

概均質ベクトル空間のゼータ関数入門

佐藤文広（立教大学理学部）

本稿では、この短期共同研究の目的である Ibukiyama-Saito 理論の理解に必要な限りで概均質ベクトル空間のゼータ関数について解説する。したがって、[SS] で研究された一変数ゼータ関数のみを考えることとし、多変数化や保型形式付きなどの拡張に興味がある方は、巻末の文献リスト [S4]（の解説）を参考にしてほしい。

目標とすることは、具体的には

1. 概均質ベクトル空間に付随するゼータ関数の定義を与え、ゼータ関数の意味を不定方程式の立場から説明すること (§1),
2. 木村達雄氏の解説 ([K]) にある相対不変式の複素巾の Fourier 変換に対する基本定理 ($\mathbb{R}$ 上の局所関数等式) を用いてゼータ関数の関数等式を証明すること (§2)

の 2 つである。§3 では、古典的ゼータ関数に対応する概均質ベクトル空間を掲げ、また関数等式の例をいくつか紹介しておいた。

ゼータ関数を考えるとき、それを定義する無限級数が収束しなければ意味がないが、収束のチェックは一般には必ずしも易しくはない。収束の問題はこれまであまり解説されたことがないので、別稿 [S3] である程度詳しく論ずることとし本稿では収束を前提に話を進めることにする。

1 ゼータ関数の定義

(1.1) (G, ρ, V) を概均質ベクトル空間とする。 V^* を V の双対ベクトル空間とし、 $\rho^*: G \rightarrow GL(V)$ を ρ の反傾表現とする。今後、常に

G は reductive, 特異点集合 S は絶対既約超曲面

と仮定する。このとき、双対 (G, ρ^*, V^*) も概均質ベクトル空間であり、その特異点集合 S^* も絶対既約超曲面である。

(1.2) (G, ρ, V) は有理数体 $\mathbb{Q}$ 上で定義されているとする。すなわち、

- (i) G は $\mathbb{Q}$ 上定義された連結線型代数群,

(ii) V は $\mathbb{Q}$ -構造を持つ, すなわち, $V = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{C}$ となる $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間 $V_{\mathbb{Q}}$ を含む,

(iii) 任意の $v \in V_{\mathbb{Q}}$ と $v^* \in V_{\mathbb{Q}}^* = \text{Hom}(V_{\mathbb{Q}}, \mathbb{Q})$ に対し, 行列成分 $\rho_{v,v^*}(g) := \langle \rho(g)v, v^* \rangle$ は G の $\mathbb{Q}$ 上定義された有理関数

だとする. $V_{\mathbb{Q}}$ 上で $\mathbb{Q}$ に値をとる V^* の元のなす部分 $\mathbb{Q}$ -ベクトル空間を $V_{\mathbb{Q}}^*$ と同一視し, これによって V^* に自然な $\mathbb{Q}$ -構造が定まる. V^* のこの $\mathbb{Q}$ -構造に関して (G, ρ^*, V^*) も $\mathbb{Q}$ 上で定義される.

ゼータ関数を考える際の基本的な仮定は,

(*) 任意の $v \in (V - S) \cap V_{\mathbb{Q}}$ に対し, v における isotropy 部分群 $G_v = \{g \in G \mid \rho(g)v = v\}$ は自明なもの以外に $\mathbb{Q}$ 上定義された有理指標を持たない

ことである. この仮定の意義は, ゼータ関数の定義を解説する中でしだいに分かってくるはずである. (1.1) における仮定から, この条件は (G, ρ^*, V^*) に対しても自動的に成り立つことに注意しておく.

以下, 本節では, このような設定の下で (G, ρ, V) に対しゼータ関数を定義する. (G, ρ^*, V^*) に対しても, まったく同じ議論でゼータ関数が定義されるので, とくに注意すべきことがない限り繰り返さない. (G, ρ, V) に対しなにかある “ A ” が定義されたとき, 上付き添字 $*$ をつけた “ A^* ” によって (G, ρ^*, V^*) に対し同様に定義されたものを表わすということだけ, 約束しておこう.

(1.3) S の定義方程式 $P(v)$ は相対不変式 (基本相対不変式) であったが, (G, ρ, V) が $\mathbb{Q}$ 上定義されている場合には, とくに $\mathbb{Q}$ -係数の絶対既約多項式にとれる. P に対応する G の有理指標を χ とする. 定義により, χ は

$$P(\rho(g)v) = \chi(g)P(v) \quad (g \in G, v \in V)$$

を満たす指標である. (G, ρ, V) が $\mathbb{Q}$ 上定義されているという条件より, χ も $\mathbb{Q}$ 上定義されていることがわかる.

(1.4) ゼータ関数の定義の準備として, 不変測度の正規化をしておく必要がある. G^+ を実リー群 $G_{\mathbb{R}}$ の単位元連結成分,

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = V_1 \cup \cdots \cup V_r$$

を $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \{x \in V_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{Q}} \otimes \mathbb{R} \mid P(x) \neq 0\}$ の連結成分への分解とする. このとき, 各 V_i は $\rho(G^+)$ -軌道となっている.

