についての結果 (定理 3.1) を述べる。次に、その結果と Halpern 型点列に関する既知の結果 (定理 3.2 および 3.4) を使い、Moudafi 型点列に関する収束定理を二つ示す (定理 3.3 および 3.5)。

以下、 H を実 Hilbert 空間、 C を H の空でない閉凸部分集合、 $\{T_n\}$ を C 上の非拡大写像列、 $\{\lambda_n\}$ を $[0, 1]$ の数列、 $\theta \in [0, 1)$ とする。

[18] の手法を使うと、次の結果が得られる。

定理 3.1 ([5, Theorem 3.1]). F を C の空でない閉凸部分集合とし、 $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty$ を仮定する。このとき、以下は同値である。

- (1) 任意の $(x, u) \in C \times C$ に対して、 $x_1 = x$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (1 - \lambda_n) T_n x_n \quad (3.1)$$

で定義される点列 $\{x_n\}$ が $P_F(u)$ へ強収束する。

- (2) $y \in C$ 、 $\{f_n\}$ が F で安定な C 上の θ -縮小写像列ならば、 $y_1 = y$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = \lambda_n f_n(y_n) + (1 - \lambda_n) T_n y_n \quad (3.2)$$

で定義される点列 $\{y_n\}$ が $P_F \circ f_1$ の不動点へ強収束する。

この定理の仮定のもとで、 $P_F \circ f_1$ は F 上の縮小写像であるから、その不動点 $w \in F$ が一意に存在する。また、 $\{f_n\}$ は F で安定だから、すべての $m \in \mathbb{N}$ に対して $P_F \circ f_1(w) = P_F \circ f_m(w)$ である。

定理 3.1 の $\{T_n\}$ と $\{\lambda_n\}$ にいくつかの条件を仮定し, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(T_n)$ とすれば, 定理 3.1 の (1) が成り立つ。例えば, 次の結果が知られている [2, 3, 7]。

定理 3.2. $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(T_n) \neq \emptyset$ とし, $\{\lambda_n\}$ は $[0, 1]$ の数列で

$$\lambda_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty \text{ および } \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < \infty$$

を満たし, $\{T_n\}$ は条件 (Z) を満たすと仮定する。また, すべての有界な部分集合 $D \subset C$ に対して

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sup\{\|T_{n+1}z - T_nz\| : z \in D\} < \infty$$

を仮定する。このとき, 定理 3.1 の (1) が成り立つ。

定理 3.1 と 3.2 より, 直ちに次の結果が得られる。

定理 3.3 ([5, Theorem 3.4]). $\{T_n\}$, F および $\{\lambda_n\}$ は定理 3.2 と同じとし, $\{f_n\}$ を F で安定な C 上の θ -縮小写像列とする。点列 $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して (3.2) で定義する。このとき, $\{y_n\}$ は $P_F \circ f_1$ の不動点に強収束する。

また, 次の結果も知られている [1, 4]。

定理 3.4. $\{S_n\}$ を C 上の非拡大写像列, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(S_n) \neq \emptyset$ とする。 $\{\lambda_n\}$ と $\{\beta_n\}$ は $[0, 1]$ の数列で

$$\lambda_n \rightarrow 0, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n = \infty, 0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} \beta_n < 1$$

を満たすとする。さらに, $\{S_n\}$ は条件 (Z) および (R) を満たすとする。 $x, u \in C$ とし, 点列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$x_{n+1} = \lambda_n u + (1 - \lambda_n)((1 - \beta_n)x_n + \beta_n S_n x_n)$$

で定義する。このとき, $\{x_n\}$ は $P_F(u)$ に強収束する。

定理 3.1 および 3.4 を使うと次の結果が得られる。

定理 3.5 ([5, Theorem 3.6]). $\{S_n\}$, F , $\{\lambda_n\}$ および $\{\beta_n\}$ は定理 3.4 と同じとする。 $\{f_n\}$ を F で安定な C 上の θ -縮小写像列とする。点列 $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$y_{n+1} = \lambda_n f_n(y_n) + (1 - \lambda_n)((1 - \beta_n)y_n + \beta_n S_n y_n)$$

