

伸縮性を許す渦糸方程式

日大・理工 紺野 公明 (Kimiaki Konno)*
富山大・工 角島 浩 (Hiroshi Kakuhata)**

*Department of Physics, College of Science and Technology,
Nihon University,
** Toyama University

1 初めに

この報告では, 局所誘導方程式とそれを一般化した伸縮性を許す局所誘導方程式の数値計算から得られた結果をもとに両方程式の関係について述べる.

Arms と Hama は局誘導近似をもとに局所誘導方程式

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_s \times \mathbf{S}_{ss} \quad (1)$$

を得た [1]. ここで, $\mathbf{S}(s, t)$ は位置ベクトル (S_x, S_y, S_z) で添字 s と t はそれぞれ弧長と時間を表す. このとき局所誘導方程式は, $|\mathbf{S}_s| = 1$ を満たしている.

Arms と Hama は局所誘導方程式 (1) を得る前に次の方程式

$$\mathbf{R}_t = \frac{\mathbf{R}_r \times \mathbf{R}_{rr}}{|\mathbf{R}_r|^3} \quad (2)$$

を得ている [1]. ここで, $\mathbf{R}(r, t)$ は位置ベクトル (R_x, R_y, R_z) で r は渦糸に沿ってのパラメータを表す. もし, ここで $|\mathbf{R}_r| = 1$ が満たされるならば, r は弧長を表し方程式は局所誘導方程式と一致する. 一般には, この条件を満たす必要はない. 即ち, 渦糸は次に述べる伸縮性の定義から伸縮性を持つ.

パラメータ s で渦糸の長さ l を表し, 局所伸縮を位置ベクトル (X, Y, Z) を使い

$$l_s = \frac{dl}{ds} = \sqrt{(X_s)^2 + (Y_s)^2 + (Z_s)^2} \quad (3)$$

で定義する [2]. $l_s = 1$ は伸縮性と持たない場合で, $l_s > 1$ は伸びを $l_s < 1$ は縮を表す.

二つの方程式 (1) と (2) は共に可積分方程式であることが知られている [3]. 本報告では, 先ず, (1) と (2) を使い同じ初期値を用いた数値計算を行う [4]. その結果をもとに両者の間の関係を求める [5].

2 初期値問題

2.1 渦糸型初期値

渦糸ソリトンに因子 A を掛けて伸縮性を導入し, 初期値

$$\begin{aligned} S_x &= A \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \sin(2\Omega) \operatorname{sech}(2\Theta), \\ S_y &= -A \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \cos(2\Omega) \operatorname{sech}(2\Theta), \\ S_z &= s - \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \tanh(2\Theta), \end{aligned} \quad (4)$$

を考える. ここで,

$$\Omega = \lambda_R s - 2(\lambda_R^2 - \lambda_I^2)t, \quad \Theta = \lambda_I s - 4\lambda_R \lambda_I t. \quad (5)$$

で $t=0$ をとる. 局所伸縮は

$$l_s^2 = 1 + \frac{4\lambda_I^2}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} (A^2 - 1) [\operatorname{sech}^2(2\Theta) - \frac{\lambda_I^2}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \operatorname{sech}^4(2\Theta)]. \quad (6)$$

で与えられる. もし, $A=1$ ならば伸縮性無し, $A \neq 1$ ならば伸縮性を持つ.

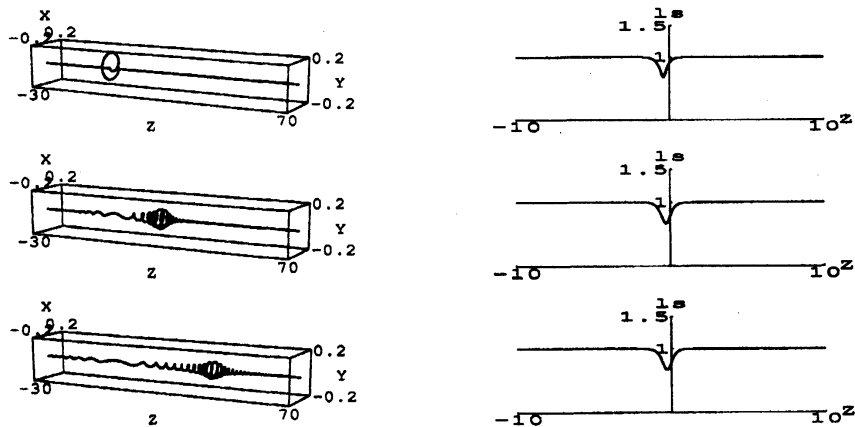


Figure 1: Time evolution (left) and local stretch (right) for the stretched vortex soliton (4) with (1) at $t=0, 3, 6$ for $A=0.6$ and $\lambda=1.5+i$.