$n = \dim V$, $d = \deg P$ とし,

$$\omega(v) = |P(v)|^{-n/d} dv$$

とおくと $\omega(v)$ は $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ 上の G^+ -不変測度を与える. ただし, dv は $\mathbb{R}$ -ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ 上の Lebesgue 測度である.

dg を G^+ のハール測度とする. $G_v^+ = G^+ \cap G_v$ ($v \in V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$) は unimodular リー群になり, 不変測度 $d\mu_v$ をもつ. 不変測度 $d\mu_v$ は, G^+ 上の L^1 -関数に対して

$$(*) \quad \int_{G^+} F(g) dg = \int_{V_i} \omega(\rho(g)v) \int_{G_v^+} F(gh) d\mu_v(h)$$

が成り立つように正規化しておく. この正規化のポイントは, 次にある. v, v' が同じ連結成分 V_i に属すとき, V_i は G^+ -軌道になっているから $v' = \rho(g)v$ となる $g \in G^+$ が存在し, $G_v^+ = gG_{v'}^+g^{-1}$ となる. そこで g の定める内部自己同型によって G_v^+ と $G_{v'}^+$ を同一視したとき, 上のように正規化しておけば $d\mu_v$ と $d\mu_{v'}$ は同一の測度を与えるのである.

(1.5) $V_{\mathbb{Q}}$ に含まれる格子 L と, $G_{\mathbb{Q}} \cap G^+$ の数論的部分群 Γ で $\rho(\Gamma)$ が L を不変にするようなものをとる. $v \in L - S$ に対して, $\Gamma_v = G_v^+ \cap \Gamma$ とおき, v の属する Γ -軌道 $\rho(\Gamma)v$ の密度 $\mu(\rho(\Gamma)v)$ (簡単のため $\mu(v)$ と記す) を

$$\mu(v) = \int_{G_v^+/\Gamma_v} d\mu_v$$

と定める. (1.2) で基本的な仮定として述べた条件により, $\mu(v)$ は有限の値を持つ ([BH]).

(1.6) 以上の準備の下で, いよいよ (G, ρ, V) に付随するゼータ関数が定義できる.

$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ の各連結成分 V_i ($1 \leq i \leq \nu$) ごとに, ゼータ関数 $\zeta_i(L, s)$ と局所ゼータ関数 $\Phi_i(f, s)$ ($f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$) を

$$\begin{aligned} \zeta_i(L, s) &= \sum_{x \in \Gamma \backslash L \cap V_i} \frac{\mu(x)}{|P(x)|^s}, \\ \Phi_i(f, s) &= \int_{V_i} |P(x)|^{s-n/d} f(x) dx \end{aligned}$$

によって定義する. ここで, $\zeta_i(L, s)$ の定義における和は, $L \cap V_i$ に含まれる $\rho(\Gamma)$ -軌道の完全代表系を渡る和である. また $\mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ は, 実ベクトル空間 $V_{\mathbb{R}}$ 上の急減少関数の空間を表わす.

局所ゼータ関数 $\Phi_i(f, s)$ の性質, とくに関数等式は木村達雄氏の解説 [K] ですでに説明されている. (ただし, 記号が少しずれているので注意してほしい. たとえば, ここでの P, f は [K] では, それぞれ, f, Φ であり, ここでの $\Phi_i(f, s)$ は [K] の $\gamma(s - \frac{n}{d})F_i(s - \frac{n}{d}, \Phi)$.)

本稿の冒頭で述べたように, 我々はゼータ関数の収束についてここでは問題にせず,

$\zeta_i(L, s)$ ($i = 1, \dots, \nu$) は $\text{Re}(s)$ が十分大きいとき絶対収束する

ことは仮定しておく.

(1.7) このようにして定義されたゼータ関数の直観的意味はいささかつかみにくいと思われるので, 簡単に説明を補っておこう.

まず格子 L の $\mathbb{Z}$ -基底を適当に定めたとき, 基本相対不変式 $P(v)$ は (必要ならば定数倍してやることにより) $\mathbb{Z}$ -係数となり, とくに L 上整数値をとると仮定しても本質は変わらない. こうしておいて, 正整数 m に対して

$$N_i(L; m) = \sum_v \mu(v), \quad v \in \Gamma \backslash L \cap V_i, \text{ such that } P(v) = \epsilon_i m$$

とおく. ここで $P(v)$ の符号は連結成分 V_i 上では一定だから, それを ϵ_i と記した. [BH] で示された定理により, (1.2) の仮定 (*) の下では $\mu(v)$ が有限であるばかりでなく右辺の和は有限和となり, $N_i(L; m)$ は well defined である.

この記号を用いると, ゼータ関数は次のように変形される.

$$\zeta_i(L, s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{N_i(L; m)}{m^s}.$$

したがって, $N_i(L; m)$ の意味付けが問題となる.

$G_1^+ = \{g \in G^+ \mid \chi(g) = 1\}$ とおく. まず, 簡単な場合として G_1^+ がコンパクト, したがって Γ が有限群になる場合を考えよう. P が正定値二次形式で, G がその特殊直交群と GL_1 の直積で与えられる場合が典型的な例である. このとき, Γ/Γ_v と $\rho(\Gamma)v$ とが $\gamma\Gamma_v \mapsto \rho(\gamma)v$ で 1 対 1 に対応することに注意すると,

$$\mu(v) = \#(\rho(\Gamma)v) \cdot \frac{\text{vol}(G_v^+)}{\#(\Gamma)}$$

となる. ここで $\text{vol}(G_v^+)$ は不変測度 $d\mu_v$ に関する体積であり, 測度の正規化に関して (1.4) の末尾で与えた注意により v に依存しない. したがって定数 $\text{vol}(G_v^+)/\#(\Gamma)$ をひとまとめにして c と記すと

$$N_i(L; m) = c \cdot \#\{v \in L \cap V_i \mid P(v) = \epsilon_i m\}$$

と表わせる. すなわち, ゼータ関数の係数 $N_i(L; m)$ は, 本質的には格子点集合 $L \cap V_i$ 内の不定方程式 $P(v) = \epsilon_i m$ の解の個数を表わしている. かくして

ゼータ関数 $\zeta_i(L, s)$ は相対不変式から得られる不定方程式の解の個数の母関数

として明瞭な意味を持っていることが分かった.

