

局所等質空間のモジュライ空間と 大域的な等質空間に局所等長にならない 局所等質空間

お茶の水女子大学 理学部 塚田和美
Kazumi TSUKADA

序

リーマン多様体の局所不変量として本質的なものは、曲率テンソル R 及びその共変微分 $\nabla R, \nabla^2 R, \dots, \nabla^i R, \dots$ である。曲率テンソル及びその共変微分のデータからリーマン多様体の局所的な描像を知ることが局所微分幾何の一つの課題である。この講演では、曲率テンソル及びその共変微分とリーマン多様体の等質性あるいは局所等質性との関わりを取り上げる。

まず等質空間及び局所等質空間の定義を思い起こそう。

定義 リーマン多様体 M は、その任意の 2 点 p, q に対して $\varphi(p) = q$ をみたす等長変換 φ が存在するとき、等質空間 (*homogeneous space*) であると言われる。

定義 リーマン多様体 M は、その任意の 2 点 p, q に対して p の近傍 U, q の近傍 V 及び U から V への等長写像 φ で $\varphi(p) = q$ をみたすものが存在するとき、局所等質空間 (*locally homogeneous space*) であると言われる。

Kowalski がミステリアスな現象 (少なくとも私にはそのように感じられる) を発見して以来 (1990 年)、この二つの概念は局所微分幾何の観点からさえも微妙に異なっているものとして認識されている。この講演の後半でその話題を取り上げる。

内容

1. Singer の無限小等質空間の理論
2. 局所等質空間のモジュライ空間
3. (大域的な) 等質空間に局所等長にならない局所等質空間

1 Singer の無限小等質空間の理論

リーマン多様体 M が等質空間 (あるいは局所等質空間) になるための十分条件を与える Singer の定理の概要を述べよう。

リーマン多様体 M に対して次のような条件を考える。

定義 l を非負整数として次が成り立つとき、 $P(l)$ 条件をみたすという:
 M の任意の 2 点 p, q に対して $T_p M$ から $T_q M$ への線型等長写像 ϕ で

$$\phi^*(\nabla^i R)_q = (\nabla^i R)_p \quad i = 0, 1, \dots, l$$

をみたすものが存在する。

M が局所等質空間ならば、明らかに任意の l について $P(l)$ 条件をみたしている。局所等長写像の微分を ϕ とすればよい。

以下 M のリーマン計量を $\langle, \rangle$ で表す。 $\langle, \rangle$ に関して歪対称になる $T_p M$ の線型変換全体のなす Lie 環を $\mathfrak{so}(T_p M)$ で表す。非負整数 l に対して、 $\mathfrak{so}(T_p M)$ の Lie 部分環 $\mathfrak{g}_l(p)$ を次で定義する:

$$\mathfrak{g}_l(p) = \{ A \in \mathfrak{so}(T_p M) \mid A \cdot (\nabla^i R)_p = 0 \quad i = 0, 1, \dots, l \}$$

ここで A は $T_p M$ 上のテンソル代数に対して微分作用素として作用する。明らかに $\mathfrak{g}_l(p) \supseteq \mathfrak{g}_{l+1}(p)$ が成り立つ。 $k(p)$ を $\mathfrak{g}_{k(p)}(p) = \mathfrak{g}_{k(p)+1}(p)$ となる最初の整数とする。即ち

$$\mathfrak{so}(T_p M) \supseteq \mathfrak{g}_0(p) \supset \mathfrak{g}_1(p) \supset \mathfrak{g}_2(p) \supset \dots \supset \mathfrak{g}_{k(p)}(p) = \mathfrak{g}_{k(p)+1}(p)$$

ここで $\supset$ は真部分集合を表す。明らかに $k(p) \leq \frac{1}{2}n(n-1)$ ($\dim M = n$)。

Singer ([8]) に従って、次を定義する。

定義 ある点 $p \in M$ が存在して条件 $P(k(p)+1)$ をみたすリーマン多様体 M を無限小等質空間 (*infinitesimally homogeneous space*) という。

もし $P(l)$ 条件をみたしているとすると、 M の任意の 2 点 p, q に対し、 $\mathfrak{g}_i(p)$ と $\mathfrak{g}_i(q)$ ($i = 0, 1, \dots, l$) とは共役である。即ち $A \mapsto \phi A \phi^{-1}$ は $\mathfrak{g}_i(p)$ から $\mathfrak{g}_i(q)$ への Lie 環の同型を与える。従って M が無限小等質空間ならば、 $k(q)$ は点 $q \in M$ に依存しない定数になる。この値を k_M で表し、無限小等質空間 M の Singer 不変量 (*the Singer invariant*) と呼ぶ。

