

正弦波外力をもつ非線形遅延常微分方程式の分数調波解/概周期解/ 分岐現象の精度保証に関わる話題

大石 進一¹

¹ 早稲田大学 理工学術院 応用数理学科, JST CREST

e-mail : oishi@waseda.jp

1 概要

1965 年, 周期関数となる強制項をもつ Duffing 型非線形常微分方程式の周期解の存在を精度保証付き数値計算を用いて行う方法は Urabe[1] によって発表された. そして, 占部先生が 1974 年に亡くなるまでに, 占部先生ご自身と共同研究者により, いろいろな発展がなされた. これは世界的に見ても精度保証付き数値計算を利用した非線形微分方程式の解の計算機援用証明の研究の一つの嚆矢であった. 1974 年の時点で多くの未解決問題も残されたが, それから 50 年の歳月があれば占部先生はほとんどを解決し, 更には, 思いもしない発展をもたらされたと思う. ここでは, 後進として, どのような問題が残され, この 50 年の間に解決されてきたか, そしてまだ何が残されているかを議論してみたい.

まず, 挙げられるのが, 非線形常微分方程式の解の存在証明だけでなく, 非線形偏微分方程式や非線形遅延微分方程式のような関数方程式に拡張できるかどうかという問題である. 非線形偏微分方程式については中尾充宏先生とドイツの M. Plum 氏が本格的な拡張をされた. 1990 年に公表された M. Plum 氏の方法は Schröder 氏の流れを汲み, また, Kantorovich の収束定理の拡張を用いる. また, 線形化作用素の最小特異値を計算する方法で, この方向では加藤敏夫先生の方法が源流にある. 夭折した Görisch の定理がその詳細版になるようであり, Plum はその方法を利用している. 加藤先生の方法も Görisch の方法も厳密な最小特異値の下限がわかっているときにそれを使って高精度な下限を求める方法である. したがって, 厳密な最小特異値の下限をまずは求めなければならない. Plum はある種のホトピー法を用いてこの一次的な下限を求める方法を提案しているが, その計算法は簡単ではないことも多い. これに対して, 劉と大石は厳密な最小特異値の下限を求める一般的な方法を提案した. 中尾の方法は, 1988 年に最初のバージョンが公表されて以来, 様々に発展されてきたが, 有限要素法やガレルキン近似方程式のヤコビ行列の逆行列のノルムから線形化作用素の逆作用素のノルムを計算する方法である. 1995 年に発表された Oishi の方法 [6] は占部の方法を直接的に関数方程式に適用できるように拡張したものである. 以来多くの研究がなされ, 非線形偏微分方程式の境界値問題等を含む広範な非線形微分方程式の解の存在と局所一意性の計算機援用証明法が提案されてきた.

非線形遅延微分方程式に対して, Minamoto と Nakao[2] は Nakao の方法により Rössler 方程式に遅延項を加えた方程式の周期解の存在の計算機援用証明を示した. また, 遅延方程式の周期解の計算機援用存在証明については radii-polynomial 法による精度保証法が提案された [8]-[10]. Oishi[11] は文献 [6] の方法を使って遅延 Duffing 方程式の周期解の存在と局所一意性の計算機援用証明法を提案している. また, Oishi と Sekine[3] はその方法によって El Ninō 現象を記述する方程式の分数調波解の存在と局所一意性の計算機援用証明法を提案している.

次に挙げられるのが, 単なる近似解を求めるための近似方程式の次元と精度保証を行うために必要となる, 近似方程式の次元の対比の問題である. 一般に後者の方が高次元にな

るが、それが極端に大きくなると精度保証ができなくなる。Plum は固有値問題を經由すると精度保証をするための近似の次元をある程度押さえられることを主張している。一方、中尾の方法や大石の方法では、精度保証定数が小さくなるオーダーが近似方程式の次元を n としたとき、 $O(1/n)$ になる場合があり、そのため場合によって n が 100 万でないと精度保証ができないような状況が生じてきた。これに対して、Oishi と Sekine[3] では漸近優対角行列理論が提案され、それを用いることによって、一種の加速ができ、その成果として分数調波解の存在と局所一意性の計算機援用証明が可能となることが示されている。本稿では、漸近優対角行列理論が成立する根拠が非線形項の微分可能性にあることを示し、微分可能な関数方程式に対する広い有効性を明らかにする。

ここでは文献 [6] の方法を使って正弦波外力をもつ非線形遅延常微分方程式の分数調波解/概周期解/分岐現象の数学的性質の精度保証付き数値計算法を用いた証明を行う試みについて議論したい。特に、計算機実験によって発見された物理的、数学的の両者にまたがる興味深い現象を紹介し、これを、どのように定理として定式化するか、そしてどのように証明するかなど多くの未解決問題について議論させて頂きたい。具体的には

