

河床波の変形過程に関する実験的研究

芦田 和男・澤井 健二

AN EXPERIMENTAL STUDY ON THE TRANSFORMATION OF SAND WAVES

By Kazuo ASHIDA and Kenji SAWAI

Synopsis

Sand waves in an alluvial channel are not necessarily in an equilibrium state during flood. Therefore, their growing and diminishing processes may be considered to take an important role in the mechanism of flow resistance, sediment transport and bed transformation. In this study, the authors carried out some experiments on the transforming process of sand waves under unsteady flow conditions, and found the following interesting results.

For given hydraulic conditions, there is a preferable linear combination between the mean wave length λ and mean wave height H . When a bed form is not in the equilibrium state (λ_e, H_e), λ changes at first until the linear relation is fulfilled, thereafter both of λ and H changes toward λ_e and H_e along it.

1. 緒 言

河川の抵抗や流砂あるいは流路変動の機構において、河床波の占める役割は大きく、従来数多くの研究がなされてきた。その結果、平衡状態の河床波に関しては、力学的に見た内部機構の解釈はともかくとして、経験的あるいは次元解析的に、その法則がかなり解明されている。しかしながら、実河川の流量は絶えず変化しており、はたして時々刻々の水理量に対応した平衡状態の砂州や砂堆が形成されているかどうかは疑問である。たとえば、河川における流量と水位の対応を見ると、増水期には、減水期に比べて、同じ流量に対する水位が低く、水位—流量曲線がループを描くが、その原因のひとつは、河床波、とりわけ lower regime における小規模河床形態としての砂漣や砂堆の対応の遅れにあるのではないかと考えられる。また、洪水時に形成された中規模河床形態としての砂州が、平水時においても消滅せず、流れを強く規制しているのは、よく見かけるところである。

このような、流量が変化する場での河床形態を考える時、流量の変化速度が河床の変形速度に比べて充分に小さければ、近似的には各時点の水理量に対応した平衡状態の河床波が形成されているものと考えてよく、逆に、河床の変形速度が流量の変化速度に比べて小さい場合には、代表的あるいは平均的な河床形状と、それを形成する支配流量を考えるのが便利である。これに対して、その中間的な状態あるいは、それらを包含したより一般的な状態を対象とする場合には、河床波の変形過程そのものが問題となるであろう。この意味で、どのような水理条件の時、河床波の変形がどの程度の速さで進むかを把握することは重要である。

ところで、一口に河床波の変形過程と言っても、その形状特性のどこに着目するかによって、接近法が変わってこよう。現実の河床波は、たとえ平衡状態といえども、きわめて不規則な構造をっており、波長や波高をどのように定義すれば良いかさえ、惑うことが多い。最近では、そのスペクトル構造に着目した研究も増えつつあるが、現在の段階では、それらを抵抗や流砂の問題に結びつけるまでには至っておらず、不明確ではあっても、代表的な波長や波高に着目せざるを得ないように思われる。そこで、著者らは、任意の河床

形状をその平均波長と平均波高で代表させ、それが任意の水利条件のもとでどのような変化速度をもつかと
いった観点から、河床波の変形過程を支配する法則を見い出していこうとするものである。

2. 河床波の発達に要する時間

河床波の変形過程に関するひとつの典型的な問題として、一定の水利条件（流量）のもとで、平坦な河床
から河床波が充分に発達するまでの過程が挙げられる。Yalin・Bishop¹⁾ によれば、砂堆の領域において、こ
の過程に要する時間 T は、河床波の縦断面積に比例し、流砂量に逆比例して、次のように表される。

$$T = \alpha \frac{\Delta A}{q_B} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 Δ は河床波の波高、 A は波長、 q_B は河床波上での単位幅流砂量で、 α は比例係数である。彼らは
さらに、波長・水深比がほぼ一定で、 q_B と平坦河床上での単位幅流砂量 $\bar{q}_B$ との比が波形勾配 $\delta (\equiv \Delta/A)$ の
みの関数

$$f(\delta) = 1 - 3.33\delta \dots \dots \dots (2)$$

で表され、 $\bar{q}_B$ が余剰掃流力の $3/2$ 乗に比例するものとして、実測値から係数を決め、

$$\Pi_T = 31.5 \frac{\delta}{f(\delta) \cdot (\tau/\tau_c - 1)^{3/2}} \dots \dots \dots (3)$$

を得ている。ここに、 $\Pi_T \equiv T \sqrt{(\rho_s/\rho - 1)gd^3\tau_c^{3/2}/h^3}$ である。上式の係数は、波形勾配 δ が τ/τ_c のみの関
数であるとして求められたものであるが、その後の Yalin・Karahane²⁾ の研究によれば、波形勾配は相対水深
 h/d によっても変化し、

$$\delta = 0.0127 x \exp(-x/x) \dots \dots \dots (4)$$

と表される。ここに、 $x \equiv \tau/\tau_c - 1$ で、 x は同一の相
対水深において最大波形勾配 δ_{max} をとるときの x の
値であり、 h/d の関数となる。そこで、 δ_{max} と h/d
の関係を文献²⁾ の Fig. 5 から読み取り、(3) 式を用
いて河床波の発達時間を求めると、Fig. 1 が得られる。
ただし、 $\tau_c = 0.05$, $\rho_s/\rho = 2.65$ としている。また、
この関係は砂堆の領域において適用すべきものである
から、図には、芦田・道上³⁾ による領域区分線（点
線）も併せて載せ、さらに、読み取りの便宜のため、
等勾配線（破線）も記入している。

この図によると、たとえば、 $I = 1/500$, $d = 1$ mm,
 $h = 15$ cm の場合には $T \approx 1$ hr, また、 $I = 1/5000$, $d =$
 0.3 mm, $h = 1.5$ m の場合には $T \approx 150$ hr となり、実
験室規模では比較的早く平衡状態が得られるが、実河
川規模では平衡状態の形成に数日間も要することにな
る。

