

非線形フィルターの近似について

九大工 国田 寛 (Hiroshi Kunita)

非線形フィルターの安定性, ロバストネスの系統的研究はあまり見られない. 本報告ではこの問題を近似の立場から論じたい. なお線形フィルター理論ではこの種の問題は Kalman フィルターの理論から比較的容易に解くことが出来る.

離散時間モデルと連続時間モデルに分けて論ずる: とにする.

1. 離散時間モデル

System model 確率差分式

$$x(k) = F_{k-1}(x(k-1)) + G_{k-1}(x(k-1))\eta(k), \quad k=1, \dots, N \text{ on } \mathbb{R}^d$$

ただし $F_k(x)$ は d -ベクトル連続関数, $G_k(x)$ は $d \times r$ -行列連続関数であり, $\eta = (\eta(1), \dots, \eta(N))$ は r -ベクトル確率過程で初期値 $x(0)$ は η と独立とする.

Measurement model

$$y(k) = h_k(x(k)) + w(k), \quad k=1, \dots, N \text{ on } \mathbb{R}^e$$

ただし $h_k(\cdot)$ は e-バタトル連続関数, $\underline{w} = (w(1), \dots, w(N))$ は e-バタトル確率過程で $\underline{z}$ とは独立.

Non-linear filter $\hat{x}(k)$: $x(k)$ の測定値 $y(i)$, $0 \leq i \leq k$ にもとづく最小二乗推定. すなわち条件付平均

$$\hat{x}(k) = E[x(k) | y(0), \dots, y(k)].$$

確率過程 $\underline{z} = (z(1), \dots, z(N))$ はシステムに作用するランダムな力を表わしており, 確率過程 $\underline{w} = (w(1), \dots, w(N))$ は測定にもなる雑音を表わしている. 一般にこれらの統計的性質 (分布, 平均, 分散等) は必ずしも正確に知られることは出来ない. 実用上はこれらを white noise (白色雑音) とすなわち $z(1), \dots, z(N)$ (又は $w(1), \dots, w(N)$) が独立かつ正規分布にしたがうとみなすことが多い. しかしこのことは $\underline{z}$ 及び $\underline{w}$ の分布が white noise に近いとき, フィルターの状態 $\hat{x}(k)$ が $\underline{z}$ 及び $\underline{w}$ をちょうど白色雑音とみなしたときのフィルターの値に近いことを暗に仮定していることに他ならない. この仮定が正しいかどうかを論ずるのがこの報告の目的である.

この問題を正確に論ずるためには分布の定義が必要である.

確率過程 $\underline{z}$ の分布は R^N 上の確率測度 μ で

$$\mu(E) = P\{\omega; (z(1), \dots, z(N)) \in E\}, \quad E \text{ は } R^N \text{ のボレル集合,}$$

によって定義する. 確率過程 $\underline{z}$ を強調するために μ_z とかく.

同様に確率過程 $\{X_t\}$ の分布をそれぞれ μ_x 及び μ_y と表す。また初期値 $X(0)$ の分布を μ_0 とかく。

注意 分布 μ_x は関数 $E=(F_k)$, $\mathcal{E}=(G_k)$ 及び分布 μ_x, μ_0 によって一意に定まる。即ち $\mu_x = \mu_x(E, \mathcal{E}, \mu_x, \mu_0)$ 。

フィルタ-の条件付分布 $\pi_k, k=0, \dots, N$ は次の様に定義する:

$$\pi_k(E) = P\{X(k) \in E \mid Y(0), \dots, Y(k)\} \quad (\text{条件付確率}).$$

注意: フィルタ-の条件付分布 π_k は μ_x, μ_y 及び $h=(h_k)$ によって一意に定まる。即ち $\pi_k = \pi_k(\mu_x, \mu_y, h)$ 。

定義 R^n 上の分布列 $\{\mu^n, n=1, 2, \dots\}$, μ 及び R^M 上の任意の有界連続関数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_M)$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(x) \mu^n(dx) = \int f(x) \mu(dx)$$

が成り立つとき, $\{\mu^n, n=1, 2, \dots\}$ は μ に弱収束するといふ。

定理1 システムの分布 $\mu_x = \mu_x(E, \mathcal{E}, \mu_x, \mu_0)$ は $E, \mathcal{E}, \mu_x, \mu_0$ について連続である。即ち E^n 及び $\mathcal{E}^n$ が E 及び $\mathcal{E}$ に広義一様収束し, $\mu_x^n, \mu_0^n, n=1, 2, \dots$ が μ_x, μ_0 に弱収束すれば $\mu_x(E^n, \mathcal{E}^n, \mu_x^n, \mu_0^n)$ は $\mu_x(E, \mathcal{E}, \mu_x, \mu_0)$ に弱収束する。