- 1) 応用上興味深い非線形遅延常微分方程式には超越関数や有理関数を非線形項に持つ方程式が多数ある。これらの分数調波解の存在と局所一意性の計算機援用証明法について議論する。著者が計算機援用証明を試みる際に、実際の計算を通じて発見した経験則はガレルキン方程式のヤコビ行列の最小特異値がある程度以上の次元になると変化しなくなることである。El Ninō 現象を記述する非線形遅延微分方程式を解く際に、これを証明するために、漸近優対角行列理論を作り、それによってこの現象が成立することを証明した。これに関連する話題についても触れたい。特に、漸近優対角行列理論の発展形を示し証明を与える。多くの場合、こちらの方がより良い評価を与える。
- 2) 正弦波外力をもつ非線形遅延常微分方程式の概周期解の精度保証を行う方向への試みについて議論する。概周期関数となる強制項をもつ非線形常微分方程式の概周期解の存在を精度保証付き数値計算を用いて行う方法は Urabe[17] によって研究され、Mitsui[18]、Shinohara, Kohda, Mitsui[19]、Shinohara, Kurihara, Kohda[20] などによって理論と検証例が示されてきた。篠原, 宮本, 鈴木, 栗原 [21] は、この方法を発展させて概周期関数となる強制項をもつ非線形遅延常微分方程式の概周期解の存在を精度保証付き数値計算を用いて行う方法を示し、幾つかの例題を解いてその有効性を示した。ここでは正弦波関数が強制項となる非線形遅延常微分方程式の概周期解の存在を精度保証付き数値計算を用いて証明することを目指に、まずは、近似解をガレルキン近似を用いて求める方法を示す。そしてその精度保証法について検討を加える。
- 3) 非線形遅延常微分方程式に現れる複雑な分岐現象の全体像を明らかにするために、定常解のポアンカレプロットを遅延時間をパラメータとして描き、その分岐状態状態を再現する解を精度保証付き数値計算を用いて求める逆分岐図問題を提唱してきた。この問題を解く過程で、幾つかのユニバーサルな分岐現象を見つけている。それらについても議論したい。例えば、概周期解の多重ループ化現象、概周期解をはさんで安定な $1/3, 1/5, 1/7, \dots$ 分数調長波解が現れる分岐現象などである。

尚、本研究は、一部、千葉工大関根晃太准教授、早稲田大学修士課程 齊藤優輝、高松尚輝、倉本一姫、中野夏樹、三浦悠希氏と共同で行っている。

2 El Ninō 現象を記述するモデル方程式の分数調波解

最初に El Ninō を記述するモデル方程式として M. Ghil, I. Zaliapin, と S. Thompson[16] によって考えられたモデル:

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha \tanh \kappa x(t - \tau) + \beta \cos \omega t \quad (1)$$

を扱う. これは Oishi と Sekine[3] によって扱われた El Ninō 現象を記述する方程式とは異なる. $\alpha = 1, \kappa = 11, \beta = 1, \omega = 6$ の場合にストロボ分岐図を書いたものを図 1 に示す.

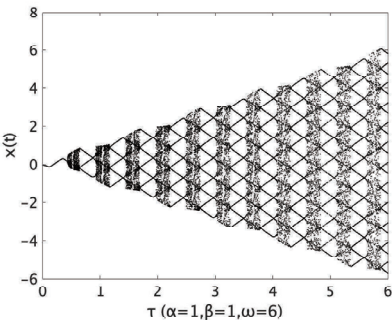


図 1. Bifurcation Diagram($\alpha = 1, \kappa = 11, \beta = 1, \omega = 6$)

ここでは 図 1 に現れている $1/s$ 分数調波解を求めることを考える. ただし, s は自然数である. そのために, ここでは次の関数解析的なフレームワークを用意する: $H_P^1 = \{x \in H^1(0, 2\pi/\omega) | x(0) = x(2\pi/\omega)\}$, $Y = L_2(0, 2\pi/\omega)$ とする. $L : H_P^1 \rightarrow Y, N : H_P^1 \rightarrow Y, F : H_P^1 \rightarrow Y$ を次によって定義する:

$$Fx = Lx + Nx, \quad Lx = \frac{dx}{dt}, \quad Nx = s\alpha \tanh \kappa x(t - \tau) - \beta s \cos s\omega t. \quad (2)$$

すると F は x について Fréchet 微分可能で

$$DF(x)y(t) = \frac{dy}{dt} + \frac{s\alpha \kappa y(t - \tau)}{\cosh^2(\kappa x(t - \tau))}. \quad (3)$$

となる. 式 (2) のガレルキン近似方程式を考える.

$$u(t) = a_0 + \sum_{i=0}^n (a_i \cos i\omega t + b_i \sin i\omega t). \quad (4)$$

とする. 式 (4) を式 (2) に代入するとつぎのガレルキン近似方程式を得る:

$$g(c) = 0, \quad (5)$$

ただし,

$$c = (a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)^t.$$

である. $(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m)$ を式 (4) のフーリエ基底とする. g のヤコビ行列の第 (i, j) -要素

$$J(i, j) = (DF(x)\phi_i, \phi_j). \quad (6)$$

で与えられる.

$$(x, y) = \frac{1}{L} \int_0^L x(t)y(t)dt$$

で $L = 2\pi/\omega$ である. 次の定理 [6] が成り立つ:

定理 1. $X = Y = L^2(0, 2\pi)$, $\mathcal{D} = H_P^1$ とする. $\sigma_n = 1/n$, $U_n = P_n X$, $V_n = P_n Y$ とする. さらに, $x_0 \in \mathcal{D}$ に対して *Fréchet* 微分 $D_x N(x_0) : \mathcal{D} \rightarrow Y$ は $X \rightarrow Y$ の有界作用素に拡張され

$$\|D_x N(x_0)\|_{L(X, Y)} \leq s\alpha\kappa := K_0. \quad (7)$$

となるとする. ここで $G_{(m, n)} : U_n \rightarrow V_n$ をガレルキン近似 g のヤコビ行列とする.

$$\|G_{(m, n)}^{-1}\|_{L(V_n, U_n)} \leq M_n. \quad (8)$$

と計算されたとき, もし $1 - c_n K_0(1 + M_n K_0) > 0$ なら, $D_x F(x_0)^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{D}$ が存在して

$$\|D_x F(x_0)^{-1}\|_{L(Y, \mathcal{D})} \leq \frac{\sqrt{(1 + M_n K_0)^2 + (\sigma_n(1 + M_n K_0) + M_n)^2}}{1 - \sigma_n K_0(1 + M_n K_0)} := M. \quad (9)$$

を満たす.

定理 2. [3] $X = Y = L^2(0, 2\pi)$, $\mathcal{D} = H_S^1$ とする. $F : \mathcal{D} \rightarrow Y$ が x について連続 *Fréchet* 微分可能とする. $D_x F(x_0)^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{D}$ が存在するとして $g : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ を

$$g(x) = x - D_x F(x_0)^{-1} F(x). \quad (10)$$

によって定義する.

$$\|D_x F(x_0)^{-1}\|_{L(Y, \mathcal{D})} \leq M$$

で $M\|F(x_0)\|_Y \leq \eta$ とする. $r_0 > 0$ で $B(x_0, r_0) = \{x \mid \|x - x_0\|_{\mathcal{D}} \leq r_0\}$ とする. ここで, ある $R > 0$ が存在して $0 < r < R$ について, もし $x \in B(x_0, r)$ なら r のある実数値関数 $\tilde{b}$ が存在して

$$M\|D_x F(x) - D_x F(x_0)\|_{L(\mathcal{D}, Y)} \leq M\tilde{b}(r) := b(r)$$

となるとする. ただし, $\tilde{b}(r)$ は $r > 0$ について非負で $r \rightarrow 0$ のときに単調に 0 に収束するとする. もし $\eta + r_0 b(r_0) \leq r_0$ なら, g は $B(x_0, r_0)$ 上で縮小写像となり $B(x_0, r_0)$ 上に不動点 x^* を持つ. $DF(x^*)$ は可逆となるので $x^* \in \mathcal{D}$ は F のゼロ点となる. $\square$

もし, $r_0 = 2\eta$ と置くと, 条件 $\eta + r_0 b(r_0) \leq r_0$ は

$$b(r_0) \leq 1/2$$

の時満たされる. $x \in B(x_0, r)$ とする. このとき $\tilde{b}(r)$ を今の例について求めよう. $p \in \mathcal{D}$, $x \in B(x_0, r)$ とする.

$$D_x F(x)p - D_x F(x_0)p = s\alpha\kappa \frac{\cosh^2(\kappa(x_0(t - \tau))) - \cosh^2(\kappa(x(t - \tau)))}{\cosh^2(\kappa(x(t - \tau))) \cosh^2(\kappa(x_0(t - \tau)))} p(t - \tau)$$

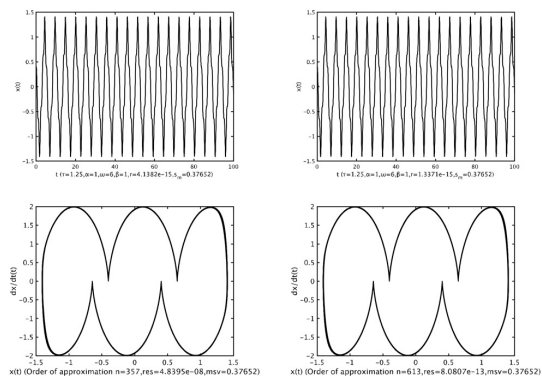


図 2. 1/5 Subharmonic ($\tau = 1.25, \alpha = 1, \kappa = 11, \beta = 1, \omega = 6$)

から

$$\|D_x Fx - D_x Fx_0\|_{L(\mathcal{D}, Y)} \leq s\alpha\kappa \cosh(2\|x_0\|_\infty)(\cosh(2r_0) - 1) := \tilde{b}(r)$$

を得る.