M が局所等質空間ならば、任意の l について $P(l)$ 条件をみたし、特に M は無限小等質空間になる。Singer ([8]) はこの逆を示した。

定理 1.1 連結無限小等質空間は局所等質空間である。

この定理の大域版は次のものである。

定理 1.1' 単連結完備無限小等質空間は等質空間である。

Singer がその論文中で述べたのは定理 1.1' である。しかしその証明をみれば、定理 1.1 が成り立つことはすぐ分かる。L.Nicolodi と F.Tricerri はより直接的な方法による定理 1.1 の別証明を与えた ([7])。さらに定理 1.1 の証明中の議論により次が分かる。

定理 1.2 M, M' を二つの局所等質空間とし、 $p \in M, p' \in M'$ に対して次の条件をみたす線型等長写像 $\phi: T_p M \rightarrow T_{p'} M'$ が存在すると仮定する:

$$\phi^*(\nabla^i R')_{p'} = (\nabla^i R)_p \quad i = 0, 1, \dots, k_M + 1$$

このとき p の近傍から p' の近傍への等長写像 φ で $\varphi(p) = p', \varphi_* p = \phi$ となるものが存在する。

これらの定理によって Singer 不変量は局所等質空間の局所微分幾何学的研究で重要な役割を果たすことが示唆される。私は、Singer 不変量について理解を深めたいと思っている。このためには、具体的な等質空間の Singer 不変量を決定もしくは評価することが不可欠である。しかし、私の知るところでは Singer 不変量が求められている等質空間はそれほど多くない。そこで、次元が低い場合に Singer 不変量を決定することを試みる。

3 次元等質空間に対して、 $\mathfrak{so}(3)$ の Lie 部分環の減少列で起こりうる最も長いものは、

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2) \supset \mathfrak{g}_1 = \{0\}.$$

である。従って、3 次元等質空間の Singer 不変量は高々 1 である。Y.Kiyota ([2]) は、すべての 3 次元等質空間について $\mathfrak{g}_0$ と $\mathfrak{g}_1$ を計算し、それらの Singer 不変量を決定した。

4 次元等質空間は、局所対称空間になるか左不変リーマン計量をもつ Lie 群に局所等長になることが知られている。後者の場合、 $\mathfrak{g}_i$ を直接計算し、その Singer 不変量を決定することは困難であるように思われる。ここでは一つだけ例を考察する。 $SL(2, \mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^2$ への通常の表現による半直積を $K = SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ で表す。 $H = SO(2)$ を $SL(2, \mathbb{R})$ の部分群、従って $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ の部分群としてみる。商多様体 $K/H = SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 / SO(2)$ に $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 不変なリーマン計量を導入する。すべての $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 不変なリーマン計量は互いに相似変換で移りあうことを注意しておこう。この例については、

$$\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(2) \oplus \mathfrak{so}(2), \mathfrak{g}_1 = \text{ad}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{h}$$

となる。ここで $\text{ad}_{\mathfrak{m}} \mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ における $\mathfrak{h}$ の補空間 $\mathfrak{m}$ への $\mathfrak{h}$ の随伴表現を表す。従って、 $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_2 = \dots$ となり、Singer 不変量は 1 である。さらに次が成り立つ。

命題 1.3 ([3]) M を 4 次元等質空間とし、 g_0 を先のように定義された $so(T_p M)$ の Lie 部分環とする。 $\dim g_0 \geq 2$ ならば、 M は局所対称空間であるか $SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2$ 不変な計量をもつ $K/H = SL(2, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2 / SO(2)$ に局所等長である。