このような場合には, 実は, Γ や $\mu(v)$ などを導入する必要はなく, 直接

$$\zeta_i(L, s) = \sum_{v \in L \cap V_i} \frac{1}{|P(v)|^s}$$

と定義してしまえばよかったのである. 典型例として述べた P が正定値二次形式の場合には, これは Epstein ゼータ関数に他ならない.

ところが, 一般には Γ は無限群であり, 格子点集合 $L \cap V_i$ 内に不定方程式 $P(v) = \epsilon_i m$ の解は無限個有り得る. これが, 正定値二次形式の Epstein によるゼータ関数を不定値二次形式に対し拡張しようとして Siegel が直面した問題である. こんな状況の下でも解集合

$\{v \in L \cap V_i \mid P(v) = \epsilon_i m\}$ のサイズをなんとかして計りたい, そのために Siegel が編み出した工夫が $\mu(v)$ の導入であった ([Si]).¹

$\mu(v)$ は定義によって G_v^+/Γ_v の体積であるから, Γ_v のサイズの逆数とみなせる. すでに (1.4) で注意したように, $v, v' \in V_i$ に対して G_v^+ と $G_{v'}^+$ は G^+ の内部自己同型でうつりあい $d\mu_v$ と $d\mu_{v'}$ は compatible になっている. このおかげで異なる v, v' に対する Γ_v と $\Gamma_{v'}$ のサイズが有効に比較できるのである. 一方, Γ/Γ_v と $\rho(\Gamma)v$ との 1 対 1 対応を思い出せば, $\rho(\Gamma)v$ のサイズは Γ_v のサイズに反比例していると考えられる. このことから, $\mu(v)$ は $\rho(\Gamma)v$ のサイズを表現する量だとみなせ, $\rho(\Gamma)v$ の密度と呼ばれるのである. したがって, 不定方程式の解集合 $\{v \in L \cap V_i \mid P(v) = \epsilon_i m\}$ をいったん Γ -軌道に分け, 各 Γ -軌道のサイズを $\mu(v)$ で測ってから足し上げたものである

$$N_i(L; m) = \sum_v \mu(v), \quad v \in \Gamma \backslash L \cap V_i, \text{ such that } P(v) = \epsilon_i m$$

は, 解集合それ自体のサイズを表現していることになる.

このように考えてくると, 一般に

概均質ベクトル空間のゼータ関数 $\zeta_i(L, s)$ は $m = 1, 2, \dots$ に対する不定方程式

$$P(v) = \epsilon_i m, \quad v \in L \cap V_i$$

の解の密度の母関数である

と言ってよい.

上記の発見的考察をきちんと展開すると, $\mu(v)$ や $N_i(L, m)$ の測度論的取扱いができ, それらはまさに measure であると主張することができる. これについては [S1], [HS], [S2] を参照されたい.

(1.8) 概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式の理論は, Riemann ゼータ関数の関数等式に対する Riemann の第 2 証明 (テータ級数の Mellin 変換を用いる) の群論的一般化である.²

テータ級数の Mellin 変換の群論的一般化とは, 積分

$$Z(f, L; s) = \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{v \in L-S} f(\rho(g)v) dg$$

のことである. これを “ゼータ積分” という. 次の命題は, ゼータ積分がゼータ関数の積分表示を与えていることを示す. ただし, ゼータ関数の収束は確かめられているものとしていたことを思いだしておく.

¹ゼータ関数の枠内で話を閉じさせるために, ここは歴史を少しねじ曲げてしまった. 不定値二次形式のゼータ関数の論文 [Si] 以前に, 有名な Siegel の主定理を不定値二次形式を含めて証明しており, その際に $\mu(v)$ のアイディアを出している. [I] も参照せよ.

²これでは, 実は説明になっていない. 保型形式の L 関数の理論に対しても, まったく同じ言い方ができるからである. この両者は同じ Riemann の第 2 証明から出発し, いささか異なる道を歩んだ. しかし行き着いた地点はあまり違ったところではなかったというのが私見だが, 議論の筋道を乱すのでこれ以上は触れない.

Proposition. $\operatorname{Re}(s)$ が十分大きいとき, ゼータ積分 $Z(f, L; s)$ は任意の急減少関数 $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して絶対収束し

$$Z(f, L; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(L, s) \Phi_i(f, s)$$

が成り立つ.

Proof. $|\chi(g)^s| = \chi(g)^{\operatorname{Re}(s)}$ ($g \in G^+$) であり, また任意の $f \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}})$ に対して $|f(v)| \leq f_0(v)$ ($v \in V_{\mathbb{R}}$) となる非負値急減少関数 f_0 が存在するから, はじめから $s \in \mathbb{R}$, f の値は ≥ 0 と仮定して証明すれば十分である. このとき, 被積分関数は非負値であるから, 積分の変形が自由にできることに注意しておく. では, ゼータ積分を変形して右辺を導こう. まず, 等式

$$L - S = \bigcup_{i=1}^{\nu} L \cap V_i = \bigcup_{i=1}^{\nu} \bigcup_{v \in \Gamma \setminus L \cap V_i} \rho(\Gamma)v$$