で定義する。このとき, $\{y_n\}$ は $P_F \circ f_1$ の不動点に強収束する。

証明. $T_n = (1 - \beta_n)I + \beta_n S_n$ とおくと, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して, T_n は非拡大であり, $y_{n+1} = \lambda_n f_n(y_n) + (1 - \lambda_n)T_n y_n$ である. 定理 3.4 より, 定理 3.1 の (1) が成り立つことがわかる. したがって, 定理 3.1 より結論が示せた. $\square$

4 零点問題と不動点問題

本節では, 前節の定理 3.5 を使って, [14, Theorem 3.1] を一般化した次の定理を証明する. 前節に引き続き, H を実 Hilbert 空間, C を H の空でない閉凸部分集合, $\{T_n\}$ を C 上の非拡大写像列, $\theta \in [0, 1)$ とする.

定理 4.1 ([5, Theorem 5.1]). $A \subset H \times H$ を極大単調作用素, f を C 上の θ -縮小写像とし, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ および $\{\gamma_n\}$ を $[0, 1)$ の数列, $\{\rho_n\}$ を正の数列とし,

- $\text{dom}(A) \subset C$, $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(T_n) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$;
- $\alpha_n \rightarrow 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$, $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \beta_n$, $\sup_n \beta_n < 1$, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\alpha_n + \beta_n \leq 1$;
- $0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \gamma_n$, $\sup_n \gamma_n < 1$, $\gamma_{n+1} - \gamma_n \rightarrow 0$;
- $\inf_n \rho_n > 0$, $\rho_{n+1} - \rho_n \rightarrow 0$

が成り立つとする. さらに, すべての $m \in \mathbb{N}$ と空でない有界集合 $D \subset C$ に対して,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} \|T_n z - T_m T_n z\| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} \|T_{n+1} z - T_m T_n z\| = 0 \quad (4.1)$$

が成り立つとする. 点列 $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$y_{n+1} = \alpha_n f(V_n y_n) + (1 - \alpha_n - \beta_n) y_n + \beta_n T_n V_n y_n \quad (4.2)$$

で定義する. ここで, $V_n = \gamma_n I + (1 - \gamma_n)T_n J_{\rho_n}$ であり, J_{ρ_n} は A のリゾルベントである. このとき, $\{y_n\}$ は $P_F \circ f$ の不動点に強収束する.

証明. $\gamma_n \neq 1$ であり, $\text{Fix}(T_n) \cap \text{Fix}(J_{\rho_n}) = \text{Fix}(T_n) \cap A^{-1}0 \neq \emptyset$ であるから, [8, Corollary 3.9] と [9, Corollary 3.6] より, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\text{Fix}(V_n) = \text{Fix}(T_n J_{\rho_n}) = \text{Fix}(T_n) \cap \text{Fix}(J_{\rho_n}) = \text{Fix}(T_n) \cap A^{-1}0$$

および

$$\text{Fix}(T_n V_n) = \text{Fix}(T_n) \cap \text{Fix}(V_n) = \text{Fix}(V_n)$$

が成り立つ。したがって,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(T_n V_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(V_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(T_n) \cap A^{-1}0 = F \neq \emptyset \quad (4.3)$$

を得る。

各 V_n は非拡大であるから, 各 $f \circ V_n$ は θ -縮小写像である。(4.3) より, すべての $z \in F$ に対して $f(V_n z) = f(z)$ であるから, $\{f \circ V_n\}$ は F で安定である。

次に, $\{T_n V_n\}$ が条件 (R) を満たすことを示す。 D を C の空でない有界部分集合とする。(4.1) より,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} \|T_{n+1}z - T_n z\| \\ \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} \|T_{n+1}z - T_1 T_n z\| + \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{z \in D} \|T_1 T_n z - T_n z\| = 0 \end{aligned}$$