図 2 は 1/5 分数調波解を表すガレルキン方程式の近似解を示した. 近似計算の結果

$$\|G_{(m,n)}^{-1}\|_{L(V_n, U_n)} \leq M_n \leq \frac{1}{0.3765}$$

を得た. また,

$$\|D_x N(x_0)\|_{L(X, Y)} \leq s\alpha\kappa := K_0 = 5 * 1 * 11 = 55 \tag{11}$$

である. 図 2 からガレルキン近似の次数 n を増やしても, 最小特異値が変化しないことがわかる. 次の定理が成立する. これは Oishi と Sekine[3] の議論の変形である.

定理 3. b, n を自然数で $b < n$ とする. $G \in M_n(\mathbb{C})$ が次のように分割できるとする.

$$G = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \tag{12}$$

ただし, A は $b \times b$ 部分行列, D は $(n - b) \times (n - b)$ 部分行列とする. D は更にブロック対角行列 D_d を持つブロック行列とする. すなわち, D_d と D_f を D のブロック対角行列部分とその残りの部分行列とする.

A と D_d は可逆で $\|A^{-1}B\|_2 + \|D_d^{-1}(C \ D_f)\|_2 < 1$ ならば G^{-1} が存在して

$$\|G^{-1}\|_2 \leq \frac{\max\{\|A^{-1}\|_2, \|D_d^{-1}\|_2\}}{1 - (\|A^{-1}B\|_2 + \|D_d^{-1}(C \ D_f)\|_2)} := M_n \quad \square \tag{13}$$

が成り立つ. □

証明 H を次のように定義される行列とする：

$$H = \begin{pmatrix} A & O \\ O & D_d \end{pmatrix}. \tag{14}$$

A と D_d は可逆と仮定されているので H^{-1} が存在する. このとき,

$$\|H^{-1}\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} A^{-1} & O \\ O & D_d^{-1} \end{pmatrix} \right\|_2 \leq \max \{ \|A^{-1}\|_2, \|D_d^{-1}\|_2 \} \quad (15)$$

となる. また,

$$\begin{aligned} \|H^{-1}G - I_n\|_2 &= \left\| \begin{pmatrix} I_b & A^{-1}B \\ D_d^{-1}C & D_d^{-1}(D_d + D_f) \end{pmatrix} - I_n \right\|_2 \\ &= \left\| \begin{pmatrix} O & A^{-1}B \\ D_d^{-1}C & D_d^{-1}D_f \end{pmatrix} \right\|_2 \\ &\leq \|A^{-1}B\|_2 + \|D_d^{-1}(C \ D_f)\|_2. \end{aligned} \quad (16)$$

仮定から $\|H^{-1}G - I_n\|_2 < 1$ となるので, バナッハの摂動定理から G^{-1} の存在がわかり, 次の評価を得る:

$$\|G^{-1}\|_2 \leq \frac{\|H^{-1}\|_2}{1 - \|H^{-1}G - I_n\|_2} \leq \frac{\max \{ \|A^{-1}\|_2, \|D_d^{-1}\|_2 \}}{1 - (\|A^{-1}B\|_2 + \|D_d^{-1}(C \ D_f)\|_2)}. \quad \square \quad (17)$$

以下, $a = \|A^{-1}\|_2, b = \|D_d^{-1}\|_2, c = \|A^{-1}B\|_2, d = \|D_d^{-1}(C \ D_f)\|_2, M_n = (a + b)/(1 - (c + d)), 1/msv = \|G^{-1}\|_2$ において, 図 2 の近似解におけるガレルキン近似方程式のヤコビ行列を G とするとき, これらの定数を数値計算によって求めた例を示そう (ただし, 近似計算である).

表 1. Numerical Experiments

n	b	a	b	c	d	M_n	$1/msv$
229	101	2.6559	0.0164	0.3139	0.0898	4.4819	2.6559
357	101	2.6559	0.0164	0.3139	0.0924	4.5008	2.6559
485	101	2.6560	0.0164	0.3139	0.0924	4.5009	2.6559
613	101	2.6560	0.0164	0.3139	0.0924	4.5009	2.6559
229	201	2.6559	0.0083	0.0254	0.0269	2.8112	2.6559
357	201	2.6559	0.0083	0.0289	0.0537	2.9041	2.6559
485	201	2.6559	0.0083	0.0289	0.0551	2.9087	2.6559
613	201	2.6559	0.0083	0.0289	0.0551	2.9087	2.6559
357	301	2.6559	0.0055	0.0174	0.0270	2.7849	2.6559
485	301	2.6559	0.0055	0.0178	0.0392	2.8223	2.6559
613	301	2.6559	0.0055	0.0178	0.0400	2.8248	2.6559

これから n は任意に大きくできることが推測される. したがって, 十分大きな n では $1 - c_n K_0(1 + M_n K_0) > 0$ となり $D_x F(x_0)^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{D}$ が存在して

定理 4. n が十分大きく取れるので $D_x F(x_0)^{-1} : Y \rightarrow \mathcal{D}$ が存在して

$$\|D_x F(x_0)^{-1}\|_{L(Y, \mathcal{D})} \leq \sqrt{(1 + M_n K_0)^2 + M_n^2} := M. \quad \square \quad (18)$$

となる.