次に、三次元河床波の典型例である交互砂州に関し
て、藤田・村本・堀池⁴⁾ は、横断方向の河床の変形量
と流砂量の比を考えることにより、

$$T \approx 0.6 \frac{l_B z_B}{q_B} \dots \dots \dots (5)$$

を得ている。ここに、 l_B, z_B は交互砂州の波長（蛇行
半波長）と波高である。先の 2 番目の検討例において、
河幅 B を 500 m とし、村本・藤田⁵⁾ による $l_B/B, z_B/B$

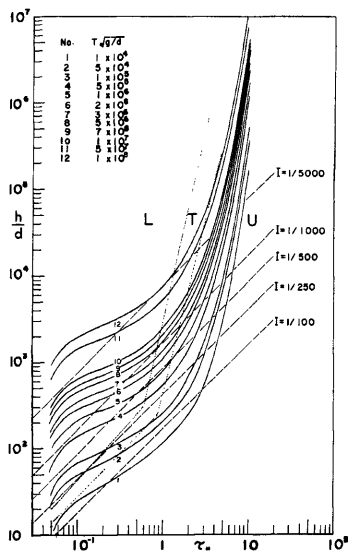


Fig. 1. Time required for fully development of dunes after Yalin et al.'s model, superposed on the classification diagram of bed configurations.

B と B/h の関係を外挿して、 $l_B/B=2$ 、 $z_B/B=2 \times 10^{-3}$ と推定し、さらに限界掃流力を考慮した Brown 型の掃流砂関数を用いて式より T を推定すれば、約73日となる。

従来のいくつかの研究⁹⁾⁷⁾⁸⁾に見られるように、河床波の波高が時間の平方根に比例して増加し、平衡状態の波高に達するものとすれば、上記の時間よりはかなり短い時間で、平衡状態に近い形状が得られるが、いずれにしても、わが国の出水形態を考えれば、洪水の継続時間は、河床波の発達時間に比べてかなり短いものと思われ、非平衡状態における河床波の変形過程の研究がきわめて重要であると言えよう。

3. 河床波の変形過程に関する実験

3.1 実験方法

緒言にも述べたように、河床波はきわめて不規則な構造をもっており、ある程度の区間にわたる統計的あるいは平均的な取り扱いをしなければ、法則性を見出すことは難しい。したがって、実験を行う場合には、議論を明確にするために、流れをできるだけ等流状態に保つことが望まれる。これには、水位と給砂量の制御が必要であり、従来の研究においても種々の工夫がなされてきた。常流条件下の実験においては、水路下流端に堰を設けて、各流量ごとに河床波の充分発達した状態において所定の勾配の等流が得られるよう、堰高を設定するのが通例である。しかし、この方法では、河床波が充分に発達していない段階において、下流端をせき上げ過ぎており、エネルギー勾配を小さくするとともに、不等流下で実験を行うことになる。したがって、堰高は河床波の変形過程においても常時調節しながら実験を行うことが望ましい。本実験では、極力等流状態を維持できるよう、堰高を絶えず調節した。しかしながら、堰のごく近傍においては必然的に局所流が生じるため、それによる洗掘を防ぐ意味で、下流端 80 cm は固定床としている。また、逆に堆積が生じないよう、堰の下面を水路底から 1.2 cm 高くして、その間隙を土砂が流下し得るようにしている。

給砂量についても、水位と同様、実験中絶えず調節して、下流端の流出土砂量と一致させることが望ましいが、これには、流出土砂をできるだけ早く上流へ循環させるのがよいであろう。本実験では、サンドポンプを有する循環水路を用いて水と土砂を共に循環させているため、その対応の遅れは数秒程度であると思われる。ただし、この方法を用いると、流砂量の測定が困難となり、本実験では測定を行わなかった。

河床波の変形過程に関する実験において、水深を独立量に選び、流量あるいは勾配を調節しながら実験を行うことも可能である⁹⁾が、実河川の現象を念頭におけば、勾配と流量を独立変数に選ぶのが自然である。そこで本実験では、勾配を時間的に一定に保ち、2～3の段階の流量を交互に変化させた場での河床波の変形過程を調べることにした。用いた水路は幅 50 cm、長さ 20 m で、中央の 9 m を測定区間とし、水路中心線に沿ってサーボ式水位計と超音波または電気抵抗式河床測定器を走らせて、水面ならびに河床形状を測定した。実験条件は、Table 1 および Fig. 2 に示す通りであり、使用砂の粒度分布は Fig. 3 に示している。

3.2 実験結果

本研究においては、河床波形状をその平均波長と平均波高で代表させているが、その定義を明確にしておく必要がある。個々の波の読み取りには種々の方法があり、スペクトル解析のように、種々の波の重ね合わせを議論することも可能であるが、抵抗の算定や流砂量の算定においては、むしろ個々の波の連なりとして河床波を把える方がよいと思われる。個々の波の判別には、平均河床高を零位とする

Table 1. Experimental conditions.

Case No.	d (mm)	I	Initial bed
2	0.30	1/500	flat
3	0.30	1/500	flat
4	0.30	1/500	flat
5	0.30	1/500	flat
6	0.30	1/500	flat
7	0.30	1/500	flat
8	0.30	1/500	flat
9	0.30	1/250	flat
10	0.30	1/250	flat
12	1.0	1/500	flat
13	1.0	1/500	flat
14a	1.0	1/500	flat
14b	1.0	1/500	equilibrium at $q=950 \text{ cm}^2/\text{s}$
15	1.0	1/500	equilibrium at $q=270 \text{ cm}^2/\text{s}$