局所誘導方程式 (1) を用いた波形の変化と局所伸縮の数値計算の結果を図 1 に示す. 渦糸は, 外にリップルを放出しながらその速度を上げると共に波形

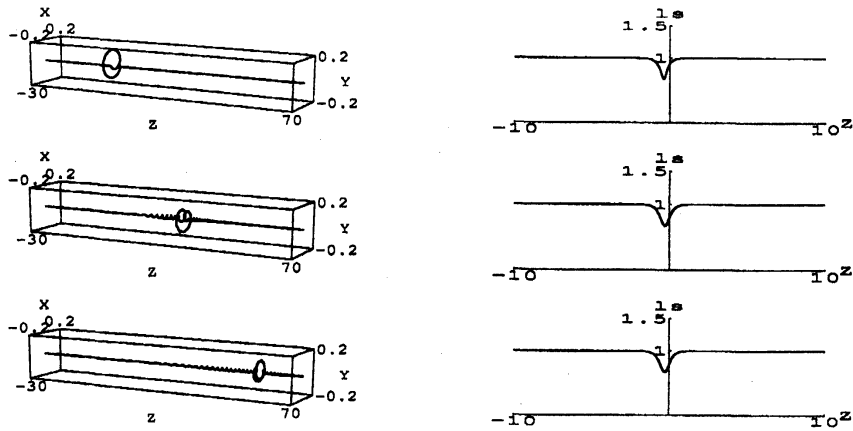


Figure 2: Time evolution (left) and the local stretch (right) for the stretched vortex soliton (4) with (2) at $t = 0, 3, 6$ for $A = 0.6$ and $\lambda = 1.5 + i$.

を大きく変化させている。しかし、初期に与えた局所伸縮はそのままの位置に張り付いたままである。

伸縮を許す方程式 (2) の場合を図 2 に同じパラメータを用いて示す。局所誘導方程式 (1) に較べ波形の変化は少なく、リップルの放出も少ないことが見られる。しかし、初期に与えた縮みは同じ位置で張り付いたように残っていることが分かった。

2.2 ループ型初期値

ループ型初期値を

$$\begin{aligned} S_x &= -A \sin 4t \operatorname{sech} 2s, \\ S_y &= A \cos 4t \operatorname{sech} 2s, \\ S_z &= s - \tanh 2s, \end{aligned} \quad (7)$$

で与えある。これは局所誘導方程式 (1) の厳密解である。ここで A は伸縮性を表す因子で、局所伸縮は

$$l_s^2 = 1 + 4(A^2 - 1)\operatorname{sech}^2 2s \tanh^2 2s. \quad (8)$$

で与えられる。

図 3 に局所誘導方程式 (1) を用いた数値計算の結果を示す。初期値が方程式の厳密解であるからループ型の渦糸はその波形を崩さずそのまま回転運動を続けていることが分かる。局所伸縮も同じ場所に固定されている。

伸縮を許す方程式 (2) について同じパラメータでの数値計算の結果を図 4 に示す。ループ状の波形が崩れ、渦糸ソリトンが誕生、負の方向に運動を始め

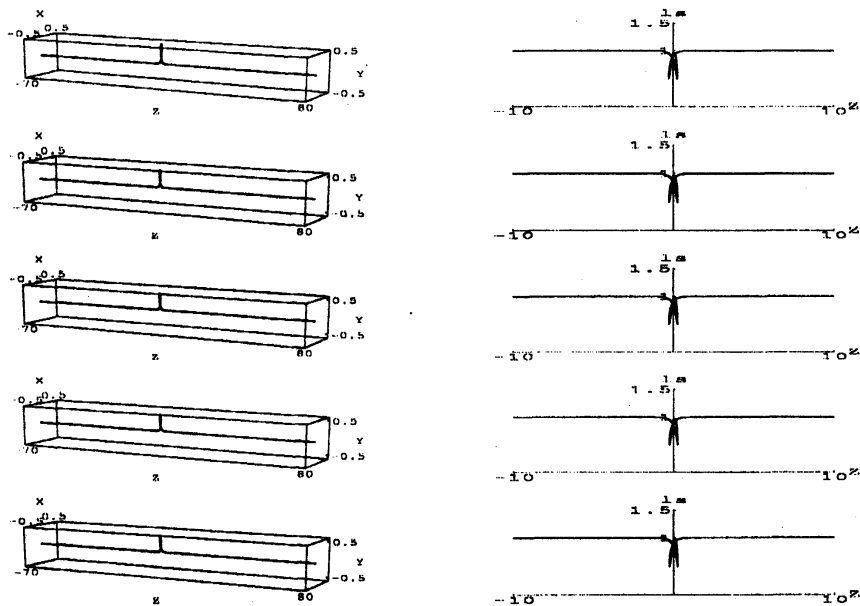


Figure 3: Time evolution (left) and local stretch (right) for the loop type of vortex soliton (7) with (1) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 0.5$.

