

KeTCindy によるベクトル解析の図解教材

東邦大学・理学部 野田 健夫

Takeo Noda, Faculty of Science, Toho University

東邦大学・理学部 高遠 節夫

Setsuo Takato, Faculty of Science, Toho University

1 はじめに

近年の数学ソフトウェアの発達と普及により、高専・大学レベルの数学の教育において、抽象的な数学概念を図解教材によって学習者に直観的に理解させることが可能になってきている。ここでは特に、東邦大学理学部2年生を対象としたベクトル解析の講義を想定し、KeTCindy と CindyJS を用いて作成した図解教材を紹介する。

ベクトル解析における諸概念・諸公式は偏微分や重積分を用いて複雑な形で表されるので、学習者はその計算技法の習得に注意が集中しがちである。もちろん正確な計算は重要であり、多少の手計算を実践することは理解を深めるのに役立つだろう。しかし数学的に重要なのは、それらの定義・公式が特定の座標系に依存しない幾何学的な対象であるということである。2次元・3次元のベクトル解析における多くの概念は本来的には可視化可能なので、計算する前に結果がどうあるべきかに思いを巡らすことのできるような図解教材が強く望まれる。

KeTCindy は動的幾何ソフトウェア Cinderella [9] のマクロパッケージであり、Cinderella の作図画面とスクリプト言語 CindyScript を用いて記述された図形から L^AT_EX のコードを生成する [1, 2]。出力が T_EX 形式なので授業時の配布資料やスライドに容易に挿入することができる。特にスライド教材の作成に関して、KeTCindy には beamer パッケージ風の効果を手軽に実現する機能も実装されており、手軽に PDF スライドを作成することができる [3, 4]。また、生成されるファイルは PDF 形式なので、ウェブ上で配布すれば特別なソフトウェアを必要とせずタブレットやスマートフォンなど携帯情報端末で同じ図を閲覧することも可能である。

以下においては、まず KeTCindy を用いてベクトル場を描画するための具体的な手法について述べ、その後に勾配・回転・発散を理解するために作った図解教材を紹介する。更に、学習者が直接操作することのできる CindyJS による教材についても紹介する。

2 KeTCindy によるベクトル場の描画

本稿執筆時点の KeTCindy では、Mathematica における VectorPlot のようにベクトル場を1つの関数で表示することはできないので、同様の出力を得るための CindyScript プログラムを構成する。

平面のベクトル場とは、平面の各点 (x, y) にベクトル $A(x, y)$ が対応していることを意味するので、たとえば $A(x, y) = (y, -x)$ であれば点 $(1, 1)$ を始点にベクトル $(1, -1)$ 、点 $(2, 1)$ を始点にベクトル $(1, -2)$ 、... と次々に矢印を描けばよいはずであるが、これを単純に行うと複数の矢印が重なり合って見づらくなる場合がある (図 1 左)。

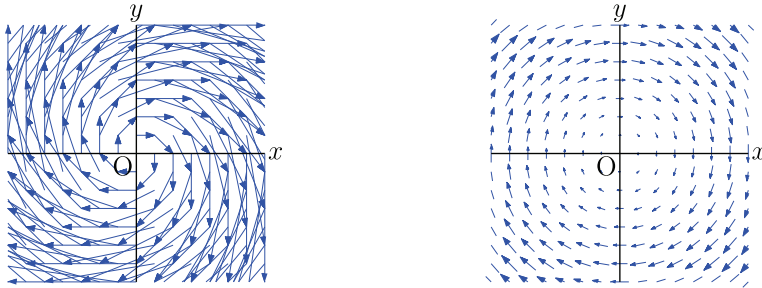


図 1: 長さ・位置調節前 (左) と調節後 (右)

そこで、描画範囲内の最長の矢印が隣と重ならないように長さを比例調整し、参照点が矢印の始点ではなく中点になるように調節したものが図 1 右である。参照点を矢印の中点に配置することはベクトルの図解として慣例的でないと感じるかもしれないが、ベクトル場は方向場に向きを付けたものと考えるならばむしろ自然であるし、積分曲線も自然に意識される (図 1 のベクトル場 $A(x, y) = (y, -x)$ の積分曲線は原点中心の同心円 $x^2 + y^2 = c$ であるが左の図は螺旋のようにも見えてしまう)。