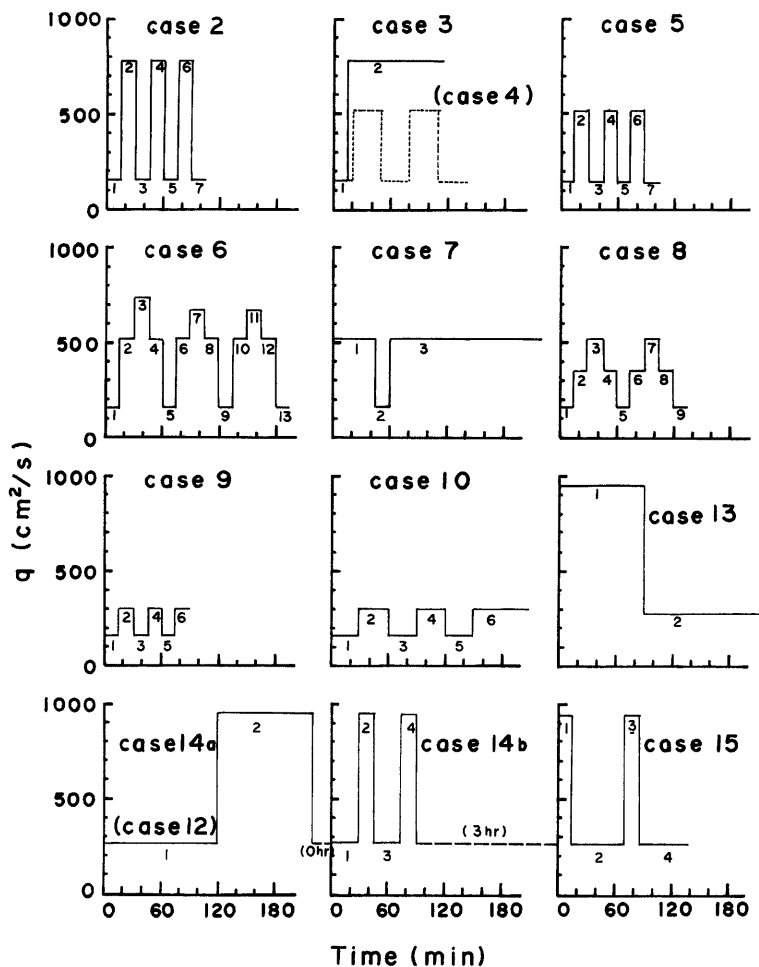


Fig. 2. Hydrographs designed for each experiment.

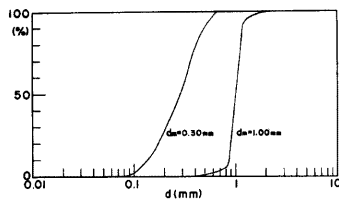


Fig. 3. Grain size distributions of sand.

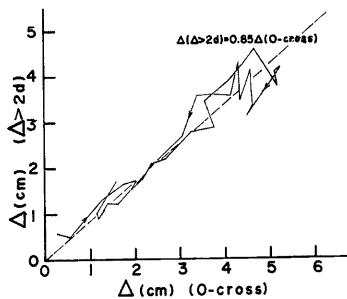


Fig. 4 (a)

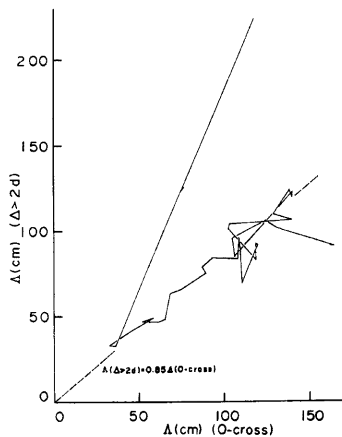


Fig. 4 (b)

零交法, ある基準波高以上の凹凸をすべてとり出す方法などが考えられるが, 本研究では上方への零交叉点間をもってひとつの波とみなし, その間の最高点と最低点との落差を波高と定義している。これは, 水流のエネルギー損失が, 主として断面の急拡部で生じており, その急拡量が重要であると考えたからである。以下の議論はすべて測定区間内の平均波長 λ , 平均波高 H に関するものであり, 波形勾配 δ もそれらの比として定義している。なお, Fig. 4 (a)~(c) に, 零交叉法による値と, 2 粒径以上の凹凸をすべて河床波として読み取った場合の値とを比較しているが, 波長・波高とも前者は後者の約 1.2 倍となっており, 波形勾配には顕著な差は見られない。

各実験ケースにおける諸量の時間変化を Fig. 5 に示している。これらの図を概観すれば, 各水利条件 (粒径, 勾配, 流量) に対応した平衡波長と平衡波高があり, それと異なる河床は多くの場合, 平衡状態に向かって指数関数的に漸近する。この傾向は特に波高の変化について顕著に見られる。しかしながら, 波長の変化を詳しく見ると, 流量変化時に激しく変化 (特に急減) して, むしろ平衡値から遠ざかるような例もあり, その動きは複雑である。また, 流量変化に対応して水深が大きく変化するが, 同一流量下では, 河床波の波高あるいは波形勾配の増減に応じて水深が変化しており, さらに細かい水深の変化は, 水面勾配の変化に対応していることがわかる。この水面勾配の変化は, 下流端の堰の操作の難しさをものごとになっている。

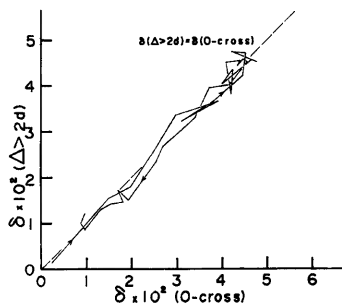


Fig. 4 (c)

Fig. 4. Comparison of the mean height, mean length and mean steepness of sand waves defined by different methods (Case 13).

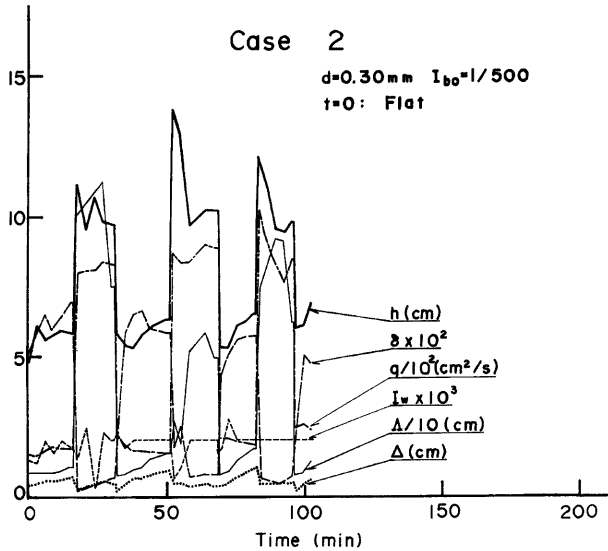


Fig. 5 (a)

