

On the convergence of derivatives of circle packing isomorphisms

東工大・理 志賀 啓成

(Hiroshige Shiga)

1. Introduction.

ここでは, B. Rodin "Schwarz's Lemma for Circle Packings. II" (J. Differential Geometry 30 (1989), 539-554) の解説をする。この論文は、その標題よりも、むしろこの解説の標題のように, circle packing によるリーマン写像の近似の際の微分の収束について扱ったものである。

平面上に単連結領域 Ω と、その内部の 2 点 z_0, z_1 が与えられたとき、リーマンの写像定理によつて、 Ω から単位円板 D への等角写像 f で、 $f(z_0) = 0$, $f(z_1) > 0$ なるものが唯一つ存在する。この等角写像は Ω の circle packing から得られる写像によつて近似されることが証明されている (Rodin-Sullivan [RS])。まず、その手続きを簡単に復習する。

任意の正数 ε に対し、 $HCP(\varepsilon)$ を半径 ε の円による平面の regular hexagonal circle packing とする。このとき領

域 Ω の $HCP(\varepsilon)$ の円による内部近似を Ω_ε とする。すなわち、 Ω_ε は自分自身とその回りの6つの円が全て Ω に含まれている円 (inner circle) と、 Ω に含まれてはいないが、inner circle ではない円 (border circle)、からなっている。このような Ω_ε に対して、これと組み合わせ的に同値な circle packing が (Ω'_ε とかく) 単位円 D 内にとれる。ただし、 Ω'_ε の border circle は全て ∂D に接しているものをとる。

(Andreev-Thurston の定理)。 Ω_ε の円を、 z_0, z_1 の近くにあるものを C_0, C_1 、それに対応する Ω'_ε の円を C'_0, C'_1 とする。 D を不変にする Möbius 変換を作用させることによって、 C'_0 の中心は原点、 C'_1 の中心は正の実軸上にあると仮定してよい。

さて、 Ω_ε と Ω'_ε は組み合わせ的に同値であって、 π から、それぞれの円の中心を頂点 (vertex)、互いに接する円の中心を結ぶ線分を辺 (edge) とする複体 (これを、それぞれ $T_\varepsilon, T'_\varepsilon$ とする) を作れば、それらの間に自然な写像 f_ε が存在する。この写像 f_ε は T_ε の carrier $|T_\varepsilon|$ から T'_ε の carrier $|T'_\varepsilon|$ への区分的 linear map ととれる。したがって、特に quasi conformal である。そして、packing constant (後述) が、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき 0 に収束することから、この f_ε が等角写像、すなわちリーマン写像に収束していることがわ

かる。

実際には、上の収束は Ω 上広義一様収束になっているのだが、ここでは更に、 f_ε の「微分」の収束を問題にする。

[Question]

f_ε の image の円と pre-image の円の半径比は Riemann 写像の微分に収束するか？

[この論文での解答]

ある条件の下では Yes. 一般には BMO-norm で正しい。

注意 上の「ある条件」とは、packing constant の評価についての条件だが、実はこの条件は $He[H]$ によって、正しいことが示されているので、結局、この論文で示された定理の結論が、いつも成立していることになる。

2. 記号と定義

Ω : 平面内の有界単連結領域 $\ni z_0, z_1$.

D : 単位円板, $\varepsilon > 0$.

f : Ω から D への conformal map (Riemann map) として、

正規化条件 $f(z_0) = 0, f(z_1) > 0$ なるもの。

Ω_ε : Ω の regular hexagonal circle packing に ε 近似的

Ω'_ε : D の circle packing として、 Ω_ε と組合せ的に同値なもの。

$T_\varepsilon^{(1)}: \Omega_\varepsilon^{(1)}$ より得られる複体

$|T_\varepsilon^{(1)}|: T_\varepsilon^{(1)}$ の carrier

$f_\varepsilon: |T_\varepsilon|$ から $|T_\varepsilon'|$ への自然な写像

$|T_\varepsilon|$ の三角形の頂点 z は Ω_ε の円の中心に対応していた。
また、 T_ε と T_ε' は組合せ的に同値であるから、 $|T_\varepsilon'|$ にも対応する関数がある。そこで、 $\gamma_\varepsilon(z)$ を

$$\gamma_\varepsilon(z) = \frac{(C' \text{ の半径})}{(C \text{ の半径})}$$

で定義する。ここに、 C は z 中心の Ω_ε の円、 C' はそれに対応する Ω_ε' の円である。 $|T_\varepsilon|$ の頂点で定義された関数 $\gamma_\varepsilon(z)$ を $|T_\varepsilon|$ 全体に連続的に拡張して、それをやはり同じ $\gamma_\varepsilon(z)$ と書く（拡張のやり方は、例えば三角形の重心座標を用いて、内部の点を頂点で表せば容易）。このようにして、連続関数

$$\gamma_\varepsilon: |T_\varepsilon| \rightarrow \mathbb{R}$$

を得る。

Packing constant S_n

$\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、 HCP_n を平面の regular hexagonal packing の第 n 世代までの circles 全体、 $HCP_n' \in HCP_n$ と組合せ的に同値な circle packing とする。