$\square$

計算例では（近似であるが）

$$\|D_x F(x_0)^{-1}\|_{L(Y,\mathcal{D})} \leq M = 148 \tag{19}$$

となる．よって、 $r_0 = 2 * M * 7.8 * 10^{-12} < 2.31 * 10^{-9}$.

$$\begin{aligned} &\|D_x Fx - D_x Fx_0\|_{L(\mathcal{D},Y)} \\ &\leq 5 * 1 * 11 * (\cosh(2 * 1.5) * (\cosh(10^{-5}) - 1)) = 3 * 10^{-8}. \end{aligned}$$

となるので、

$$b(r_0) = M\tilde{b}(r_0) \leq 148 * 3 * 10^{-8} \leq 5 * 10^{-6}.$$

となる．したがって、以上の定数を精度保証付き数値計算で誤差評価付きで求められるとすれば $b(r_0) \leq 1/2$ が成立するので、近似解 x の r_0 近傍内に真の解 x^* が存在することがわかる．

3 エルニーニョのモデル方程式の概周期解のガレルキン近似解

つぎに、別の形のエルニーニョのモデル方程式を考える。

$$\frac{dx(t)}{dt} + (-x(t) + x^3(t) + \alpha x(t - \tau) - \beta \cos \omega t) = 0. \tag{20}$$

この方程式は Suarez, Shopf[5] の提案したエルニーニョの自励方程式モデルに Oishi, Sekine[3] が正弦波外力を加えたエルニーニョの四季の温度変化を考慮したモデルで対称周期解、非対称周期解、分数調波解、概周期解、カオス解など多彩な解が現れることがシミュレーションによって文献 [3] で示され、分数調波解を含む多様な周期解の精度保証付き数値計算による計算機援用存在証明が示されている。例えば、シミュレーションによって分岐図を描いてみると図3となる。この図において固定した β において無数の点が見られる場合にはその値で非周期解が現れていると近似的に考えることができる。非周期解としては概周期解とカオス解が考えられる。そこで、波形と相図を書いてみてさらに詳しく調べる必要がある。図4はその例である。この図において、相図の赤線はポアンカレマップである。これが閉曲線となっているので、ここに現れている解は概周期解と予想される。

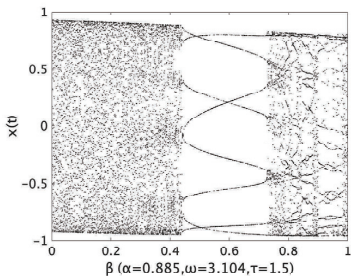


図 3. オイラー法によって計算した分岐図。縦軸には定常状態における $x(2\pi n/\omega)$ が十分大きな正の整数 n について数千点プロットされている。これを以下ストロボ分岐図と呼ぶ。

3.1 擬周期関数

ここでは、概周期 (almost periodic) 関数の一種である擬周期 (quasiperiodic) 関数 $f(t)$ を次のように定義する。 $f_0(u_1, u_2, \dots, u_n)$ が n 次元実変数 $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ の n -重周期

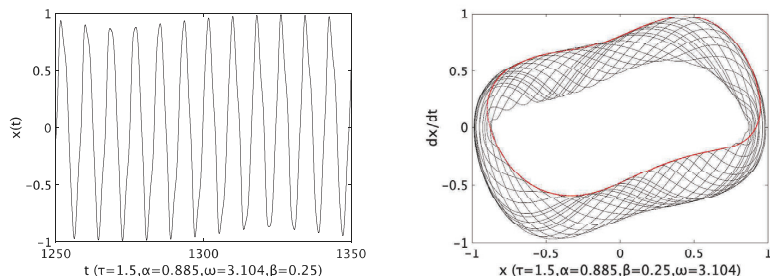


図 4. オイラー法によって近似計算した概周期解 ($\tau = 1.5, \alpha = 0.885, \beta = 0.25, \omega = 3.104$)

関数とする。すなわち f_0 は u_i について T_i を周期とする周期関数とする：

$$f_0(u_1, u_2, \dots, u_i + T_i, \dots, u_n) = f_0(u_1, u_2, \dots, u_i, \dots, u_n)$$

ここに、 T_i は正の実数とする。 $f(t)$ が

$$f(t) = f_0(t, t, \dots, t) \quad (21)$$

と書ける時、擬周期関数という。擬周期関数外力に対する擬周期解の存在の証明を精度保証付き数値計算により行うことを考えたのは Urabe[17] で、例題まで解いたのが Mitsui[18] である。この理論を発展させ、周期関数外力に対する擬周期解の存在の証明を精度保証付き数値計算により行うことを考える。そのために、まず、ガレルキン近似によって擬周期解の近似を求める方法を次の節で提案する。

3.2 補助偏微分方程式

簡単のため $n = 2$ の場合を考える。補助偏微分方程式として次を考える。

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + \frac{\partial}{\partial u_2} \right) \tilde{x}(u_1, u_2) - \tilde{x}(u_1, u_2) + \tilde{x}^3(u_1, u_2) + \alpha \tilde{x}(u_1 - \tau, u_2 - \tau) + \beta \cos \omega u_1 = 0 \quad (22)$$