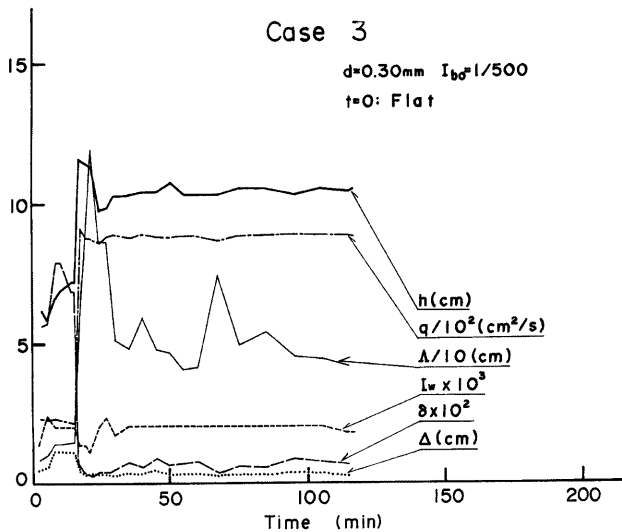


Fig. 5 (b)

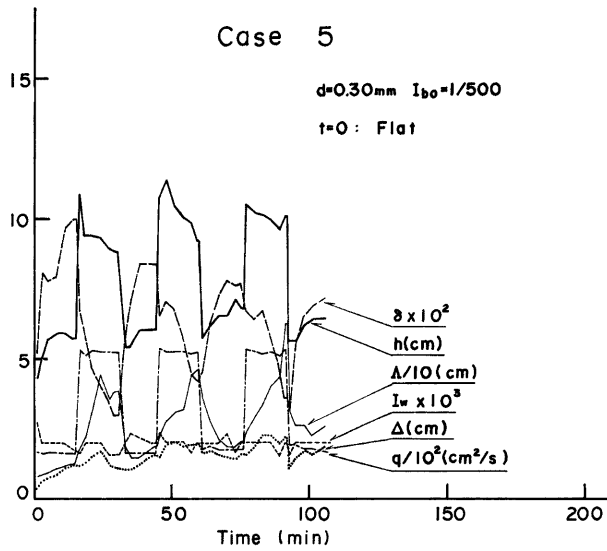


Fig. 5 (c)

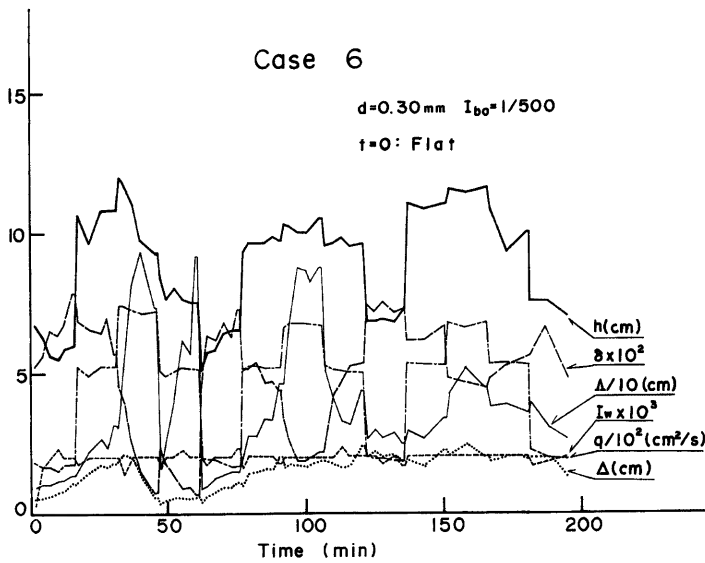


Fig. 5 (d)

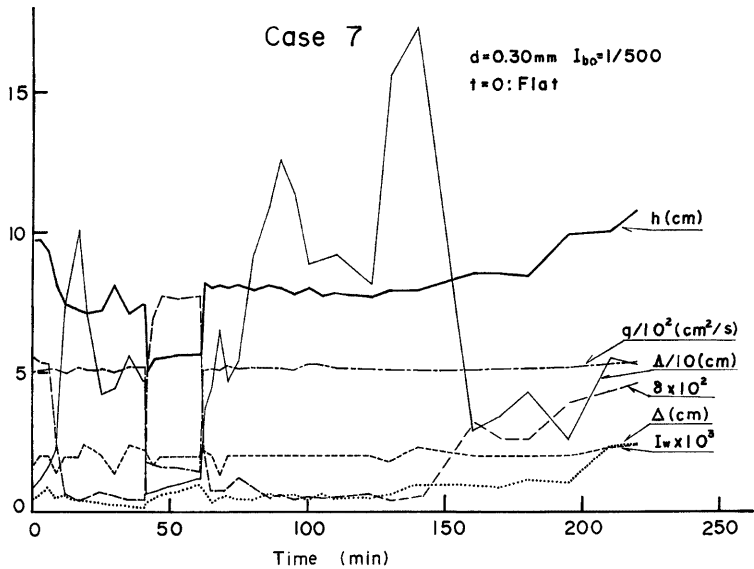


Fig. 5 (e)

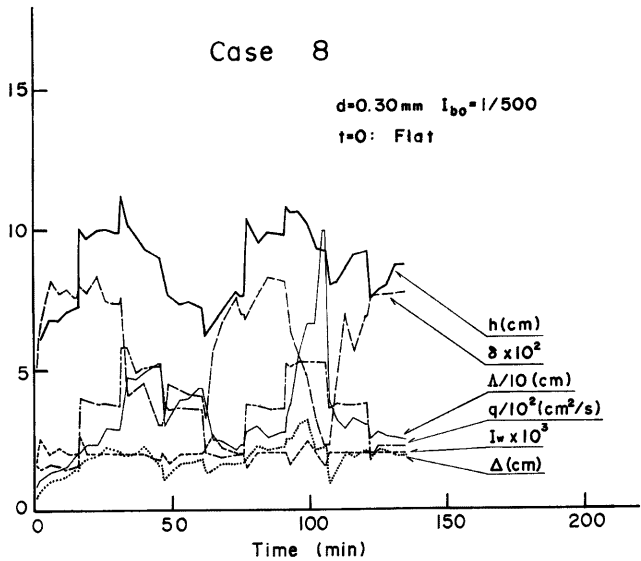


Fig. 5 (f)