と, $\rho(\Gamma)v$ と Γ/Γ_v との 1 対 1 対応によって

$$\begin{aligned} Z(f, L; s) &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma \setminus L \cap V_i} \int_{G^+/\Gamma} \chi(g)^s \sum_{w \in \rho(\Gamma)v} f(\rho(g)w) dg \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma \setminus L \cap V_i} \int_{G^+/\Gamma} \sum_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_v} \chi(g)^s f(\rho(g)\rho(\gamma)v) dg \\ &= \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma \setminus L \cap V_i} \int_{G^+/\Gamma_v} \chi(g)^s f(\rho(g)v) dg \end{aligned}$$

を得る. 右辺の最後の積分において (1.4) の式 (*) を使うと

$$\begin{aligned} \int_{G^+/\Gamma_v} \chi(g)^s f(\rho(g)v) dg &= \int_{G^+/\Gamma_v} \left| \frac{P(\rho(g)v)}{P(v)} \right|^s f(\rho(g)v) dg \\ &= \frac{1}{|P(v)|^s} \int_{G^+/\Gamma_v} |P(\rho(g)v)|^s f(\rho(g)v) dg \\ &= \frac{1}{|P(v)|^s} \int_{V_i} |P(x)|^s f(x) \omega(x) \int_{G_v^+/\Gamma_v} d\mu_v \\ &= \frac{\mu(v)}{|P(v)|^s} \Phi_i(f, s) \end{aligned}$$

となる. これをもとの式に代入すれば, ただちに求める式

$$Z(f, L; s) = \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{v \in \Gamma \setminus L \cap V_i} \frac{\mu(v)}{|P(v)|^s} \Phi_i(f, s) = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(L, s) \Phi_i(f, s)$$

が得られる. ここで, $\operatorname{Re}(s)$ が十分大きいとき右辺が絶対収束することより, ゼータ積分の絶対収束性がいえる. ■

(1.9) ゼータ積分の積分領域を $\chi(g) \geq 1$ と $\chi(g) \leq 1$ の 2 つに分けて

$$\begin{aligned} Z_+(f, L; s) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \geq 1}} \chi(g)^s \sum_{v \in L-S} f(\rho(g)v) dg \\ Z_-(f, L; s) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \leq 1}} \chi(g)^s \sum_{v \in L-S} f(\rho(g)v) dg \end{aligned}$$

とおく. このとき, 明らかに

$$Z(f, L; s) = Z_+(f, L; s) + Z_-(f, L; s)$$

である. この 2 つの積分について, (1.8) の Proposition より次がしたがう.

Proposition. (i) 積分 $Z_+(f, L; s)$ は任意の $s \in \mathbb{C}$ に対して絶対収束し, s の整関数を表わす.

(ii) 積分 $Z_-(f, L; s)$ は $\operatorname{Re}(s)$ が十分大きいとき絶対収束する.

Proof. $Z_{\pm}$ は Z の積分範囲を制限しただけであるから, (1.8) の Proposition により $\operatorname{Re}(s)$ が十分大きいとき絶対収束することは明らかである. よって, あとは (i) を証明すればよい. (1.8) の Proposition の証明で注意したように, $s \in \mathbb{R}$, $f(v) \geq 0$ ($\forall v \in V_{\mathbb{R}}$) と仮定してかまわない. 正数 C を, $s > C$ ならば $Z_+(f, L; s)$ が絶対収束するようにとる. 任意の $s \in \mathbb{R}$ に対し, $M > C - s$ を満たす正数 M を選ぶ. このとき, $M > 0$ なので, Z_+ の積分領域 $\{g \in G^+/\Gamma \mid \chi(g) \geq 1\}$ 上では, $\chi(g)^s \leq \chi(g)^{s+M}$ が成り立つ. よって, $Z_+(f, L; s) \leq Z_+(f, L; s+M)$ となる. $s+M > C$ なので $Z_+(f, L; s+M)$ は絶対収束するから, この不等式より $Z_+(f, L; s)$ が任意の s について絶対収束し, したがって s の整関数を表わすことがしたがう. ■

2 関数等式と解析接続

(2.1) 記号は前節と同じとし, (1.2) で約束したように (G, ρ^*, V^*) に対するゼータ関数 etc. は, 上付き添字 $*$ を付けて表わすことにするが, 基本的な記号だけは説明しておく.

(G, ρ^*, V^*) のゼータ関数は $\zeta_i^*(L^*, s)$ ($i = 1, \dots, \nu$) で表わされる. ただし, L^* は $V_{\mathbb{Q}}^*$ 内の勝手な格子ではなく, L の双対格子, すなわち

$$L^* = \{v^* \in V_{\mathbb{Q}}^* \mid \langle L, v^* \rangle \subset \mathbb{Z}\}$$

で与えられる格子とする. また添字 i は, $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ の連結成分に対応しているが, その個数 ν は $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ の連結成分の個数と一致していることを思いだしておく (木村達雄氏の解説参照). (G, ρ^*, V^*) の基本相対不変式は P^* で, P^* に対応する G の有理指標は χ^* で表わす. 実は $\chi^* = \chi^{-1}$ であった. (G, ρ^*, V^*) の局所ゼータ関数は $\Phi_i^*(f^*, s)$ ($i = 1, \dots, \nu$) で表わす.