上記の調整を行いベクトル場を描画する CindyScript プログラムは以下で与えられる (CindyScript において//はコメント文) :

```
Ketinit();
Addax(1); // 座標軸なしは 0
VF(x,y):=[y,-x]; // ベクトル場

// 矢印の長さ調節倍率計算
Dx=(XMAX-XMIN)/14; Dy=(YMAX-YMIN)/14;
mxnm=0.001;
xtemp=XMIN;
while(xtemp <=XMAX,
  ytemp=YMIN;
  while(ytemp <= YMAX,
    Vtmp=VF(xtemp,ytemp);
    Ntmp=sqrt(Vtmp.x*Vtmp.x+Vtmp.y*Vtmp.y);
    if(Ntmp>mxnm, mxnm=Ntmp);
    ytemp=ytemp+Dy;
  );
  xtemp=xtemp+Dx;
);
w=0.7*Dx/mxnm;

// 矢印描画
Setcolor("blue");
```

```

i=0; xtemp=XMIN;
while(xtemp <= XMAX,
  ytemp=YMIN;
  while(ytemp <=YMAX,
    V=w*VF(xtemp,ytemp);
    N=4*(abs(V.x)+abs(V.y));
    if(V.x^2+V.y^2>0,
      Arrowdata(text(i),[[xtemp,ytemp]-V,[xtemp,ytemp]+V],[0.7*N,1,"dr,0.4"]);
    );
    i=i+1; ytemp=ytemp+Dy;
  );
  xtemp=xtemp+Dx;
);
Setcolor("black");
Windispg();

```

ベクトル場の描画範囲は Cinderella 操作画面内の幾何点 SW および NE をマウスでドラッグして操作することにより自由に変化させることができる (図2). ここで左下の SW は (XMIN, YMIN), NE は (XMAX, YMAX) に対応する. 画面を見ながら描画範囲を調節し, 気に入った図ができたら Figure ボタンをクリックすると, tex ファイルが生成・コンパイルされ, PDF ファイルによる出力が表示される.

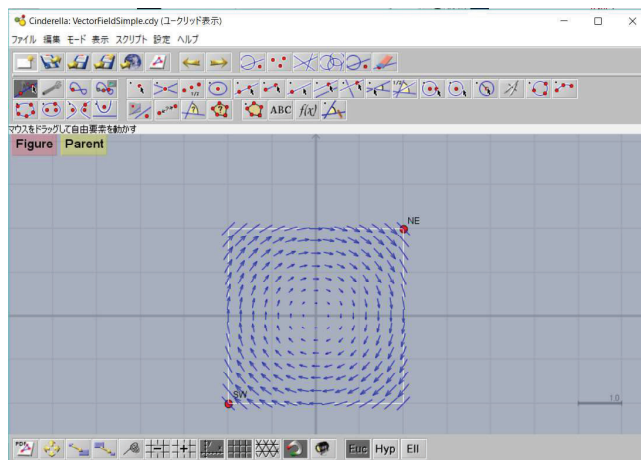


図2: Cinderella 操作画面

上記のプログラムは, 長方形の描画範囲を縦横均等に分割して格子点状に配置された 15×15 個の点に矢印を描画する. これはベクトル場の描画として一般的なものであろうが, 状況によって格子点の規則性を意識させたくない場合は, 矢印をランダムに配置する方法もある (図3左). また, 個々のベクトルよりも積分曲線 (流線) を描画するのもベクトル場の理解を助けるであろう (図3右).

KE TCindy は空間図形もサポートしているので, 3次元ベクトル場に対して同様の描画手法を使うことができる. ただし, 空間図形を平面に投影しても分かりやすく見せるには遠近感を納得させる工夫が必要であろう (例えば3.2 ベクトル場の回転で用いる

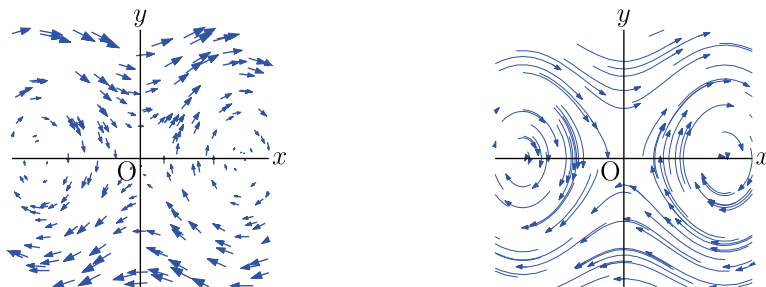


図 3: $\mathbb{A} = (y, \sin 2x)$ のランダムプロット (左) と流線プロット (右)

スケルトン表示など).