系 4 次元等質空間の Singer 不変量が高々 1 である。

私はもっと多くの等質空間についてその Singer 不変量を知りたいと思っている。

2 局所等質空間のモジュライ空間

n 次元局所等質空間の局所等長類の集合を曲率テンソル及びその共変微分のデータによって記述することについて述べる。

n 次元局所等質空間 M とその点 p からなる pair (M, p) を考える。 $(M, p), (M', p')$ に対し、 p の近傍から p' の近傍への等長写像 f で $f(p) = p'$ をみたすものが存在するとき $(M, p) \sim (M', p')$ とおき、同値関係 $\sim$ を定義する。次元 n を固定して、上のような pairs の同値類全体の集合を $\mathcal{LH}(n)$ で表す。上の pair (M, p) に線型等長写像 $u : \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ (即ち p における orthonormal frame を指定する) を付け加えて triple (M, p, u) を考える。 $(M, p, u), (M', p', u')$ に対し、 p の近傍から p' の近傍への等長写像 f で $f(p) = p', f_* u = u'$ をみたすものが存在するとき $(M, p, u) \sim (M', p', u')$ とおき、同値関係 $\sim$ を定義する。次元 n を固定して、上のような triples の同値類全体の集合を $\mathcal{FLH}(n)$ で表す。 (M, p, u) に対し (M, p) を対応させることにより、自然な射影

$$\pi : \mathcal{FLH}(n) \longrightarrow \mathcal{LH}(n)$$

が定義できる。さらに $\mathcal{FLH}(n)$ には $O(n)$ の右からの作用が自然に定義できる。即ち $[(M, p, u)] \in \mathcal{FLH}(n), a \in O(n)$ に対し、

$$[(M, p, u)]a = [(M, p, ua)]$$

とおけばよい。明らかに $\pi([(M, p, u)]a) = \pi([(M, p, u)])$ 。また、 $\pi([(M, p, u)]) = \pi([(M', p', u')])$ ならば、 $a \in O(n)$ で $[(M', p', u')] = [(M, p, u)]a$ となるものが存在する。即ち $\mathcal{LH}(n)$ は $\mathcal{FLH}(n)$ の $O(n)$ -orbit space で π が対応する射影になっている。

次に曲率テンソルやその共変微分からなる空間を設定する。 $\mathbb{R}^n$ を通常の内積 $\langle, \rangle$ を備えた n 次元線型空間とする。 T_l^1 で $\mathbb{R}^n$ 上の $(1, 1)$ 型テンソルのなす線型空間を表す。 T_l^1 には $O(n)$ が自然に作用している。 $\mathcal{R}^0$ で $\mathbb{R}^n$

上の曲率テンソルのなす線型空間を表す。即ち次の恒等式をみたす (1, 3) 型テンソル R のなす空間である:

$$\begin{aligned} R(x, y)z &= -R(y, x)z, \\ \langle R(x, y)z, w \rangle &= -\langle R(x, y)w, z \rangle, \\ R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y &= 0. \end{aligned}$$

$\mathcal{R}^1$ は次の恒等式をみたす (1, 4) 型テンソル R のなす空間である:

$$\begin{aligned} R(v, \dots) &\in \mathcal{R}^0 \quad \text{for any } v \in \mathbb{R}^n, \\ R(x, y, z; w) + R(y, z, x; w) + R(z, x, y; w) &= 0. \end{aligned}$$

以下 $i \geq 2$ に対して帰納的に次のようにおく:

$$\mathcal{R}^i = \{R \in T_{3+i}^1 \mid R(v, \dots) \in \mathcal{R}^{i-1} \text{ for any } v \in \mathbb{R}^n\}.$$

各 $\mathcal{R}^i$ は T_{3+i}^1 の $O(n)$ 不変な部分空間になっている。

十分大きな d に対して写像 Φ を次で定義する:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{FLH}(n) &\longrightarrow \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^d \\ [(M, p, u)] &\longmapsto \Phi([(M, p, u)]) = (u^*R_p, u^*(\nabla R)_p, \dots, u^*(\nabla^d R)_p). \end{aligned}$$

$(M, p, u) \sim (M', p', u')$ であるときは $u'^*(\nabla^i R')_{p'} = u^*(\nabla^i R)_p$ となるので、 Φ は同値類の代表元の選び方によらず定義される。また、 $\Phi([(M, p, u)]a) = a^{-1}\Phi([(M, p, u)])$ が成立し、 Φ は $O(n)$ 同変写像である。従って次の図式が成立する:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{FLH}(n) & \xrightarrow{\Phi} & \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^d \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{LH}(n) & \xrightarrow[\tilde{\Phi}]{} & \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^d / O(n) \end{array}$$

整数 d はどのくらい大きく選べばよいだろうか? $\mathfrak{so}(n)$ の Lie 部分環の減少列

$$\mathfrak{so}(n) \supseteq \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \cdots \supset \mathfrak{g}_k$$