(2.2) (1.8) の Proposition で与えたゼータ関数とゼータ積分の関係を利用して, ゼータ関

数の関数等式と解析接続を証明するのであるが、その証明を支えている 3 つの事実を記号の導入をかねてまとめておこう。

1. b-関数の存在：次の等式を満たす s の d 次多項式 $b(s)$ が存在する：

$$P^*(\text{grad}_x)P(v)^{s+1} = b(s)P(x)^s.$$

2. 局所関数等式：

$$\Phi_i(\hat{f}^*, s) = \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) \sum_{j=1}^{\nu} C_{ij}(s) \Phi_j^*(f^*, \frac{n}{d} - s).$$

ここで、 $\hat{f}^*$ は $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ の Fourier 変換、 $\gamma(s)$ はいわゆるガンマ因子で b-関数を $b(s) = b_0(s + \alpha_1) \cdots (s + \alpha_d)$ として

$$\gamma(s) = \prod_{i=1}^d \Gamma(s + \alpha_i)$$

で与えられる。 $C_{ij}(s)$ は指数関数による簡単な表示をもつ有理型関数である。

3. ゼータ積分の関数等式： $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ に若干の条件を付けると、関数等式

$$Z(\hat{f}^*, L; s) = v(L)^{-1} Z^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s)$$

が成り立ち、その両辺は s の整関数に解析接続される。ここで $v(L) = \int_{V_{\mathbb{R}}/L} dv$ である。

始めの 2 つの事実は、すでに木村達雄氏の解説 ([K], Proposition 10, Theorem 28) に含まれている。第 3 の事実の証明やそこに含まれている f^* についての条件をはっきりさせることは後回しにして、まず主定理を述べよう。

(2.3) Theorem. (i) ゼータ関数 $\zeta_i(L, s)$, $\zeta_i^*(L^*, s)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ の全体に有理型関数として解析接続される。

(ii) $b(-s)\zeta_i(L, s)$, $b(-s)\zeta_i^*(L^*, s)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ 上至るところ正則である。したがって、 $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ を $b(s)$ から (2.2)-2 のようにして定まる有理数とすれば、 $\zeta_i(L, s)$ は $s = \alpha_1, \dots, \alpha_d$ 以外には極を持たず、 $s = \alpha_i$ での極の位数は $-\alpha_i$ の $b(s)$ における重複度で押さえられる。

(iii) 関数等式

$$\zeta_j^*(L^*, \frac{n}{d} - s) = v(L) \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) \sum_{i=1}^{\nu} C_{ij}(s) \zeta_i(L, s) \quad (j = 1, \dots, \nu)$$

が成り立つ。

(2.4) Proposition (ゼータ積分の関数等式). $f^* \in \mathcal{S}(V_{\mathbb{R}}^*)$ が条件

$f^*, \hat{f}^*$ をそれぞれ特異点集合 $S_{\mathbb{R}}^*, S_{\mathbb{R}}$ に制限すると 0 になる

を満たすならば、関数等式

$$Z(\hat{f}^*, L; s) = v(L)^{-1} Z^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s)$$

が成り立ち、その両辺は s の整関数に解析接続される。

Proof. (1.9) で見たように、ゼータ積分を

$$\begin{aligned} Z(\hat{f}^*, L; s) &= Z_+(\hat{f}^*, L; s) + Z_-(\hat{f}^*, L; s), \\ Z^*(f^*, L^*; s) &= Z_+^*(f^*, L^*; s) + Z_-^*(f^*, L^*; s) \end{aligned}$$

と分割すると、 Z_+ , Z_+^* の 2 項は任意の s について絶対収束する。ただし、 $Z_{\pm}$ は、積分範囲を $\chi^*(g) \geq 1$ としたものを Z_+ , $\chi^*(g) \leq 1$ としたものを Z_- として定義されている。したがって、積分範囲は Z_+ と Z_-^* とにおいて、また Z_- と Z_+^* とにおいて同一になっていることに注意しよう。さて、 Z_- , Z_-^* の項を Poisson の和公式から導かれる等式

$$\sum_{v \in L} \hat{f}^*(\rho(g)v) = v(L)^{-1} \det \rho(g)^{-1} \sum_{v^* \in L^*} f^*(\rho^*(g)v^*)$$

を用いて変形する。 f^* についての仮定から、この等式の v に関する和、および v^* に関する和は、それぞれ $L-S$, L^*-S^* を渡る和だとみなしてよい。また $\det \rho(g) = \chi(g)^{n/d} = \chi^*(g)^{-n/d}$ であることに注意する。このとき、 Z_- の収束する範囲で

$$\begin{aligned} Z_-(\hat{f}^*, L; s) &= \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \leq 1}} \chi(g)^s \sum_{v \in L-S} \hat{f}^*(\rho(g)v) dg \\ &= v(L)^{-1} \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi(g) \leq 1}} \chi(g)^{s-n/d} \sum_{v^* \in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*) dg \\ &= v(L)^{-1} \int_{\substack{G^+/\Gamma \\ \chi^*(g) \geq 1}} \chi^*(g)^{n/d-s} \sum_{v^* \in L^*-S^*} f^*(\rho^*(g)v^*) dg \\ &= v(L)^{-1} Z_+^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s) \end{aligned}$$

が成り立つ。同様にして、 Z_-^* の収束する範囲で

$$v(L)^{-1} Z_-^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s) = Z_+(\hat{f}^*, L; s)$$

が成り立つ。したがって、

$$Z(\hat{f}^*, L; s) = Z_+(\hat{f}^*, L; s) + v(L)^{-1} Z_+^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s) = v(L)^{-1} Z^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s)$$

が得られた。この等式の中央の表示は (1.9) の Proposition が示すように $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数を表わしている。したがって、もともとは $Z(\hat{f}^*, L; s)$ の収束する範囲、すなわち、 $\text{Re}(s) \gg 0$ で成り立っていたこの等式の左半分は $Z(\hat{f}^*, L; s)$ の全複素平面への解析接続を与える。一方、この等式の右半分はもともとは $Z^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s)$ の収束する範囲、すなわ

ち, $\operatorname{Re}(s) \ll 0$ で成り立っていたのだが, $Z^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s)$ の全複素平面への解析接続を与える. さらに, このようにして解析接続された関数に対して, 関数等式

$$Z(\hat{f}^*, L; s) = v(L)^{-1} Z^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s)$$

が成り立っていることも同時に示されている. ■

(2.5) (2.4) の Proposition の条件を満足する急減少関数 f^* が豊富に存在することを示そう.