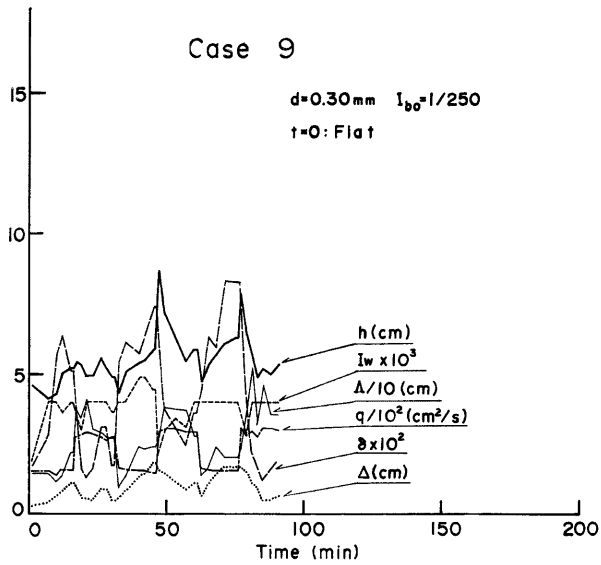


Fig. 5 (g)

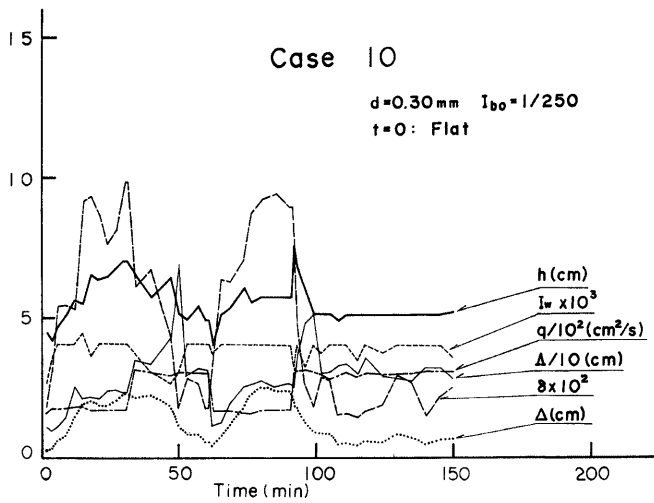


Fig. 5 (h)

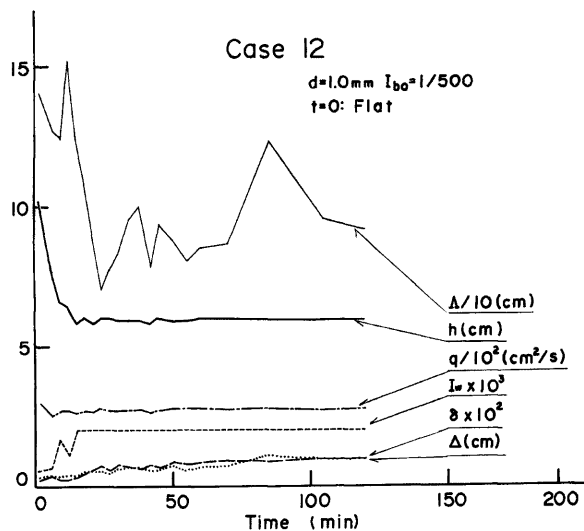


Fig. 5 (i)

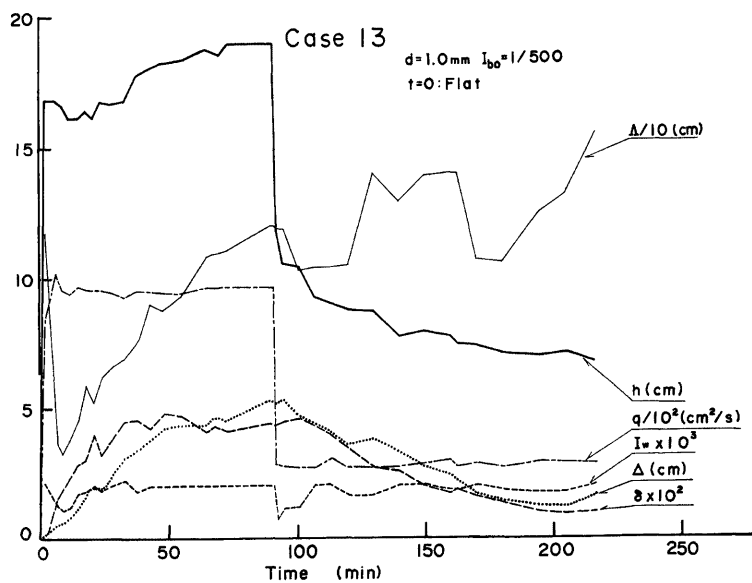


Fig. 5 (j)

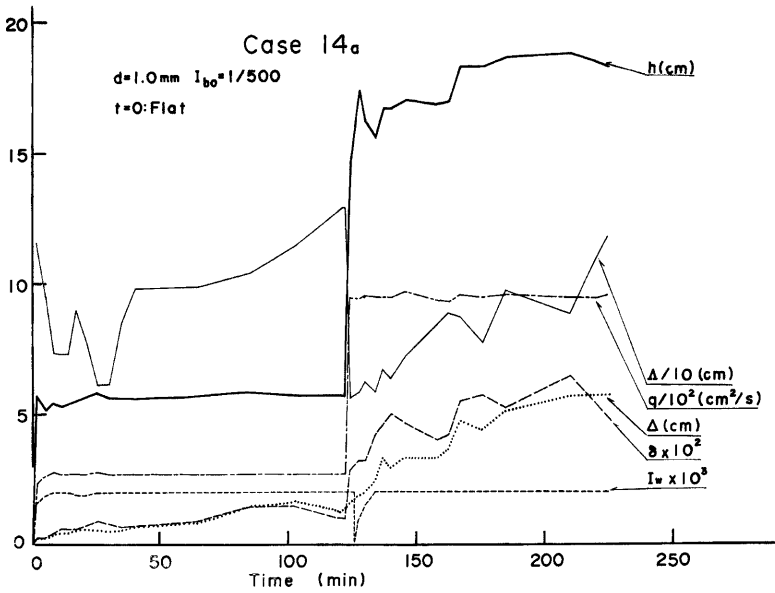


Fig. 5 (k)