この HCP_n' に対して、その第 0 世代の円と第 1 世代の円の半径比を $\rho < 1$ とし、

$$S_n = \sup_{HCP_n'} |1 - \rho|$$

と置く。ここに $\sup$ は上のような HCP_n' 全てに渡り、考えるものとする。このとき、 $S_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) が知られている。

3. 微分の収束

Proposition. 1.

前節の記号で、 $S_n = O(\frac{1}{n})$ ならば、 $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 γ_ε は $|f'|$ に Ω 上で一様収束する。

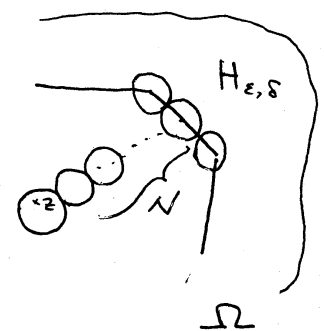
証明 $z \in \Omega$, $\varepsilon, \delta > 0$ を固定する。ただし、 ε, δ は $\text{dist}(z, \partial\Omega) > \exists d \gg \delta \gg \varepsilon > 0$ ととって置く。ここで、

$H_{\varepsilon, \delta}$: z に最も近い円を中心とし直径 2δ の六角形とする。ここでは、特に第 N 世代の円^{の中心}を結んでできる六角形になつていゝとする。(図参照)

したがつて、 $\delta = 2\varepsilon N$ である。

よつて、 Ω_ε は $[d/2\varepsilon] = [Nd/8]$ 世代の円は必ず含む。そして、この世代数は z の近傍の点を z の代わりに考へても

成立している。ここで $\varepsilon \rightarrow 0$ とすると、六角形 $H_{\varepsilon, \delta}$ はあ



ここで $S_n = O(\frac{1}{n})$ を使う。 $\exists B > 0$ s.t. $0 \leq S_n \leq B/n$ となる。

$$\begin{aligned} (1 + S_{\lfloor dN/\delta \rfloor})^{2N} &\leq (1 + B/\lfloor dN/\delta \rfloor)^{2N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{2B\delta/d} \\ (1 - S_{\lfloor dN/\delta \rfloor})^{2N} &\geq (1 - B/\lfloor dN/\delta \rfloor)^{2N} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-2B\delta/d} \end{aligned}$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、 $N \rightarrow \infty$ となる。

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 e^{-\frac{2B\delta}{d}} \leq \frac{|f(H_{0,\varepsilon})|}{|H_{0,\varepsilon}|} \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{R}{\varepsilon}\right)^2 e^{\frac{2B\delta}{d}}$$

定義より、 $r_\varepsilon(z) = R/\varepsilon$ だから、 $\delta \rightarrow 0$ とすれば：

上式より、 $r_\varepsilon \rightarrow |f|$ を得る。収束の定義-様性は N の評価の-様性から従う。 Q.E.D.

注意 Introduction でも述べたように、「 $S_n = O(\frac{1}{n})$ 」という条件は、 $H_\varepsilon[H]$ によって示されている。

擬等角写像 f_ε の微分についても同様のことが示せる。それは次の事実と Proposition 1 から直ちに従う。

Theorem 1

$$\left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial z} \right| = r_\varepsilon (1 + O(S_n))$$

$$\left| \frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}} \right| = r_\varepsilon O(\sqrt{S_n})$$

$$|\mu_\varepsilon| = O(\sqrt{S_n})$$

ただし、 μ_ε は f_ε の complex dilatation である。

証明 Rodin [R1] を見よ.

4. r_ε の BMO-norm による収束.

前節の Proposition 17.4 により、 $s_n = O(\frac{1}{n})$ という仮定のもとで、 $r_\varepsilon \rightarrow |f'|$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) の収束が証明され、しかも、 H_2 によつて、 $s_n = O(\frac{1}{n})$ が示されているので、 $r_\varepsilon \rightarrow |f'|$ に関しては一応の結果を得たのであるが、ここでは、Rodin の論文に沿つて、 $r_\varepsilon \rightarrow |f'|$ の BMO-norm に関する結果を簡単に紹介する。ただし、ここでは、BMO に関する事実は、基本的なものについては省略する。適当な教科書を参照されたい。

補題 1.

w, w_n ($n=1, 2, \dots$): Ω 上の quasi conformal

$\{w_n\}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき広義一様 w に収束しており、更に微分 $\{\partial w_n / \partial \bar{z}\}$ も $\partial w / \partial \bar{z}$ に L^∞ -norm で局所的に収束していると仮定する。このとき、微分 $\{\partial w_n / \partial \bar{z}\}$ は $\partial w / \partial \bar{z}$ に Ω 内局所的に、BMO-norm で収束する。

略証.