証明: 容易なため省略。

定理2 フィルタ-の条件付分布 $\pi_k = \pi_k(\mu_x, \mu_y, h)$ は次の意味で μ_x, μ_y, h について連続である:

(a) $\mu_x^n, n=1, 2, \dots$ は μ_x に弱収束する。

(b) $\mu_{\underline{x}}^n, n=1, 2, \dots$ の密度関数列 $f^n, n=1, 2, \dots$ は $\mu_{\underline{x}}$ の密度関数 f に各点収束し, かつ $\sup_{n, x} |f_n/f| < \infty \exists 4T2d$.

(c) $\underline{h}^n, n=1, 2, \dots$ は $\underline{h}$ に広義-様収束する.

このとき $\pi_h(\mu_{\underline{x}}^n, \mu_{\underline{y}}^n, \underline{h}^n)$ は $\pi_h(\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{y}}, \underline{h})$ に弱収束する (4.5)

証明. フィルタ- π_h についての likelihood ratio formula が成り立つ (Jazwinski)

$$\begin{aligned} & \pi_h(A)(y(0), \dots, y(k)) \\ &= \frac{\iint_{x(k) \in A} f(y(0)-h(x(0)), \dots, y(k)-h(x(k))) \mu_{\underline{x}}(dx(0) \dots dx(k))}{\iint f(y(0)-h(x(0)), \dots, y(k)-h(x(k))) \mu_{\underline{x}}(dx(0) \dots dx(k))} \end{aligned}$$

これを用いて証明は容易.

2. 連続時間モデル

System model 確率(常)微分方程式の解:

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x) + G(t, x) \dot{\eta}(t) \quad \text{in } \mathbb{R}^d$$

ただし $F(t, x)$ は $d-1$ 次元連続関数, $G(t, x)$ は $d \times r$ -行列連続関数で x についての $\eta(t)$ は r -次元 colored noise または white noise. ただし white noise のときは次の Itô-Stratonovich の確率微分方程式を解釈する.

$$d\eta(t) = F(t, x(t)) dt + G(t, x(t)) \circ d\eta(t).$$

ただし $y(t)$ は δ -1'フル Wiener 過程

measurement model

$$y(t) = h(t, x(t)) + w(t)$$

ただし $h(t, x)$ は $\mathbb{R}$ -1'フル 連続関数, $w(t)$ は $y(t) = \delta$ なら $\mathbb{R}$ -1'フル colored noise 又は white noise

Non-linear filter: $x(t) = E[x(t) | y(s): 0 \leq s \leq t]$. 条件分布は

$$\pi_t(A) = P(x(t) \in A | y(s): 0 \leq s \leq t)$$

と確率過程 $\underline{x} = (x(t): 0 \leq t \leq T)$, $\underline{u} = (u(t): 0 \leq t \leq T)$, $\underline{w} = (w(t): 0 \leq t \leq T)$ の分布は連続関数の空間に定義する

$W^d = C([0, T]; \mathbb{R}^d) = \{ [0, T] \text{ から } \mathbb{R}^d \text{ の連続写像の全体} \}$
とあり, W の ω は w で表わす. w の $t \in [0, T]$ での値は $w(t)$ と
かく W^d は sup norm

$$\|w\| = \sup_t |w(t)|$$

により Banach 空間である. W^d の位相的ホレル集合体を $\mathcal{B}(W^d)$ で表わす. 確率過程 $\underline{x}$ の分布は $(W^d, \mathcal{B}(W^d))$ 上の確率測度で次のように定義する.

$$\mu_{\underline{x}}(A) = P\{\omega; \underline{x}(\omega) \in A\}$$

確率過程 $\underline{x}$ 及び $\underline{u}$ の分布を $\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{u}}$ とかく. $\mu_{\underline{x}}$ は

$$(\underline{F}, \underline{G}, \mu_{\underline{x}}, \mu_0) \text{ により一意に定まる. 即ち } \mu_{\underline{x}} = \mu_{\underline{x}}(\underline{F}, \underline{G}, \mu_{\underline{x}}, \mu_0)$$

分布 $\mu_{\underline{x}}$ は $(\underline{F}, \underline{G}, \mu_{\underline{x}}, \mu_0)$ により一意に定まる. 即ち $\mu_{\underline{x}} = \mu_{\underline{x}}(\underline{F}, \underline{G}, \mu_{\underline{x}}, \mu_0)$