3 grad, rot, div の図解

以下においては, 前節で述べたベクトル場の描画を使って, ベクトル解析における場の微分である勾配 (grad), 回転 (rot), 発散 (div) の図解の例を紹介する.

3.1 スカラー場の勾配

平面のスカラー場は各点 (x, y) にスカラー $f(x, y)$ を対応させるので 2 変数関数 $f(x, y)$ と同値である. スカラー場 $f(x, y)$ の勾配 (gradient) は次で定義されるベクトル場である:

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

ベクトル場 $\text{grad } f$ は各点において次のようなベクトルとして特徴づけられる.

1. f の方向微分係数が最大となる向き
2. 大きさは方向微分係数の最大値に一致

ただし, 平面の点 p における単位ベクトル $\vec{u}$ の向きの方向微分係数とは, p を通り $\vec{u}$ と z 軸に平行な平面上で $z = f(x, y)$ の曲面グラフとの共通部分として現れる曲線の傾きを意味する (図 4). 実際, $p = (a, b)$, $\vec{u} = (u, v)$ のとき方向微分係数は

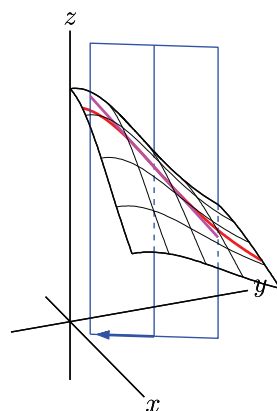


図 4: 方向微分係数と grad

$$\left. \frac{d}{dt} f(a + tu, b + tv) \right|_{t=0} = \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v = (\text{grad } f) \cdot \vec{u} \leq |\text{grad } f|$$

であることから上記の 1, 2 が成り立つことが分かる. また, 勾配ベクトル場 $\text{grad } f$ はスカラー場 f の等高線, すなわち $f(x, y) = c$ で与えられる曲線に垂直であることも知られている. これを図示すると次のようになる:

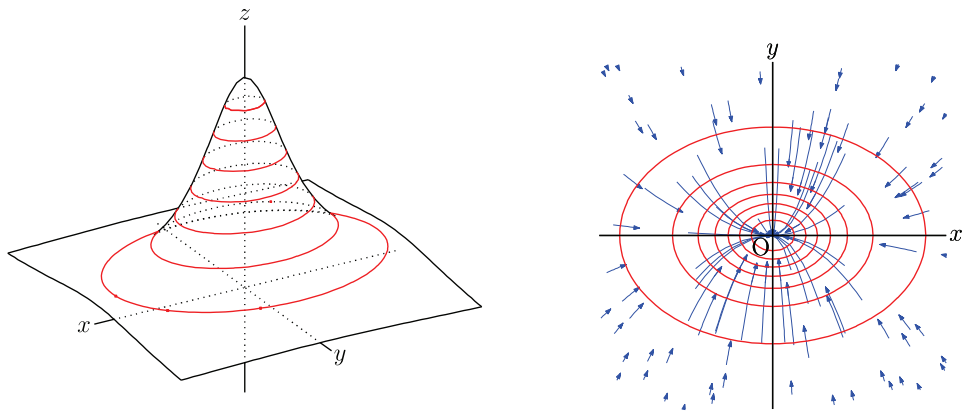


図 5: スカラー場 f の等高線群と $\text{grad } f$

3.2 ベクトル場の回転

3次元ベクトル場 $\mathbb{A}(x,y,z) = (A_x, A_y, A_z)$ の回転 (rotation) は次で定義される：

$$\text{rot } \mathbb{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

これはその名の通り、 $\mathbb{A}$ を速度場とする流体の回転速度を表すものと解釈することができる。すなわち、各点における $\text{rot } \mathbb{A}$ のベクトルは回転軸の右ネジを回して進む向きを指し、大きさは回転速度に比例する。例えば、 $\mathbb{A} = (2y + \frac{1}{2}z, 2x - z, \frac{1}{2} + y)$ に対し $\text{rot } \mathbb{A} = (2, 1, 4)$ は図 6 に表される。