ていることが分かる。しかし、この場合でも局所伸縮をみるとそれは初期に与えた位置で固定されたままで動いていないことが分かった。

3 局所誘導方程式と伸縮を許す方程式の関係

数値計算の結果から $|S_s|$ と $|R_r|$ は時間に依らないことが想像される。実際、それを証明する。次の内積は方程式を用いると時間に依らないことが (1) と (2) を使い示される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial s} \cdot \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right) &= 0, \\ \frac{\partial R}{\partial r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial R}{\partial t} \right) &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

従って、 $|S_s|$ と $|R_r|$ がそれぞれ s と r の関数である。

このことを使い次の変換を考える。

$$ds = g dr. \tag{10}$$

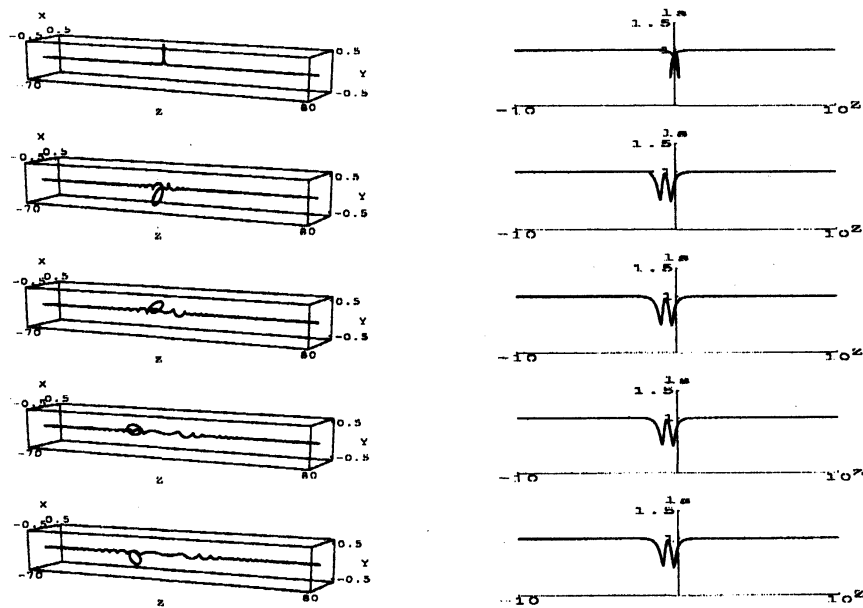


Figure 4: Time evolution (left) and local stretch (right) for the loop type of vortex soliton (7) with (2) at $t = 0, 3, 6, 9, 12$ for $A = 0.5$.

ここで, g は

$$g = \sqrt{\frac{\partial R}{\partial r} \cdot \frac{\partial R}{\partial r}}. \quad (11)$$

で与えられるメトリックで r の関数である. この変換を使うと局所誘導方程式 (1) は, 伸縮を許す方程式 (2) になることが分かる.

このメトリックを積分した

$$s = f(r). \quad (12)$$

を使うと (1) の解から (2) の解は

$$R(r, t) = S(f(r), t) \quad (13)$$

として得られる.

逆関数 $r = h(s)$, 即ち,

$$f(h(s)) = s, \quad (14)$$

を使うと (2) の解から (1) の解が逆に求めることができる.

(2) のソリトン解は, (4) より

$$\begin{aligned} R_x &= \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \sin 2(\lambda_R f(r) - \omega_R t) \operatorname{sech} 2(\lambda_I f(r) - \omega_I t), \\ R_y &= -\frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \cos 2(\lambda_R f(r) - \omega_R t) \operatorname{sech} 2(\lambda_I f(r) - \omega_I t), \\ R_z &= f(r) - \frac{\lambda_I}{\lambda_R^2 + \lambda_I^2} \tanh 2(\lambda_I f(r) - \omega_I t), \end{aligned} \quad (15)$$

として与えられる. ここで, $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$ and $\omega = 2\lambda^2$ である.

更に, メトリックを

$$ds = g^n dr \quad (16)$$

のように一般化できる. 一般化された伸縮を許す方程式は

$$R_t = \frac{R_r \times R_{rr}}{|R_r|^{3n}} \quad (17)$$

で与えられる. 変換は可積分性を保持するもので得られたこの方程式は可積分方程式である.

4 局所誘導方程式と伸縮を許す方程式の関係

1. 局所誘導方程式 (1) と伸縮を許す方程式 (2) に対する初期値問題から, 局所的に与えた初期の伸縮は何れの方程式でも時間的に変化しなかった.
2. そこで時間に依らないメトリック $g(r)$ を導入して両方程式の間を見出すことができた.
3. その変換を使うと局所誘導方程式 (1) のソリトン解から伸縮を許す方程式 (2) のソリトン解を構成できることが示された.
4. メトリックを更に一般化して新しい伸縮を許す方程式を見出すことができた.

References

- [1] Arms R. J., Hama F. R., Localized-induction concept on a curved vortex and motion of an elliptic vortex ring, *Phys. Fluids* 1965 V.8, 553-559.
- [2] Konno K., Kakuhata H., A new type of stretched solutions excited by initially stretched vortex filaments for the local induction equation, *Theor. Math. Phys.*, 2005, V.144, 1181-1189.

- [3] Konno K., Kakuata H., A hierarchy for integrable equations of stretched vortex filament, *J. Phys. Soc. Japan* 2005, V.74, 1427-1430.
- [4] Konno K., Kakuata H., LIE of Stretched Vortex Filament, submitted for publication.
- [5] Konno K., Kakuata H., Generalization of localized induction equation, to appear in *J. Phys. Soc. Japan* 2006, V.75.