Lemma. (i) f_0^* を, その台がコンパクトで $V_{\mathbb{R}}^* - S_{\mathbb{R}}^*$ に含まれるような $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の C^∞ -級関数とする. このとき, $f^*(v^*) = P(\operatorname{grad}_{v^*})f_0^*(v^*)$ は (2.4) の Proposition の条件を満たす.

(ii) f_0^* を, その Fourier 変換 $(f_0^*)^\vee$ の台がコンパクトで $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ に含まれるような $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の C^∞ -級関数とする. このとき, $f^*(v^*) = P^*(v^*)f_0^*(v^*)$ は (2.4) の Proposition の条件を満たす.

Proof. (i), (ii), どちらの場合も f^* が $S_{\mathbb{R}}^*$ 上で 0 となることは明らかである. Fourier 変換 $\hat{f}^*$ が $S_{\mathbb{R}}$ 上で 0 となることは,

$$\hat{f}^*(v) = (-2\pi i)^d \times \begin{cases} P(v)(f_0^*)(v) & \text{(i) のとき,} \\ P^*(\operatorname{grad}_v)(f_0^*)(v) & \text{(ii) のとき} \end{cases}$$

より分かる ([K], Lemma 29 参照). ■

(2.6) *Proof of Theorem (2.3).* (i), (ii) f_0 を, 台 $\operatorname{Supp}(f_0)$ がコンパクトで V_i に含まれるような $V_{\mathbb{R}}$ 上の任意の C^∞ -級関数とする. $f(v) = P^*(\operatorname{grad}_v)f_0(v)$ とおく. このとき, f の逆 Fourier 変換 f^* は, Lemma (2.5) (ii) が適用できる形をしており, したがって Proposition (2.4) より $Z(f, L; s)$ は $\mathbb{C}$ 上至るところ正則な関数に解析接続されている. $\operatorname{Supp}(f_0)$ が V_i に含まれていることにより, Proposition (1.8) から

$$Z(f, L; s) = \zeta_i(L, s)\Phi_i(f, s)$$

を得る. 局所ゼータ関数 $\Phi_i(f, s)$ は $\mathbb{C}$ 上の有理型関数に解析接続されていたから, $\zeta_i(L, s) = Z(f, L; s)/\Phi_i(f, s)$ も $\mathbb{C}$ 全体に有理型関数として解析接続される. 一方, b -関数の定義と部分積分法を用いて,

$$\Phi_i(f, s) = (-1)^d \epsilon_i b\left(s - \frac{n}{d} - 1\right) \Phi_i(f_0, s - 1) = \epsilon_i b(-s) \Phi_i(f_0, s - 1)$$

が得られる. ここで, b -関数の対称性 ([K], Proposition 30) を利用した. 任意の s に対して, 上の条件を満たし, かつ $\Phi_i(f_0; s - 1) \neq 0$ となる f_0 を見いだすことができるから,

$$b(-s)\zeta_i(L; s) = \epsilon_i \cdot \frac{Z(f, L; s)}{\Phi_i(f_0, s - 1)}$$

は $\mathbb{C}$ 上至るところ正則である. $\zeta_i^*(L^*, s)$ に対しても, まったく同様に証明できる.

(iii) f_0^* を台 $\text{Supp}(f_0^*)$ がコンパクトで V_j^* に含まれるような $V_{\mathbb{R}}^*$ 上の任意の C^∞ -級関数として, f^* を Lemma (2.5) (i) のように定める. このとき, ゼータ積分の関数等式

$$Z(\hat{f}^*, L; s) = v(L)^{-1} Z^*(f^*, L^*; \frac{n}{d} - s)$$

が成り立っている (Proposition (2.4)). この式を Proposition (1.8) を用いて書き直すと,

$$\zeta_j^*(L^*, \frac{n}{d} - s) \Phi_j^*(f^*, \frac{n}{d} - s) = v(L) \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i(L, s) \Phi_i(\hat{f}^*, s)$$

となる. ここで $\text{Supp}(f_0^*)$ が V_j^* に含まれているとしたことに注意せよ. また局所関数等式 (2.2)-2 より

$$\Phi_i(\hat{f}^*, s) = \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) C_{ij}(s) \Phi_j^*(f^*, \frac{n}{d} - s)$$

である. よって

$$\zeta_j^*(L^*, \frac{n}{d} - s) \Phi_j^*(f^*, \frac{n}{d} - s) = v(L) \gamma\left(s - \frac{n}{d}\right) \sum_{i=1}^{\nu} C_{ij}(s) \zeta_i(L, s) \Phi_j^*(f^*, \frac{n}{d} - s)$$

を得る. (i), (ii) の証明の最後の部分と同様にして $\Phi_j^*(f^*, \frac{n}{d} - s)$ が恒等的に 0 とはならないような f_0^* を選べるから, この等式の両辺を $\Phi_j^*(f^*, \frac{n}{d} - s)$ で割ることができ, 求める関数等式が得られる. ■

3 例

(3.1) 概均質ベクトル空間の理論の出現以前に, 前節で紹介したような議論を具体的な場合に適用していくつかのゼータ関数が構成されていた. 次表に対応する概均質ベクトル空間とその相対不変式を記した. 文献については, 別稿 [S4] §2.1 参照.