であるから, $\{T_n\}$ は条件 (R) を満たす。また, [4, Example 4.2] より, $\{J_{\rho_n}\}$ が条件 (R) を満たしていることが知られている。よって, 補助定理 2.1 および 2.2 を使うと, $\{T_n J_{\rho_n}\}$, $\{V_n\}$ および $\{T_n V_n\}$ が条件 (R) を満たすことがわかる。

次に, $\{T_n V_n\}$ が条件 (Z) を満たすことを示す。 $\{z_n\}$ を C の有界な点列で $z_n - T_n V_n z_n \rightarrow 0$ とする。また, $\{z_{n_i}\}$ を $\{z_n\}$ の部分列で $z_{n_i} \rightarrow z$ とする。このとき, $z \in F$ を示せばよい。[8, Theorem 3.10] より, $z_n - T_n z_n \rightarrow 0$ および $z_n - V_n z_n \rightarrow 0$ である。 $\{z_n\}$ は有界だから C の有界部分集合 D が存在し, すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して $z_n \in D$ となる。 $m \in \mathbb{N}$ を固定するとき, (4.1) および $z_n - T_n z_n \rightarrow 0$ より, $n \rightarrow \infty$ のとき,

$$\begin{aligned} \|z_n - T_m z_n\| &\leq \|z_n - T_n z_n\| + \|T_n z_n - T_m T_n z_n\| + \|T_m T_n z_n - T_m z_n\| \\ &\leq 2 \|z_n - T_n z_n\| + \sup_{y \in D} \|T_n y - T_m T_n y\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

である。 $I - T_m$ は demiclosed であるから [15, p. 109], $z \in \text{Fix}(T_m)$ 。よって, $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{Fix}(T_n)$ である。一方, $z_n - V_n z_n \rightarrow 0$ と [9, Corollary 3.2] より, $z_n - T_n J_{\rho_n} z_n \rightarrow 0$ であるから, [8, Theorem 3.10] より, $z_n - J_{\rho_n} z_n \rightarrow 0$ 。ゆえに, $\{J_{\rho_n}\}$ が条件 (Z) を満たすことに注意すると^{*1}, $z \in A^{-1}0$ となる。以上より, $z \in F$ が示せた。

最後に, 仮定より,

$$y_{n+1} = \alpha_n f(V_n y_n) + (1 - \alpha_n) \left(\left(1 - \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n}\right) y_n + \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n} T_n V_n y_n \right)$$

であり,

^{*1} 例えば, [8, Lemma 5.1], [11, Lemma 2.1], [13, Lemma 2.4] など。

$$0 < \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n}, \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\beta_n}{1 - \alpha_n} < 1$$

であるから, 定理 3.5 より, $\{y_n\}$ は $P_F \circ f \circ V_1$ の不動点 w に強収束する。ここで, $V_1 w = w$ だから w は $P_F \circ f$ の不動点である。□

註 1. [14] では, 極大単調作用素の零点問題ではなく, 関数 $\phi: C \times C \rightarrow \mathbb{R}$ に関する均衡問題を考え, ϕ のリゾルベントを使った収束定理 [14, Theorem 3.1] を示している。[6] によれば, そのような均衡問題を, ある極大単調作用素 $A \subset H \times H$ の零点問題と見なすことができ, その際 ϕ のリゾルベントと A のリゾルベントが一致することが知られている。したがって, 定理 4.1 は [14, Theorem 3.1] の一般化といえる。