$\tilde{x}(u_1, u_2)$ が周期 T_1 と T_2 の 2 重周期関数であれば、 $x(t) = \tilde{x}(t, t)$ は式 (20) の擬周期解となる。このような考え方は Urabe[17] が提案し Mitsui[18] が発展させた。以下、式 (22) の 2 重周期解の存在証明を精度保証付き数値計算によって行う方法を示す。 $T_1 = 2\pi/\omega$ とする。ここで、 T_2 は未知であることを注意する。そこで、 $\omega_2 = 2\pi/T_2$ を未知独立変数として式 (22) に加える。式 (22) の 2 重周期解は u_2 についてシフト不変であるので、この自由度を減らすために拘束条件

$$\int_0^{T_1} \int_0^{T_2} \tilde{x}(u_1, u_2) \cos(\omega_2 u_2) du_2 = 0 \quad (23)$$

を置く。式 (22) と式 (23) のガレルキン近似解はニュートン法によって求めることができる。

3.3 ガレルキン近似方程式

ガレルキン近似として

$$\tilde{x}_m(u_1, u_2) = \alpha(0, 0) + \sum_{r=1}^m \sum_{|p|=r} \alpha_p \cos(p, \omega, u) + \beta_p \sin(p, \omega, u) \quad (24)$$

を考える。ただし、 $(p, \omega, u) = p_1 \omega_1 u_1 + p_2 \omega_2 u_2$ である。式 (24) を式 (22) と式 (23) に代入するとガレルキン近似方程式

$$\begin{aligned} P_m F(\hat{x}_m) &= 0, \\ \alpha_{(0,1)} &= 0 \end{aligned} \tag{25}$$

を得る。図5は図4と同じ擬周期解の近似をガレルキン法で求めたものである、 $\omega_2 = 0.25353$ と近似的に求められており、 $\omega = 3.104$ との比は単純な整数比ではないが、無理数比かどうかは証明できない。

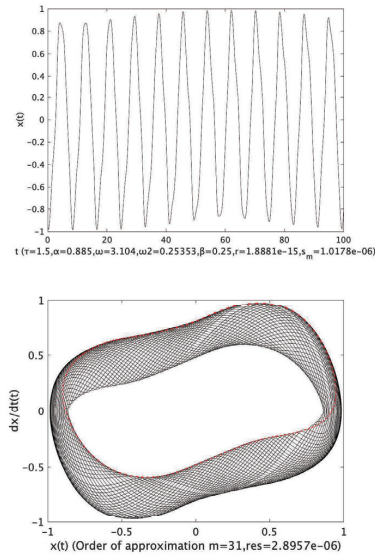


図 5. ガレルキン近似解 ($\tau = 1.5, \alpha = 0.885, \beta = 0.25, \omega = 3.104$)

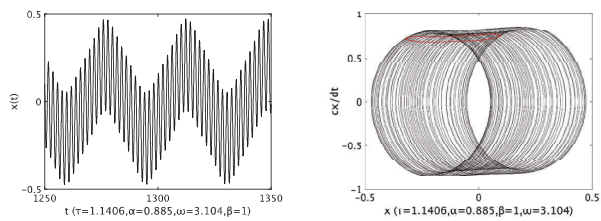


図 6. オイラー法によるシミュレーションの結果 ($\tau = 1 + 1/8 + 1/64 = 1.1406, \beta = 1, \alpha = 0.885, \omega = 3.104$)

こうしてガレルキン近似方程式を基礎に擬周期解の存在は Oishi[6] の提案した方法によって精度保証付き数値計算によって証明できると考えられ、kv と vcp ライブラリを用いた精度保証プログラムを作成して検証中である。ただし、 ω_2/ω が無理数かどうかは証明できない。

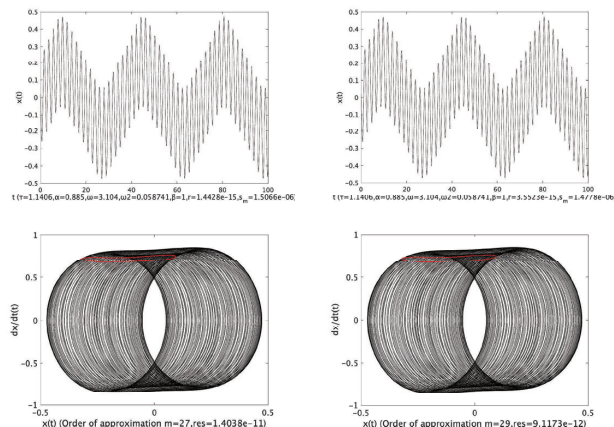


図 7. ガレルキン近似解 ($\tau = 1 + 1/8 + 1/64 = 1.1406, \beta = 1, \alpha = 0.885, \omega = 3.104$)

4 遅延 van der Pol-Duffing 方程式に現れる様々な分岐現象

次に、時間遅れ要素を持つ van der Pol-Duffing 方程式

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + k(x^2(t) - 1)\frac{dx(t)}{dt} + \mu x(t) + \gamma x^3(t) - \alpha x(t - \tau) = \beta \cos t \quad (26)$$