Hilbert 変換 S を

$$S w(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{w(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi d\eta \quad (z = \xi + i\eta)$$

で定義すると、これは L^∞ から BMO への連続作用素

$$\implies \text{---} \bar{\partial}, \quad S(\partial f / \partial \bar{z}) = \partial f / \partial z$$

$$\implies \text{よって } \partial w_n / \partial \bar{z} \rightarrow \partial w / \partial \bar{z} \quad \text{loc. in } L^\infty \text{ から}$$

$$\partial w_n / \partial z = S(\partial w_n / \partial \bar{z}) \rightarrow S(\partial w / \partial \bar{z}) = \partial w / \partial z$$

loc. in BMO がいえる。

(実際には、議論を局所化する必要があるので、 $C_0^\infty(\Omega)$ の適当な関数との積を考えて、上の推論を行う。) Q.E.D.

Theorem 2.

Ω 上局所的に r_ε は $|f'|$ に BMO -norm で収束する。

証明

r_ε は局所一様有界で、 s_n は $(n \rightarrow \infty)$ 0 に収束するから、Theorem 1 から $\partial f_\varepsilon / \partial \bar{z} \rightarrow 0$ (loc. in L^∞)。また、 f_ε は等角写像 f に局所一様収束している。よって $\{f_\varepsilon\}$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ のとき、上記補題の条件を満たしている。よって

$$\frac{\partial f_\varepsilon}{\partial \bar{z}} \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad (\text{loc. in } BMO).$$

再び Theorem 1 を用いると、 $r_\varepsilon \rightarrow |f'|$ (loc. in BMO) がわかる。 Q.E.D.

系

$$\partial f_\varepsilon / \partial \bar{z} \longrightarrow f' \quad (\text{loc. in } BMO).$$

5. The rate of convergence of $f_\varepsilon \rightarrow f$

この節では、 $f_\varepsilon \rightarrow f$ の収束の評価を ε を用いて行う。

Theorem 3.

$z_0, z_1 \in \Omega$, $K \subset \Omega$ 内の compact 集合、 $f_\varepsilon \in HCP(\varepsilon)$ と z_0, z_1 に關して作られた circle packing isomorphism とする。このとき、 $\exists C, \exists p > 2$ がとれて、 $\forall \varepsilon > 0$ に対し、

$$\|f - f_\varepsilon\|_K \leq C \left(\sqrt{S_{[\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}]}} + \varepsilon^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

が成立する。ここに f は $f(z_0) = 0$, $f(z_1) > 0$ なる Ω の Riemann 写像である。

略証 $W_\varepsilon = |T_\varepsilon|$, $D_\varepsilon = |T'_\varepsilon|$ とおいて、 G_{W_ε} , G_{D_ε} をそれぞれ、 W_ε , D_ε の Riemann 写像で、 $G_{W_\varepsilon}(z_0) = 0$, $G_{W_\varepsilon}(z_1) > 0$, $G_{D_\varepsilon}(0) = 0$, $G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z_1)) > 0$ なるものとする。そこで、

$$\begin{aligned} |f(z) - f_\varepsilon(z)| &\leq |f(z) - G_{W_\varepsilon}(z)| \\ &+ |G_{W_\varepsilon}(z) - G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{W_\varepsilon}^{-1}(G_{W_\varepsilon}(z))| + |G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z)) - f_\varepsilon(z)| \end{aligned}$$

という不等式を考え、右辺を ε で評価することを考える。

右辺の第1項 $|f(z) - G_{W_\varepsilon}(z)|$ は2つの領域 Ω , W_ε の Riemann 写像の比較である。しかも、その境界同士の近さは ε で評価される。したがって、 f , G_{W_ε} の差も、古典的な Warschawski の結果から ε で評価できる ([R2] Lemma 3.1)。

第3項 $|G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z)) - f_\varepsilon(z)|$ は D_ε の Riemann 写像 と恒等写像の差 (の $f_\varepsilon(z)$ の値) とみなせる。その評価を行うためには、領域 D_ε が単位円板 D へ “どれほど” 近いかを見る必要がある。 D_ε の構成法を考えれば、それは D の packing Ω_ε' の border circle の半径を評価することに他ならない。そのため、次の補題を使う。

補題 2 (Length-Area-Theorem の拡張)

次の性質を満たす絶対定数 $C > 0$ が存在する。

C : Ω_ε' の border circle

C のまわりの第 1 世代から第 N 世代までの circles の cross cut が C と 0 とを分離していたとする。

このとき、

$$S(=S(R, N)) = \inf \{ \text{第 } j \text{ 世代の cross cut chain の} \\ \text{半径の和, ただし } R \leq j \leq 2R-1 < N \}$$

とすると, $S \leq C(R/N)^{\pi^2/24}$.