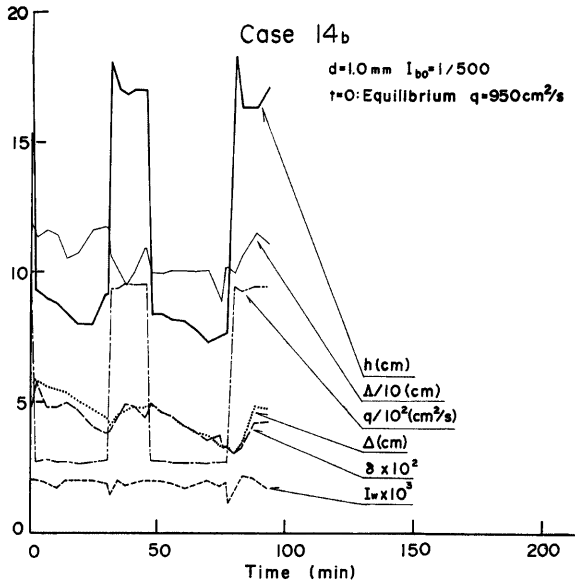


Fig. 5 (l)

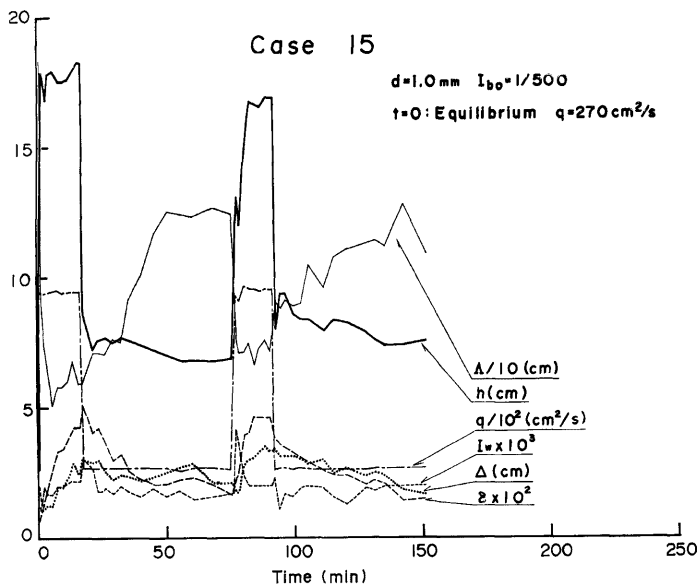


Fig. 5 (m)

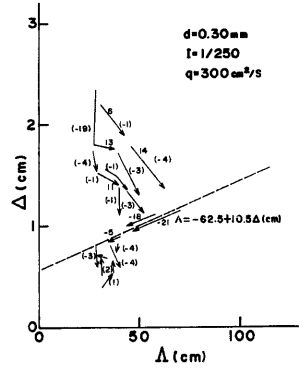
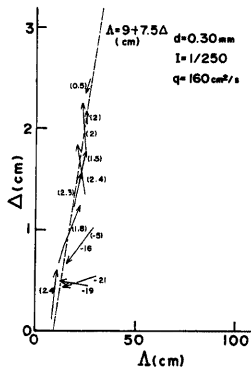
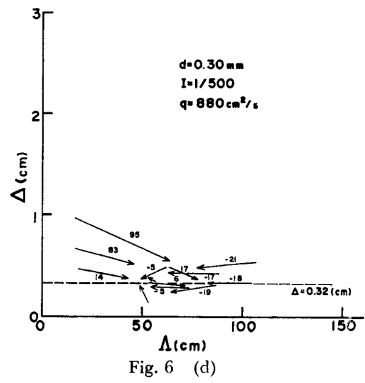
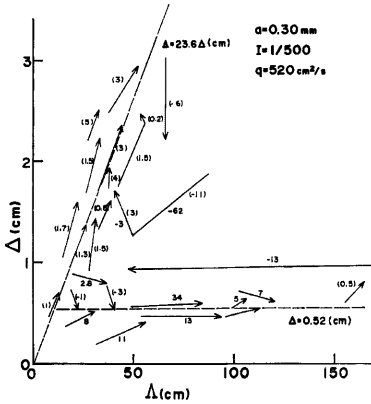
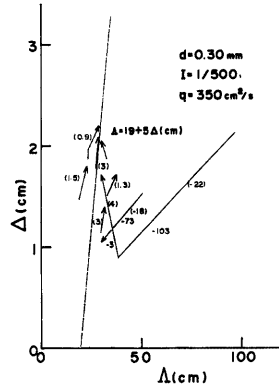
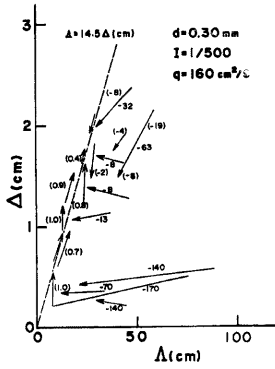
Fig. 5. Variations with time of unit width discharge (q), water surface inclination (I_w), mean water depth (h), mean wave height (Δ), mean wave length (λ) and mean wave steepness (δ).