を考える。この方程式は分数調波解や、カオス的非周期解などのさまざまな複雑な解が数値計算により観測されている [22]。筆者は千葉工大関根氏、早稲田大学修士学生の齊藤、高松氏とともにその分数調波解の存在と局所一意性の証明について精度保証付き数値計算を用いて成功している。それ以外にもユニバーサルに現れる非周期解を持つようで、その存在証明を精度保証付き数値計算を用いて行うことを目撃している。ここでは (26) の多様かつ複雑な分岐現象について数値実験した結果を報告したい。

5 分岐図

以下、(26) のパラメータを ($\alpha = 1, \beta = 5, k = 0.1, \mu = 0.1, \gamma = 1$) として考える。図 5 は横軸を τ 、縦軸にオイラー法で求めた近似解を 2π ごとにプロットした分岐図である。 τ を固定した縦軸上に、 n 点プロットされるとき $1/n$ 分数調波解が見られ、多数の点がプロットされているところは非周期解であることが予想される。

6 ポアンカレマップと相図

外力の周期である 2π ごとに $(x, \dot{x})$ 平面に軌跡をプロットした図を簡単のためにポアンカレマップと呼ぶ。以下に様々な τ において左にポアンカレマップ、右に $(x(t), \dot{x}(t))$ を連続的に描いた相図を示す。図 9 は様々な非周期解を表している。上から準周期解、準周期解の漸近集合の 2 重化、3 重化、漸近集合のトーラス化、準周期解からカオスへ、カオス解が見られる。現在、このような分岐現象の数学的な性質を精度保証付き数値計算を通して証明することを考えている。

参考文献

- [1] M. Urabe, Galerkin's procedure for nonlinear periodic systems, Arch. Rat. Mech. Anal. **20**, pp.120-152 (1965).

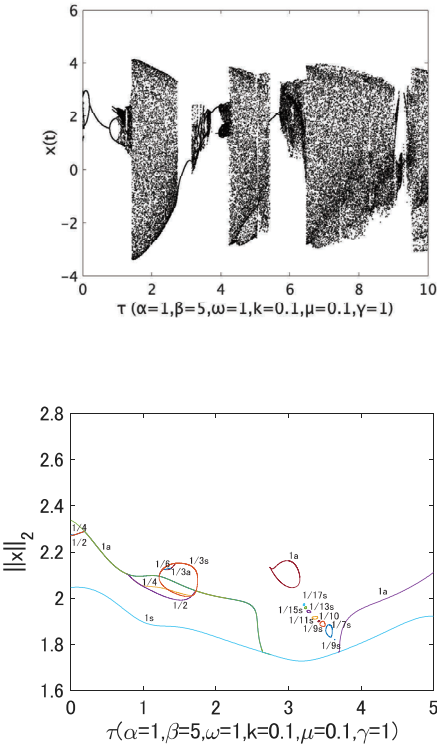


図 8. 分岐図 (上) と逆分岐図 (下)

[2] Teruya Minamoto, Mitsuhiro T. Nakao, A numerical verification method for a periodic solution of a delay differential equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics* **235** pp.870-878 (2010).

[3] Shin'ichi Oishi, Kouta Sekine: Inclusion of periodic solutions for forced delay differential equation modeling El Niño, *Nonlinear Theory and Its Applications*, **12** (2021) Issue 3, pp. 575-610.

[4] S. Oishi: Numerical verification of existence and inclusion of solutions for non-linear operator equations, *J. Computational and Applied Math.*, **60** (1995) pp. 171-185.

[5] M. J. Suarez, P. S. Schopf: A delayed action oscillator for ENSO, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **45(21)** (1988) pp. 3283-3287.

[6] S. Oishi: Numerical verification of existence and inclusion of solutions for non-linear operator equations, *J. Computational and Applied Math.*, **60** (1995) pp. 171-185.

[7] Shin'ichi Oishi, Numerical inclusion of exact periodic solutions for time delay Duffing equation, *JCAM*, Vol 372, (2020).