のうち最長となる場合の項の数 k を $k(n)$ とする。 $k(n)$ は Singer の無限小等質空間の理論において重要な意味をもつ数である。我々は各次元 n に対してこの数がどれほどになるか知りたい。Gromov はその著書 ([1] p.165) の中で $k(n) < \frac{3}{2}n - 1$ という評価を与えている。 $d \geq k(n) + 1$ となるように d を選べば、定理 1.2 により、 Φ は単射 従って $\tilde{\Phi}$ も単射となる。 $\mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^d$ 上で通常の位相を考え、 $\mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^d / O(n)$ に商位相を入れておく。 $\tilde{\Phi}$ を通して $\mathcal{LH}(n)$ に位相を導入することができ、自然に位相空間として扱うことができる。

$d \geq k(n)+2$ とする。このとき、 Φ の像は代数的な条件で記述される。これは、Singer によって証明なしに述べられ Nicolodi and Tricerri によって完全な証明が与えられた定理によっている。まず、記号を準備する。 $(R^0, R^1, \dots, R^d) \in \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^d$ が与えられたとき、写像 μ, ν を次で定義する:

$$\begin{aligned}\mu &: \mathfrak{so}(n) \longrightarrow \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^{d-1} \\ A &\longmapsto \mu(A) = (A \cdot R^0, A \cdot R^1, \dots, A \cdot R^{d-1}), \\ \nu &: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^{d-1} \\ X &\longmapsto \nu(X) = (R^1(X, \dots), R^2(X, \dots), \dots, R^d(X, \dots)).\end{aligned}$$

定理 2.1 ([7]) $(R^0, R^1, \dots, R^d) \in \mathcal{R}^0 \oplus \mathcal{R}^1 \oplus \dots \oplus \mathcal{R}^d$ ($d \geq k(n)+2$) に対し

て、 $(R^0, R^1, \dots, R^d)$ が Φ の像に含まれるための必要十分条件は次が成り立つことである:

- (i) $R^{i+2}(x, y, \dots) - R^{i+2}(y, x, \dots) = R^0(x, y) \cdot R^i \quad i = 0, 1, \dots, d-2,$
- (ii) $\nu(\mathbb{R}^n) \subset \mu(\mathfrak{so}(n)).$

条件 (i), (ii) は代数的なものであることを注意する。(i) は $(R^0, R^1, \dots, R^d)$ に関する二次方程式系である。また (ii) は $A \in \mathfrak{so}(n)$ を未知数とする次の連立一次方程式が解をもつことを意味している。

$$\begin{aligned}A \cdot R^0 &= i(X)R^1 \\ A \cdot R^1 &= i(X)R^2 \\ &\dots \\ A \cdot R^{d-1} &= i(X)R^d.\end{aligned}$$

Φ の像のより詳しい幾何学的描像の研究は、重要な課題と思う。

3 (大域的な) 等質空間に局所等長にならない局所等質空間

次のような問題を考えよう:

問題 局所等質空間 (M, g) が与えられたとき、(大域的な) 等質空間 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ が存在して、 (M, g) は $(\tilde{M}, \tilde{g})$ に局所等長になるか?

このことは、「局所等質空間は、等質空間の一部領域であって局所等質空間の(局所)微分幾何は、等質空間のそれにすべて還元してしまうか否か」を問うている。「局所等質」を「局所対称」に変えれば、上の主張は正しいことはよく知られている。これに反して、Kowalski は、どんな(大域的)等質空間とも局所等長にならない局所等質空間の例を発見した。これは、(少なくとも

私にとって) ミステリアスに思える。何故か? 定理 1.1' を思い起こしてほしい。局所等質空間が完備であるとする、その普遍被覆空間は単連結完備局所等質空間となり、定理 1.1' によってそれは等質空間である。従って完備局所等質空間は、等質空間に局所等長になる。局所等質空間のかけらをいくつも張り合せていけば完備なものにまで拡張できそうにも思えるが、Kowalski の例ではそれができないことになる。拡張を妨げる何らかの障害があるはずで、それを解明したいと思うが今のところ何も分らない。