4. 河床波の変形過程に関する考察

4.1 波長・波高平面上での追跡

前章において、河床波の変形過程とりわけ波長の変化は、必ずしも単純でなく、平衡状態の値からむしろ遠ざかることもあることを述べたが、これは、波長と波高がそれぞれ別個に論じられるものでなく、その組み合わせとしてひとつの河床状態を作り上げており、その変化過程もその組み合わせによって支配されていることを暗示している。そこで、先の実験結果を、各水理条件ごとに分けて、波長・波高平面上での平均的な動きを追跡すると、Fig. 6 のようになる。図中、かっこなしの数字は、波長の変化速度 (10^{-3} cm/s) を表しており、かっこ付きの数字は波高の変化速度 (10^{-3} cm/s) を表している。

この図を概観すれば、各水理条件ごとに、ひとつのとり易い λ と Δ の関係 (図中の破線) があり、その右下の領域では、まず波長が減少してその線に近づいた後、その線に沿って平衡点に近づいていることが注目される。また、その線の左上の領域では、まず波長が増加した後、その線に沿って平衡点に近づくが、平衡波長に達した時の波高が平衡値よりも大きければ、平衡波長を保ったままで波高が減少し、平衡点に近づいている。Fig. 6 (c) においては、例外的に2本の線が見られるが、これは、lower regime と upper regime の遷移領域にあって、砂漣が形成される点とそうでない時の差に基づくものと思われる。すなわち、Fig. 5 (e) を見れば、 $T=150\text{ min}$ の前後に波長が急激に変化し、その後、波高が顕著に増加し始めているが、その前後の過程が Fig. 6 (c) のそれぞれの直線に対応しているのである。しかしながら、この遷移現象の再現性については、確証は得られていない。



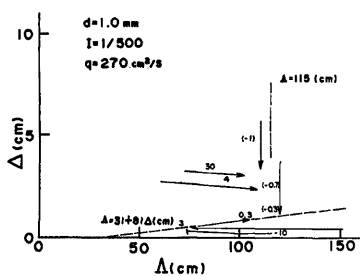


Fig. 6 (g)

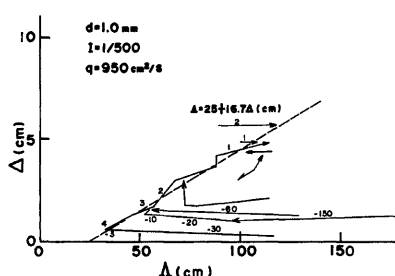


Fig. 6 (h)

Fig. 6. Traces of sand wave transformation on A - Δ plane for given hydraulic conditions. Numerals without parentheses show $dA/dt \times 10^2$ (cm/s) and those with parentheses show $d\Delta/dt \times 10^3$ (cm/s).

Table 2. Comparison of the experimental values of depth, wave height and wave length in an equilibrium state and the calculated values.
(The uppermost line shows the experimental values.)

	d (mm)	I	q (cm ² /s)	h (cm)	A (cm)	Δ (cm)
(a)	0.3	1/500	160	7.0	25	1.8
		Ripples		7.4	30	2.4
(b)	0.3	1/500	350	9.5	30	2.1
		Ripples		11.5	30	2.8
(c)	0.3	1/500	520	10.8	50	2.8
		Ripples		14.2	30	2.8
(d)	0.3	1/500	880	10.5	50	0.3
		Ripples		18.4	30	2.8
		Upper regime		11.0	30	0.25
(e)	0.3	1/250	160	7.0	30	2.3
		Ripples		6.0	30	2.3
(f)	0.3	1/250	300	5.0	30	0.5
		Ripples		8.2	30	2.3
		Upper regime		4.5	30	0.4
(g)	1.0	1/500	270	6.0	115	1.0
		Dunes		6.2	39	0.8
(h)	1.0	1/500	950	18.0	120	5.7
		Dunes		16.5	104	3.5

Table 2 は, Fig. 6 における平衡点での水深・波長, 波高の測定値 (上段) と, 従来の研究をもとに, 粒径, 勾配, 流量から算定した, 平衡状態でのそれらの計算値 (下段) とを比較したものである。ただし, 水深の算定には, 芦田・道上³⁾ による領域区分ごとの U/u_* と τ_* の関係を, また, 波長の算定には, Yalin¹⁰⁾ に従って, 砂漣には

$$A = 1000 d \quad \dots\dots\dots (6)$$

砂堆には

$$A = 2\pi h \quad \dots\dots\dots (7)$$

を用い, 波高は, そのようにして求められた水深と波長を, 後述する河床波形状と抵抗の間の関係式 (9), (10) に代入して求めている。なお, 遷移領域に区分されるものの抵抗は, lower regime と upper regime

の二通りについて計算し、波長は lower regime のものをそのまま用いている。これによると、(g) の水理条件に対する波長を除いて、測定値と計算値はほぼ一致しているとみなすことができる。

河床波の変形速度については、上述の直線や平衡点から離れているほど、その変化が速く、平衡点の近傍では比較的遅い速度でその周辺を変動していることがわかる。このうち、波高の変化速度は波長にはさほど影響されずに、その時の波高によってほぼ定まるようである。Fig. 7 は、平衡状態の値 Δ_e で基準化した波高とその変化速度の関係をプロットしたものの一例であるが、 $0 < \Delta/\Delta_e \leq 2$ の範囲では、波高の変化速度は、 $1 - \Delta/\Delta_e$ にほぼ比例し、 $\Delta/\Delta_e \geq 2$ ではほぼ一定値をとっている。これに対して、波長の変化速度は、その時の波長のほかに、波高の影響をも強く受けており、同様の整理を行ってみても定まった傾向が見い出せない。これは、波高の変化には、個々の波の増幅・減衰が大きなウェイトを占めているのに対し、波長の変化には、波の合体や分裂が大きなウェイトを占めていることによるものと思われる。

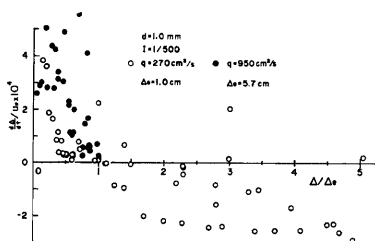


Fig. 7. The relation between the rate of change and the deviation from the equilibrium state of the mean wave height.

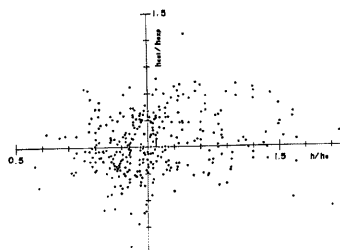


Fig. 8. A check of applicability of Yalin's model for flow resistance.