概均質ベクトル空間	相対不変式	ゼータ関数
$(GL(1), M(1))/\mathbb{Q}$	$P(v) = v$	Riemann (1859)
$R_{K/\mathbb{Q}}(GL(1), M(1))$ $[K : \mathbb{Q}] < \infty$	$P(v) = N_{K/\mathbb{Q}}(v)$	Dedekind (1877), Hecke (1917)
$(GL(1) \times SO(n), V(n))$	$P(v) =$ a quadratic form	Epstein (1903/07) (positive definite)
		Siegel (1938/39) (indefinite)
$(A^\times, A)$ A: simple algebra	$P(v) =$ the reduced norm	Hey (1929), Leptin (1955)
$(SO(m) \times GL(n), M(m, n))$	$\det {}^t v v$	Koecher (1953)

(3.2) 関数等式の例 (i). $G = GL_1$, $V = 1$ 次元ベクトル空間, G の V 上の表現 ρ は単なる乗法で与えられるもっとも簡単な概均質ベクトル空間を考える. このとき, $P(v) = v$ で $L = \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} = V_{\mathbb{Q}}$ に対応するゼータ関数は Riemann ゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

である. $G^+ = \mathbb{R}_{>0}$ で $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^{\times} = \mathbb{R}_{>0} \cup \mathbb{R}_{<0}$ と 2 つの連結成分を持つ. $L = \mathbb{Z}$ の場合はどちらの連結成分に対応するゼータ関数も Riemann ゼータ関数なので, 局所ゼータ関数は

$$\Phi(f, s) = \int_{\mathbb{R}^{\times}} |v|^{s-1} f(v) dv \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}))$$

と連結成分に分けずに定義しておこう. f の Fourier 変換を

$$\hat{f}(v) = \int_{\mathbb{R}} f(v^*) \exp(2\pi i v v^*) dv^*$$

とすると, 局所関数等式の explicit な形は

$$\Phi(\hat{f}, s) = 2(2\pi)^{-s} \Gamma(s) \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Phi(f, 1-s)$$

となる. この局所関数等式から得られるものをガンマ関数の公式を用いて少し変形してやると Riemann ゼータ関数は

$$\hat{\zeta}(1-s) = \hat{\zeta}(s), \quad \hat{\zeta}(s) = \pi^{-s/2} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$$

の形の関数等式を満たすことが分かる.

(3.3) 関数等式の例 (ii). $n \geq 2$ で $G = GL_1 \times SO(n)$, $V = \mathbb{C}^n$ のとき, $P(v) = v_1^2 + \cdots + v_n^2$, $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \{v \in \mathbb{R}^n \mid P(v) \neq 0\} = \mathbb{R}^n - \{0\}$ となる. よって, $V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}}$ は連結であり, 局所ゼータ関数は

$$\Phi(f, s) = \int_{\mathbb{R}^n - \{0\}} (v_1^2 + \cdots + v_n^2)^{s-n/2} f(v) dv \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

で定義される. f の Fourier 変換を

$$\hat{f}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} f(v^*) \exp(2\pi i (v_1 v_1^* + \cdots + v_n v_n^*)) dv^*$$

とすると, 局所関数等式の explicit な形は

$$\Phi(\hat{f}, s) = \pi^{-2s+(n-2)/2} \Gamma(s) \Gamma\left(s - \frac{n-2}{2}\right) \sin \pi \left(\frac{n}{2} - s\right) \Phi(f, \frac{n}{2} - s)$$

となる. 対応するゼータ関数は Epstein ゼータ関数

$$\zeta_n(s) = \sum_{v \in \mathbb{Z}^n - \{0\}} \frac{1}{(v_1^2 + \cdots + v_n^2)^s}$$

で, 上の局所関数等式から得られるものをガンマ関数の公式を用いて少し変形してやると

$$\hat{\zeta}_n\left(\frac{n}{2}-s\right)=\hat{\zeta}_n(s), \quad \hat{\zeta}_n(s)=\pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_n(s)$$

の形の関数等式を満たすことが分かる.

(3.3) 関数等式の例 (iii). もう少し複雑な例をあげる. $m > n \geq 1$, $m > p > 0$, $G_{\mathbb{R}} = GL_n(\mathbb{R}) \times SO(p, m-p)$, $V_{\mathbb{R}} = M(m, n; \mathbb{R})$ とし, 表現 ρ を $\rho(g, h)v = hv g^{-1}$ ($g \in GL_n, h \in SO(p, m-p)$) と定めると概均質ベクトル空間となり,

$$P(v) = \det({}^t v I^{(p)} v), \quad I^{(p)} = \begin{pmatrix} 1_p & \\ & -1_{m-p} \end{pmatrix}$$

である. $n, m-n \neq 2$ ならば, 付随するゼータ関数の収束も証明され, 前節までの結果がすべて適用できる. $n=1$ の場合が Siegel の不定値二次形式のゼータ関数である. $n \neq 1$ の場合は, 概均質ベクトル空間の理論によって始めて取り扱われるようになったゼータ関数である. $m-n$ または n が 2 に等しいときは, (1.2) の仮定 (*) が満たされず, ゼータ関数の取扱いは非常に難しい. $m=3$ のときくらいしか研究されていない.