$(W^d, \mathcal{B}(W^d))$ 上の確率測度の列 $\mu^n, n=1, 2, \dots$, μ の弱収束も、有限次元の場合と同様に定義する。即ち W^d 上の任意の有界連続関数 $f(w)$ に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f(w) \mu^n(dw) = \int f(w) \mu(dw)$$

を満たすとき、 μ^n は μ に弱収束するといふ。

分布 $\mu_{\pm}$ の $\mu_{\pm}, \mu_{\pm}, \mu_{\pm}, \mu_0$ に関する連続性は離散時間モデルの様に簡単ではない。2 の分布を固定して、 $\mu_{\pm}^n, \mu_{\pm}^n$ が $\mu_{\pm}, \mu_{\pm}$ に広義一致収束する場合とか、 μ_0^n が μ_0 に弱収束する場合に、対応する分布 $\mu_{\pm}^n, n=1, 2, \dots$ が $\mu_{\pm}$ に弱収束することは容易に確かめられる。しかし 1 の分布列 $\mu_{\pm}^n, n=1, 2, \dots$ が $\mu_{\pm}$ に弱収束しても対応して $\mu_{\pm}^n, n=1, 2, \dots$ が $\mu_{\pm}$ に弱収束するとは必ずしも言えない。更に強く混合性の仮定が必要になる。

$\mu_{\pm}$ の混合性. $\mathcal{F}_{s,t} = \sigma(\gamma(u); s \leq u \leq t)$ とおき, mixing rate を

$$\beta(t) = \sup_s \sup_{A \in \mathcal{F}_{0,s}, B \in \mathcal{F}_{s+t,T}} |\mu_{\pm}(A \cap B) - \mu_{\pm}(A) \mu_{\pm}(B)|$$

によって定義する。

定理 3. System model を定義する colored noise の分布の列 $\mu_{\pm}^n, n=1, 2, \dots$ が white noise (= Wiener 過程) の分布 $\mu_{\pm}$ に弱収束するとする。 $\mu_{\pm}^n$ の mixing rate の列 $\beta^n(t)$ が

$$\sup_{n,t} \left(\int_0^T \beta_n(z) \frac{1}{t+2\alpha} dz \right) \left(\int |g(t)|^8 \mu_{\underline{x}}^n(d\eta) \right)^{\frac{1}{4}} < \infty$$

より得ることは、確率常微分方程式で与えられるシステム $x(t)$ の分布列 $\mu_{\underline{x}}^n$, $n=1,2,\dots$ は white noise にもとづく Sierakovich 方程式の解の分布 $\mu_{\underline{x}}$ に弱収束する。

証明は Kunita [5] を参照せよ。

つぎにフィルタ - π_t は $(\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{y}}, h)$ の関数である。 $\mu_{\underline{x}}, \mu_{\underline{y}}$ を固定すれば、関数 h が h に広義 - 弱収束するとき、対応するフィルタ - 列 π_t^n , $n=1,2,\dots$ は π_t に弱収束することは容易にわかる。 $\mu_{\underline{x}}$ に固着する連続性は次の定理からわかる。

定理 4. measurement の noise は white noise とするシステムモデルの分布列 $\mu_{\underline{x}}^n$, $n=1,2,\dots$ が $\mu_{\underline{x}}$ に弱収束すれば、 $\mu_{\underline{x}}$ に対応するフィルタ - π_t^n は $\mu_{\underline{x}}$ に対応するフィルタ - π_t に弱収束する (4.5)。

証明には Kallianpur-Siebel の公式を用いる。 ([2] または [3])

$$\pi_t(A) = \frac{\int_{x(t) \in A} \exp \left\{ \int_0^t h(s, x(s)) y(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t |h(s, x(s))|^2 ds \right\} \mu_{\underline{x}}(dx)}{\int \exp \left\{ \int_0^t h(s, x(s)) y(s) ds - \frac{1}{2} \int_0^t |h(s, x(s))|^2 ds \right\} \mu_{\underline{x}}(dx)}$$

注意: π_t の $\mu_{\underline{x}}$ に固着する連続性は未解決である。

文 献

1. A. H. Jazwinski, Stochastic processes and filtering theory, Academic Press, 1970.
2. G. Kallianpur, Stochastic filtering theory, Springer-Verlag, 1980.
3. 国田 寛、確率過程の推定、産業図書、1976.
4. H. Kunita, On the convergence of solutions of stochastic ordinary differential equations as stochastic flows of diffeomorphisms, Osaka J. Math. 21 (1984), 883-911.
5. H. Kunita, Convergence of stochastic flows connected with stochastic ordinary differential equations, Stochastics, 投稿中.
6. H. J. Kushner and H. Huang, Approximating multiple Ito integrals with "Band Limited" process, Stochastics 14 (1985), 115-148.