証明 略. [R2] Lemma 3.2 を見よ。

この補題から、 Ω_ε' の border circle の半径 ε で評価できる。実際、border circle の半径は $R=1$ のときの、上記 S より小さいから、 $\leq C(1/N)^{\pi^2/24}$ 。よって、border circle と 0 とを分離する世代数 N を評価すればよい。 Ω_ε と Ω_ε' は組合せ的に同値なので、 Ω_ε において z_0 と border circle を分

離する世代数と同じである。ところが、この世代数は容易に、 $\text{dist}(z_0, \partial\Omega)/2\varepsilon$ 程度であることがわかる。したがって、 $N = O(\frac{1}{\varepsilon})$ 。よって、 Ω'_ε の border circle の半径は、ある $C_\Omega > 0$ かとれて、 $\leq C_\Omega \varepsilon^{\pi^2/24}$ となる。よって、 $D_\varepsilon \simeq D$ との近さを評価できる。

第2項 $|G_{w_\varepsilon}(z) - G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{w_\varepsilon}^{-1}(G_{w_\varepsilon}(z))|$ の評価は最もデリケートである。この項は、擬等角写像 $G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{w_\varepsilon}^{-1}$ と恒等写像の差 (の $G_{w_\varepsilon}(z)$ での値) と見る。

そのためには、 $h_\varepsilon := G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{w_\varepsilon}^{-1}$ とおいて、 h_ε の complex dilatation を評価すればよい。というのは、 h_ε は $D \rightarrow D$ の $g \in \mathcal{C}$ で、 $h_\varepsilon(0) = G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon \circ G_{w_\varepsilon}^{-1}(0) = G_{D_\varepsilon} \circ f_\varepsilon(z_0) = 0$ 、 $\rho = G_{w_\varepsilon}(z_1)$ とおくと、 $h_\varepsilon(\rho) = G_{D_\varepsilon}(f_\varepsilon(z_1)) > 0$ であり。 G_{w_ε} が局所一様に Riemann 写像 f に収束するから、 $\exists \rho_0 > 0$ s.t. $\forall \varepsilon > 0$ に対し、 $\rho_0 < \rho < 1$ である。よって、 h_ε はある程度の正規化条件を満たしているのて、その complex dilatation で、恒等写像との差分が評価できる ([R2] Lemma 3.4)。

一方、 h_ε は f_ε と conformal map とを合成させたものなので、 f_ε の complex dilatation μ_ε を考えればよい。 μ_ε については Theorem 1 より $\|\mu_\varepsilon\|_K = O(\sqrt{S_n})$ であることがわかる。ただし $n = \lfloor \text{dist}(K, \partial\Omega)/2\varepsilon \rfloor$ 。ところで、一般に擬等角写像と恒等写像との差を見るのに、compact 集合上の、

complex dilatation の情報だけでは十分ではない。しかし、単位円板から単位円板への、「正規化された」擬等角写像については、その compact 集合の「サイズ」を用いて評価できる ([R2] Lemma 3.4)。この結果を用いる為には、 μ_ε の大きさを評価できる W_ε の compact 集合に対える。 ν_ε の定義域、すなわち D での compact 集合の「サイズ」を調べることによって得られる。(詳細略) Q.E.D.

注意 最後の部分、すなわち、 W_ε の compact 集合に対える D での compact 集合の「サイズ」を調べるには、 Γ_{W_ε} による compact 集合の対えを見ればよいが、Rodin は論文では、Warschawski の結果 ([R2] Lemma 3.1) から従うと、書いてあるが、筆者にはその理由が判然としなかった。

References

- [H] He, Z., An estimate for hexagonal circle packings, *J. Differential Geometry* **33** (1991), 395–412.
- [MR] Marden, A. and B. Rodin, On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem, *LNM 1435* Springer (1990), pp. 103–115.
- [R1] Rodin, B., Schwarz's Lemma for Circle packings, *Invent. Math.* **89** (1987), 271–289.
- [R2] Rodin, B., Schwarz's Lemma for Circle packings II, *J. Differential Geometry* **30** (1989), 539–554.
- [RS] Rodin, B. and D. Sullivan, The convergence of circle packings to the Riemann mapping, *J. Differential Geometry* **26** (1987), 349–360.