$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \{v \in M(m, n; \mathbb{R}) \mid P(v) \neq 0\}$ は

$$V_{\mathbb{R}} - S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{i=\max\{0, n-m+p\}}^{\min\{p, n\}} V_i, \quad V_i = \{x \in M(m, n; \mathbb{R}) \mid \operatorname{sgn}({}^t v I^{(p)} v) = (i, n-i)\}$$

と分解される. ここで V_i の定義に現れる sgn は実対称行列の符号を表わす. この分解 (一般には既約成分への分解にはなっていないが) にもとづいて, 局所ゼータ関数を

$$\Phi_i(f, s) = \int_{V_i} |P(v)|^{s-m/2} f(v) dv \quad (f \in \mathcal{S}(M(m, n; \mathbb{R})))$$

と定義する. f の Fourier 変換を

$$\hat{f}(v) = \int_{M(m, n; \mathbb{R})} f(v^*) \exp(2\pi i \operatorname{tr}({}^t v v^*)) dv^*$$

とすると, 局所関数等式は

$$\Phi_i(\hat{f}; s) = \gamma_{m, n}(s) \sum_{\max\{0, n-q\} \leq i \leq \min\{p, n\}} C_{ij}(s) \Phi_j(f; \frac{m}{2} - s)$$

の形になる. ここで

$$\gamma_{m, n}(s) = \prod_{\mu=1}^n \Gamma_{\mathbb{R}}(2s - m + \mu + 1) \Gamma_{\mathbb{R}}(2s - \mu + 1), \quad \Gamma_{\mathbb{R}}(z) = \pi^{-z/2} \Gamma(z/2)$$

であり, $C_{ij}(s)$ は次で与えられる.

$$\begin{aligned}
C_{ij}(s) &= \begin{cases} 0 & \text{if } |i-j| \geq 2, \\ \end{cases} \\
C_{i,i}(s) &= \begin{cases} (-1)^{i(n-i)} \prod_{\mu=1}^i \cos \pi \left(s + \frac{\mu-p}{2} \right) \prod_{\mu=i+1}^n \cos \pi \left(s + \frac{\mu-(m-p)}{2} \right) & \text{if } m-p \equiv n-i \pmod{2}, \\ (-1)^{i(n-i)} \prod_{\mu=1}^{n-i} \cos \pi \left(s + \frac{\mu-(m-p)}{2} \right) \prod_{\mu=n-i+1}^n \cos \pi \left(s + \frac{\mu-p}{2} \right) & \text{if } m-p \not\equiv n-i \pmod{2}, \end{cases} \\
C_{i,i+1}(s) &= \begin{cases} \sin \pi \left(\frac{m-p-n+i+1}{2} \right) \prod_{\mu=1}^{n-i-1} \cos \pi \left(s + \frac{\mu-(m-p)}{2} \right) \prod_{\mu=n-i+1}^n \cos \pi \left(s + \frac{\mu-p}{2} \right) & \text{if } i \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 & \text{if } i \equiv 1 \pmod{2}, \end{cases} \\
C_{i,i-1}(s) &= \begin{cases} \sin \pi \left(\frac{p-i+1}{2} \right) \prod_{\mu=1}^{i-1} \cos \pi \left(s + \frac{\mu-p}{2} \right) \prod_{\mu=i+1}^n \cos \pi \left(s + \frac{\mu-(m-p)}{2} \right) & \text{if } n-i \equiv 0 \pmod{2}, \\ 0 & \text{if } n-i \equiv 1 \pmod{2}. \end{cases}
\end{aligned}$$

ゼータ関数 $\zeta_i(L, s)$ の関数等式については、今のところ、上の計算結果から一般論によって与えられる以上にきれいな形にはなっていないので、もう論じないこととする。後で解説される Ibukiyama-Saito 両氏が対称行列空間のゼータ関数について行なったような計算をこの場合にも実行できれば、関数等式ももう少し見やすい形に整理されるであろう。

[文献について]

文献の解説は別稿で行なったので、下の文献表は基本的に本稿で引用したものだけに限っている。ここでは入門的文献についてのみ、コメントしておく。実に愛想の無いコメントで申し訳ないが、概均質ベクトル空間についての入門書と言えるようなものはほとんどない。本講究録を手がかりに原論文を読んで下さい。ただし [R] は一応始めから書いてあって、前半が木村氏の解説 + 本稿と大体同じ範囲をカバーするので、参照されるならば補いあうところがある。[Y] は、本といっても論文なので入門向きとは言えない。

参考文献

- [BH] A.Borel and Harish-Chandra: Arithmetic subgroups of algebraic groups, *Ann. Math.* 75(1962), 485-535.
- [HS] Y.Hironaka and F.Sato: Eisenstein series on reductive symmetric spaces and representations of Hecke algebras, *J. reine angew. Math.* 445(1993), 45-108.

- [I] T.Ibukiyama: 2 次形式入門 II (不定値 2 次形式と Eisenstein 級数), 第 1 回整数論サマースクール「アイゼンシュタイン級数について」報告集, 1993, pp.56–75.
- [K] T.Kimura: 概均質ベクトル空間入門, 本講究録.
- [R] H.Rubenthaler: Algèbres de Lie et espaces préhomogènes, “Travaux en cours”, 44, Hermann, Paris 1992.
- [S1] F.Sato: On functional equations of zeta distributions, *Adv. Studies in pure Math.* 15(1989), 465–508.
- [S2] F.Sato: Siegel’s main theorem of homogeneous spaces, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* 41(1992), 141–167.
- [S3] F.Sato: Report on the convergence of zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, 本講究録.
- [S4] F.Sato: 概均質ベクトル空間に関連する文献, 本講究録.
- [SS] M.Sato and T.Shintani: On zeta functions associated with prehomogenous vector spaces, *Ann. of Math.* 100(1974), 131–170.
- [Si] C.L.Siegel: Über die Zetafunktionen indefiniter quadratischer Formen I, II, *Math. Z.* 43(1938), 682–708; 44(1939), 398–426.
- [Y] A.Yukie: *Shintani zeta functions*, Lect. Notes of London Math. Soc. No.183, 1993.