これらの過程を合理的に説明するには、中川・辻本⁷⁾の研究に見られるように、個々の波の変形を追跡しつつ、その分布性状に着目して、平均量の変化を明らかにすることが必要であろう。この場合、河床波の変形過程を支配する法則は、その時の河床状態と水理量によって、波長・波高の変化速度が規定されるような形で記述され、次式のような形をとることが期待される。

$$\left(\frac{d\Delta}{dt}, \frac{dh}{dt} \right) = f_n(q, I, d, \Delta, h, \rho_s/\rho, \dots) \quad (8)$$

このような関数形が見い出せれば、それを積分することによって、流量変化に伴う河床波の対応の遅れなど、応用的な問題を議論することも容易になろう。

4.2 抵抗特性

平衡状態における河床波上の流れの抵抗は、 τ_* , R/d , Re_* などの無次元量を用いて、河床形態ごとに、その特性が明らかにされている^{8), 11)}。しかしながら、河床波が平衡形状に達していない場合には、そのようなパラメータによるよりも、その時点の河床波の形状から抵抗を予測する方が適切である。Yalin¹²⁾ は、河床波上の抵抗の算定式として、

$$\frac{f}{\bar{f}} = 1 - \frac{\Delta}{A} \left(\cot \theta - \frac{8}{\bar{f}} \frac{\Delta}{h} \right) \quad (9)$$

を導いている。ここに、 f , $\bar{f}$ はそれぞれ河床波がある場合とない場合の抵抗係数、 θ は砂粒の水中安息角である。また、 $\bar{f}$ は

$$\sqrt{\frac{8}{\bar{f}}} = 6.0 + 5.75 \log_{10} \frac{h}{k_s} \quad (10)$$

で与えられる。ここに、 k_s は砂粒粗度である。

そこで、 $\theta=34^\circ$, $k=d$ とおき、先の実験資料から、流量、勾配を与えて式から水深を計算し、実測値と比較したものが Fig. 8 である。図の横軸は河床波の発達段階を表す指標として、各時点の水深とその流量での平衡状態の水深との比をとっている。図より、式による水深の予測値は $\pm 20\%$ 程度の精度で適合しており、発達段階による適合度の差は見られない。

したがって、河床波の変形過程においても、その形状特性が正しく把握できれば、抵抗の予測はある程度可能である。

5. 結 語

以上、河床波の変形過程を研究する意義とその接近法について述べた後、実験を通して得られた諸特性について考察した。得られた結果を要約して結語とする。

1° 従来の研究に基づいて、平坦河床から河床波が発達して平衡状態に達するまでの時間を検討した結果、実験室規模では比較的早く平衡状態が得られるが、実河川規模では平衡状態の形成に数日あるいは数十日も要することのあることが予想される。わが国の出水形態を考えれば、そのような長時間にわたって洪水が持続することは考えられず、非平衡状態での河床波を考えることが重要になる。

2° 河床波の変形過程に関する適切な実験法について考察し、可動堰と流砂循環機構の有用性を指摘した。

3° 河床波の変形過程を、平均波長・平均波高平面上で追跡したところ、各水理条件ごとに、ひとつのとり易い波高と波長の関係を表す直線があり、それから外れた状態にある河床波は、まず波長が変化してその線に近づいた後、その線に沿って平衡点に近づくことが判明した。

4° 上記の過程における変形速度は、平衡点から離れているほど大きく、その傾向は波高だけをとり出した場合にも見られるが、波長だけをとり出すと定まった傾向が見られない。

5° 河床波の変形過程には、個々の波の増幅・減衰と、波同士の合体・分裂が含まれており、それを合理的に説明するには、分布性状に着目した上で、平均量の変化を論じる必要がある。

6° 河床波の変形過程を支配する法則は、その時の河床状態と水理量から、波長・波高の変化速度を予測するような形で記述するのが有用である。

7° 河床波の変形過程においても、その形状特性が把握できれば、従来の抵抗予測式によって抵抗の算定が可能である。

なお、本研究を進めるにあたり、京都大学工学部土木工学科四回生加藤 均君の協力を得た。記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Yalin, M. S. and C. T. Bishop: On the Physical Modeling of Dunes, Proc. XIII Cong. IAHR, 1977, pp. 29-32.
- 2) Yalin, M. S. and E. Karahan: Steepness of Sedimentary Dunes, Proc. ASCE, HY 4, 1979, pp. 381-392.
- 3) 芦田和男・道上正規: 移動床流れの抵抗と掃流砂量に関する基礎的研究, 土木学会論文報告集, 第206号, 1972, pp. 59-69.
- 4) 藤田裕一郎・村本嘉雄・堀池周二: 交互砂州の発達過程に関する考察, 土木学会第34回年次学術講演会講演概要集, 第2部, 1979, pp. 193-194.
- 5) 村本嘉雄・藤田裕一郎: 中規模河床形態の分類と形成条件, 第22回水理講演会論文集, 1978, pp. 275-282.
- 6) 芦田和男・木村昌弘: SAND-WAVES の成長過程に関する研究, 土木学会第28回年次学術講演会講演概要集, 第2部, 1973, pp. 275-276.

- 7) 中川博次・辻本哲郎：河床波の発達性状に関する実験的考察，京都大学防災研究所年報，第19号 B-2, 1976, pp. 289-309.
- 8) 上野鉄男・宇民 正・有本俊志：河床波の発生・発達過程に関する 実験的研究 (2)，京都大学防災研究所年報，第22号 B-2, 1979, pp. 521-535.
- 9) Jain, S. C. and J. F. Kennedy: The Growth of Sand Waves, Proc. the 1st International Symposium on Stochastic Hydraulics, 1971, pp. 449-471.
- 10) Yalin, M. S.: Mechanics of Sediment Transport, Pergamon Press, 1972, p. 242.
- 11) 水理委員会移動床流れの抵抗と河床形状研究小委員会：移動床流れにおける 河床形態と粗度，土木学会論文報告集，No. 210, 1973, pp. 65-91.
- 12) Yalin, M. S.: On the Average Velocity of Flow over a Movable Bed, La Houille Blanche, No. 1, 1964, pp. 45-53.