Kowalski の発見した例を簡単に紹介しておこう。Lie 群 $K = SO(3) \times SO(3)$ と次のような形の行列からなる 1 次元連結 Lie 部分群 H_r ($r \in \mathbb{R}$) を考える:

$$\begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos rt & -\sin rt & 0 \\ \sin rt & \cos rt & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

r が有理数ならば、 H_r は K の閉部分群となり、 K 不変な リーマン計量をもつ等質空間 K/H_r をうる。 r が無理数のときは、部分群 H_r は閉集合でなく K/H_r はもはや 通常の意味の多様体にならない。しかし、この状況でもこれら Lie 群の組に対応して 局所等質空間を構成することができる。このようにして得られた局所等質空間はどんな (大域的) 等質空間とも局所等長にならないことが示されている。詳しくは、Kowalski の論文 ([4],[5]) を参照のこと。

否定的な例の存在が認識された後では、このような現象をより明解に理解しようという問題意識でこの方面の研究が進展してきている。局所等質空間が (大域的な) 等質空間に局所等長になるための十分条件を各種開発整備することも重要な課題になる。例えば次のようなものが知られている。 (M, g) を局所等質空間とする。次の各条件下で、 (M, g) は (大域的な) 等質空間に局所等長になる。

- (1) (Mostow [6]) $\dim M \leq 4$
- (2) (Spiro [9]) (M, g) の Ricci 曲率が非正
- (3) ([10]) (M, g) の次元が偶数で断面曲率が正
-

(大域的な) 等質空間に局所等長にならない局所等質空間はどのくらいたくさん存在するものなのだろうか? 第 2 節で導入した $\mathcal{LH}(n)$ の中での有様で分かったことを述べよう。

定理 3.1 ([10]) (大域的な) 等質空間と局所等長になる n 次元局所等質空間の局所等長類の集合は $\mathcal{LH}(n)$ 内で稠密である。

この定理の証明のあらましを述べよう。 (M, g) を (大域的な) 等質空間に局所等長にならない局所等質空間とする。Kowalski の例とおなじように、 (M, g) のいくらでも近くに (大域的な) 等質空間と局所等長になるものが存在することを示す。Singer ([8]), Nicolodi and Tricerri ([7]) の理論により、 (M, g) に対

して Lie 環 $\mathfrak{g}$ とその Lie 部分環 $\mathfrak{h}$ の組が捉えられる。 K を Lie 環 $\mathfrak{g}$ に対応する単連結 Lie 群、 H を $\mathfrak{h}$ に対応する K の連結 Lie 部分群とする。このとき、 H は K の閉集合とはならない。Lie 環 $\mathfrak{g}$ 、 $\mathfrak{h}$ の構造を解析することにより、 $\mathfrak{h}$ の十分近くに同じ次元の Lie 部分環 $\mathfrak{h}'$ で対応する K の連結 Lie 部分群 H' が K の閉部分群となるものが存在することを示す。以上が証明のあらましである。

Lie 環 $\mathfrak{g}$ 、 $\mathfrak{h}$ の構造の解析をさらに進めることにより、次が示される。

命題 3.2 ([10]) M を 5 次元局所等質空間で (大域的な) 等質空間と局所等長にならないものとする。 M は Kowalski の例に局所等長である。

参考文献

- [1] M.Gromov, Partial differential relations, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, 3. Folge, Band 9, Springer-Verlag, (1986).
- [2] Y.Kiyota, Singer invariants of Riemannian homogeneous spaces, Master thesis, Ochanomizu University (in Japanese) (1998).
- [3] Y.Kiyota and K.Tsukada, Curvature tensors and Singer invariants of four-dimensional homogeneous spaces, preprint
- [4] O.Kowalski, Counter-example to the second Singer's Theorem, *Ann. Global Anal. Geom.*, 8 (1990), 211–214.
- [5] ——— On strictly locally homogeneous Riemannian manifolds, *Diff. Geom. App.*, 7 (1997), 131–137.
- [6] G.D.Mostow, The extensibility of local Lie groups of transformations and groups on surfaces, *Ann. Math.*, 52 (1950), 606–636.
- [7] L.Nicolodi and F.Tricerri, On two theorems of I.M.Singer about homogeneous spaces, *Ann. Global Anal. Geom.*, 8 (1990), 193–209.
- [8] I.M.Singer, Infinitesimally homogeneous spaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13 (1960), 685–697.
- [9] A.Spiro, A remark on locally homogeneous Riemannian spaces, *Results Math.*, 24 (1993), 318–325.
- [10] K.Tsukada, The moduli space of locally homogeneous spaces and locally homogeneous spaces which are not locally isometric to globally homogeneous spaces, preprint.