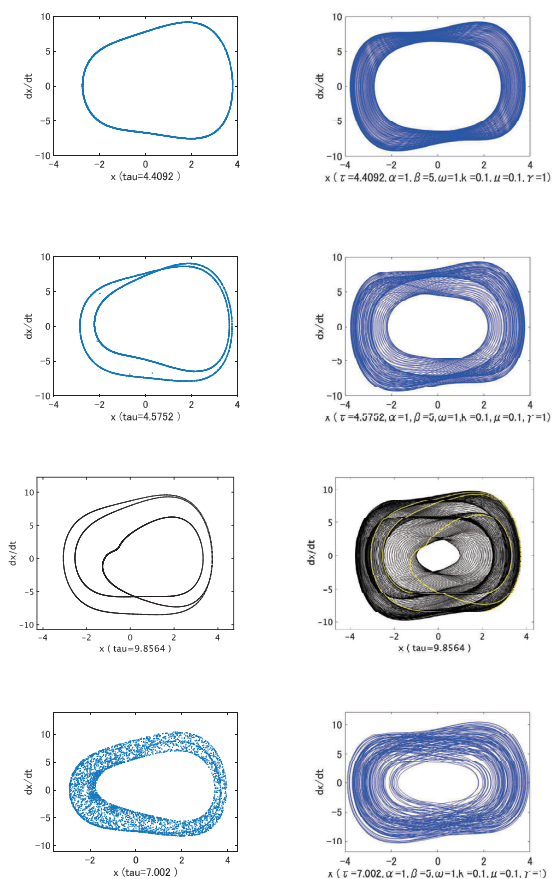


図 9. 様々な非周期解

- [8] Robert Szczelina and Piotr Zgliczynski: Algorithm for Rigorous Integration of Delay Differential Equations and the Computer-Assisted Proof of Periodic Orbits in the Mackey-Glass Equation, *Found Comput Math*, Volume **18**, Issue 6, pp. 1299-1332 (2018).
- [9] Gabor Kiss and Jean-Philippe Lessard: Rapidly and Slowly Oscillating Periodic Solutions of a Delayed Van der Pol Oscillator, *J. Dyn. Diff. Equation* **29** pp.1233-1257 (2017).
- [10] Jan Bouwe van den Berg, Chris Groothedde and Jean-Philippe Lessard, A general method for computer-assisted proofs of periodic solutions in delay differential problems, (September 14, 2018), preprint.
- [11] S. Oishi: Numerical inclusion of exact periodic solutions for time delay Duffing equation, to appear in *J. Computational and Applied Math.*, (2019).
- [12] Ian Boutle, Richard H. S. Taylor and Rudolf A. Roemer, El Niño and the delayed

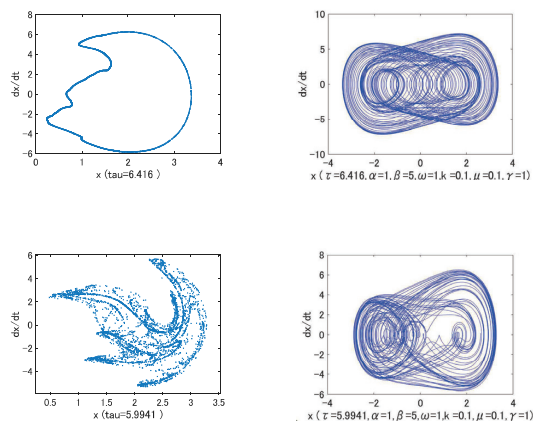


図 10. 様々な非周期解

- action oscillator, *American Journal of Physics*, **75** (No.1). pp. 15-24 (2007).
- [13] M. Ghil, I. Zaliapin and S. Thompson, A delay differential model of ENSO variability: parametric instability and the distribution of extremes. *Nonlin. Process. Geophys.*, **15**, pp.417-433 (2008).
- [14] I. Zaliapin and M. Ghil: A delay differential model of ENSO variability-Part 2: Phase locking, multiple solutions and dynamics of extrema. *Nonlin. Processes Geophys.*, **17**, pp.123-135 (2010).
- [15] Andrew Keane, Bernd Krauskopf, and Claire Postlethwaite, Delayed Feedback Versus Seasonal Forcing: Resonance Phenomena in an El Niño Southern Oscillation Model, *SIAM J. APPLIED DYNAMICAL SYSTEMS*, *Society for Industrial and Applied Mathematics*, **14**, No. 3, pp. 1229-1257 (2015).
- [16] M. Ghil, I. Zaliapin and S. Thompson, A delay differential model of ENSO variability: parametric instability and the distribution of extremes. *Nonlin. Process. Geophys.*, **15**, pp.417-433 (2008).
- [17] M. Urabe: Existence theorems of quasiperiodic solutions to nonlinear differential systems, *Funkcial. Ekvac.*, **15** (1972), pp.75-100.
- [18] T. Mitsui: Investigation of Numerical Solutions of Some Nonlinear Quasiperiodic Differential Equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **13** (1977), pp.793-820.
- [19] Y. Shinohara, A. Kohda, T. Mitsui, On quasiperiodic solutions to Van der Pol equation. *J. Math. Tokushima Univ.*, **18** (1984), pp.1-9.
- [20] Y. Shinohara, M. Kurihara, A. Kohda, Numerical analysis of quasiperiodic solutions to nonlinear differential equations. *Japan J. Appl. Math.*, **3** (1986), pp. 315-330.
- [21] 篠原康彰, 宮本泉, 鈴木智博, 栗原光信: 非線形差分微分方程式における準周期解の存在定理, *日本応用数学会論文誌*, **16** No.2, (2006), pp.93-103.
- [22] Y.TSUDA, H.TAMURA, A.SUEOKA, T.FUJII: Chaotic Behaviour of a Nonlinear

Vibrating System with a Retarded Argument, *JSME International Journal, Series III*, **35** No.2 pp. 259-267 (1992).