図 6 においては3次元ベクトル場を流線によって描画した。KEJCindy にはスケルトン表示とよばれる手法が備わっており、空間曲線が重なって見える点で視点から奥にある曲線を破線にして前後関係を表現することができる。

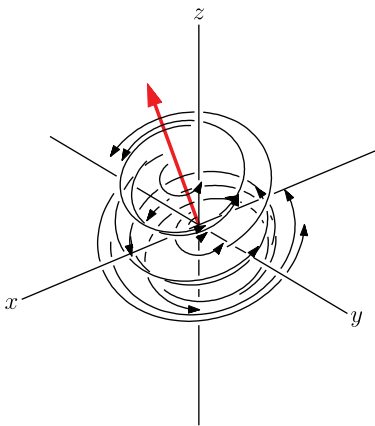


図 6: $\mathbb{A}$ と $\text{rot } \mathbb{A}$

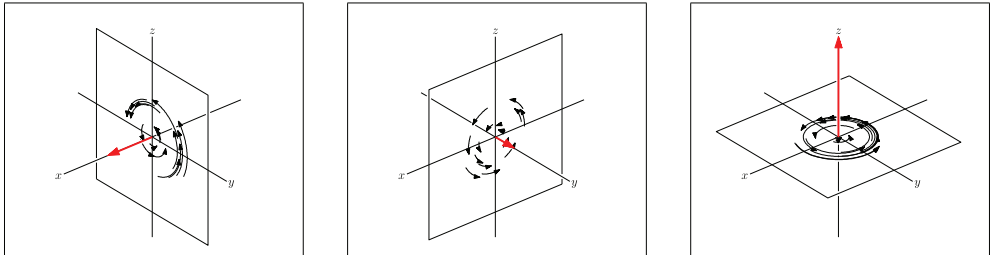


図 7: $\text{rot } \mathbb{A}$ の x -成分 (左), y -成分 (中央), z -成分 (右)

回転速度として $\text{rot } \mathbf{A}$ を解釈すると、 $\text{rot } \mathbf{A}$ は各点でベクトル量、すなわち和とスカラー倍について閉じている量であるから、回転速度もまた和とスカラー倍という代数演算ができることになる。この事実は数式で理解することは容易であるが、幾何学的意味から直観的に理解するのは難しいのではないだろうか（実際，“回転運動”は一般には非可換でベクトル量ではなく，“回転速度”を考えるとベクトル量になる）。図7は $\text{rot } \mathbf{A} = (2, 1, 4)$ を x, y, z について成分分解して図解したものである。こうした図解は回転速度がベクトル量であることの理解を助けるであろう。

3.3 ベクトル場の発散

2次元のベクトル場 $\mathbf{A}(x, y) = (A_x, A_y)$ に対し、発散 (divergence) は次で定義されるスカラー場である：

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y}$$

各点における $\text{div } \mathbf{A}$ の値の幾何学的意味は、その点を含む微小領域をベクトル場に沿って流したときの面積の倍率の対数であり、特に正ならば拡大、負ならば縮小することが分かる (図8)。