註 2. 定理 4.1 では, [14, Theorem 3.1] の一般化を得るために複雑な点列を採用したが, もっと簡素な点列で $P_F \circ f$ の不動点を近似することが可能である。例えば, $\{\lambda_n\}$ および $\{\beta_n\}$ を定理 3.5(または定理 3.4) と同じとすると, 定理 4.1 の設定のもとで, $\{y_n\}$ を $y_1 \in C$ および $n \in \mathbb{N}$ に対して,

$$y_{n+1} = \lambda_n f(y_n) + (1 - \lambda_n)((1 - \beta_n)y_n + \beta_n T_n J_{\rho_n} y_n)$$

で定義すれば, 定理 4.1 と同様な方法で (しかももっと簡単に), $\{y_n\}$ が $P_F \circ f$ の不動点に強収束することを示せる。

参考文献

- [1] K. Aoyama, *An iterative method for fixed point problems for sequences of nonexpansive mappings*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 1–7.
- [2] ———, *An iterative method for a variational inequality problem over the common fixed point set of nonexpansive mappings*, Nonlinear analysis and convex analysis, Yokohama Publ., Yokohama, 2010, pp. 21–28.
- [3] ———, *Asymptotic fixed points of sequences of quasi-nonexpansive type mappings*, Banach and function spaces III, Yokohama Publ., Yokohama, 2011, pp. 343–350.
- [4] K. Aoyama and Y. Kimura, *Strong convergence theorems for strongly nonexpansive sequences*, Appl. Math. Comput. **217** (2011), 7537–7545.
- [5] ———, *Viscosity approximation methods with a sequence of contractions*, Cubo **16** (2014), 9–20 (English, with English and Spanish summaries).
- [6] K. Aoyama, Y. Kimura, and W. Takahashi, *Maximal monotone operators and maximal monotone functions for equilibrium problems*, J. Convex Anal. **15** (2008), 395–409.

- [7] K. Aoyama, Y. Kimura, W. Takahashi, and M. Toyoda, *Approximation of common fixed points of a countable family of nonexpansive mappings in a Banach space*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 2350–2360.
- [8] ———, *On a strongly nonexpansive sequence in Hilbert spaces*, J. Nonlinear Convex Anal. **8** (2007), 471–489.
- [9] ———, *Strongly nonexpansive sequences and their applications in Banach spaces*, Fixed Point theory and its Applications, Yokohama Publ., Yokohama, 2008, pp. 1–18.
- [10] K. Aoyama and F. Kohsaka, *Viscosity approximation process for a sequence of quasi-nonexpansive mappings*, Fixed Point Theory Appl. (2014), 2014:17, 11.
- [11] K. Aoyama, F. Kohsaka, and W. Takahashi, *Shrinking projection methods for firmly nonexpansive mappings*, Nonlinear Anal. **71** (2009), e1626–e1632.
- [12] ———, *Strongly relatively nonexpansive sequences in Banach spaces and applications*, J. Fixed Point Theory Appl. **5** (2009), 201–224.
- [13] ———, *Strong convergence theorems for a family of mappings of type (P) and applications*, Nonlinear analysis and optimization, Yokohama Publ., Yokohama, 2009, pp. 1–17.
- [14] L. C. Ceng, A. Petrusel, and J. C. Yao, *Iterative approaches to solving equilibrium problems and fixed point problems of infinitely many nonexpansive mappings*, J. Optim. Theory Appl. **143** (2009), 37–58.
- [15] K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in metric fixed point theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 28, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [16] B. Halpern, *Fixed points of nonexpanding maps*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 957–961.
- [17] A. Moudafi, *Viscosity approximation methods for fixed-points problems*, J. Math. Anal. Appl. **241** (2000), 46–55.
- [18] T. Suzuki, *Moudafi's viscosity approximations with Meir-Keeler contractions*, J. Math. Anal. Appl. **325** (2007), 342–352.
- [19] W. Takahashi, *Introduction to nonlinear and convex analysis*, Yokohama Publ., Yokohama, 2009.
- [20] H.-K. Xu, *Viscosity approximation methods for nonexpansive mappings*, J. Math. Anal. Appl. **298** (2004), 279–291.