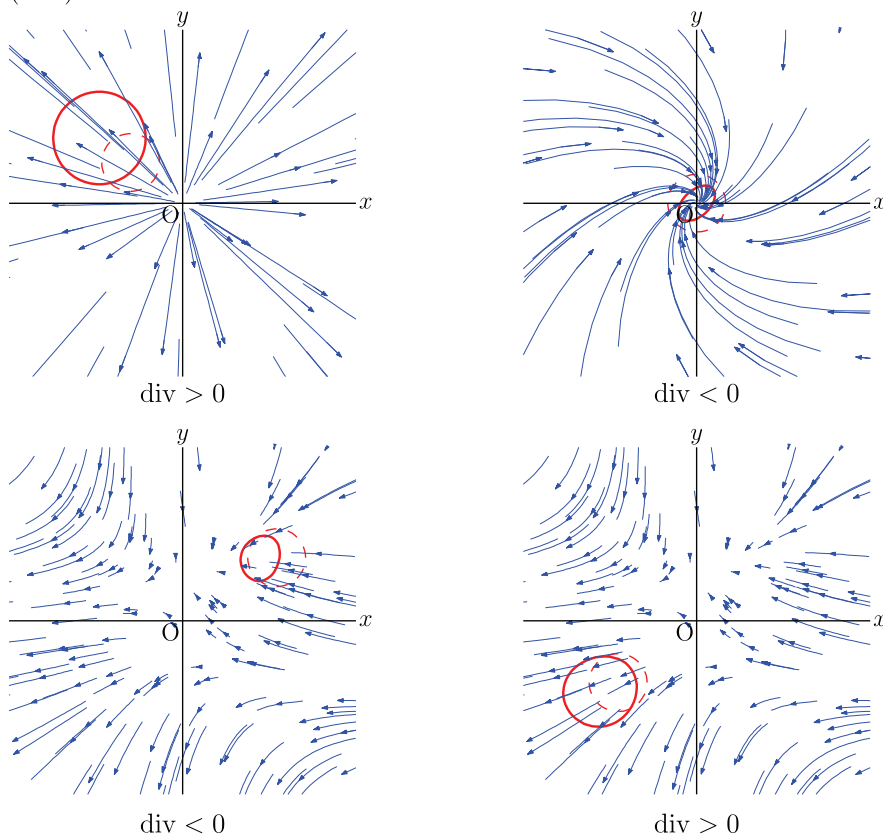


図8: ベクトル場の div の符号

4 CindyJS 教材

CindyJS は Cinderella のコンテンツを HTML ファイルとして出力し、ウェブブラウザ上で操作可能なものとするシステムである [10]. これにより, Cinderella で作成した教材をウェブサイトで公開し, PC だけでなくタブレットやスマートフォンでも操作できるようになる. また [5] では CindyJS コンテンツを Moodle 上で提供するためのプラグインも紹介されている. 以下, ベクトル解析の理解を深めるために作成したいくつかの CindyJS コンテンツを紹介していこう.

図 9 はベクトル場の積分曲線に関するコンテンツである. 図中の赤い丸で示された点を始点とする積分曲線が表示されており, 点をドラッグして動かすと積分曲線も同時に変形していく. この教材を操作すれば積分曲線が閉曲線か否か, 始点を変化させた際の積分曲線の変化の連続性, 特異点を通過するときの不連続現象などを体感的に学ぶことができるであろう.

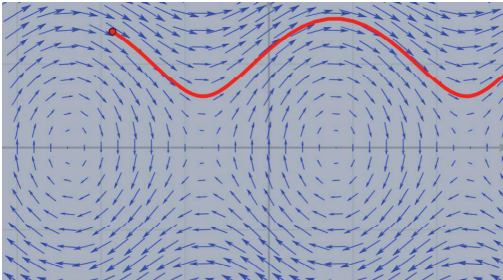


図 9: ベクトル場の積分曲線

図 10 はベクトル場の回転を理解するためのコンテンツである. ただし平面上の操作にするため $\mathbb{A} = (A_x, A_y, 0)$ の形のベクトル場を平面ベクトル場として描き $(\text{rot } \mathbb{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$ の値を点の近くに表示するようにできている. この数値とベクトル場の回転を結び付けて理解するために, 点から 4 本の線が出ており, ベクトル場の回転に応じて流れにそって曲がるようになっている. 中心点を動かして数値と線の曲がりを観察すれば, ベクトル場が右に回転しているか左に回転しているかを調べることができる.

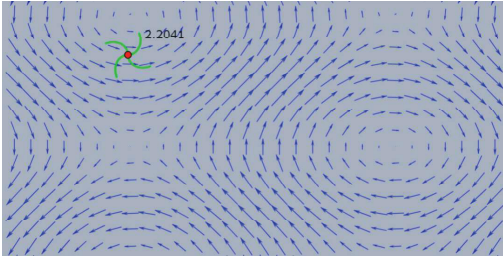


図 10: ベクトル場の回転

図 11 はベクトル場の発散を理解するためのコンテンツである. 平面のベクトル場の中の赤い点を中心に赤い小円が描かれており, この小円をベクトル場に沿って少し流し

た図形が緑色の閉曲線として描かれている．赤い小円内の面積に比べて緑の閉曲線内の面積が大きければその点の発散は正であり，小さければ負であることが分かる．

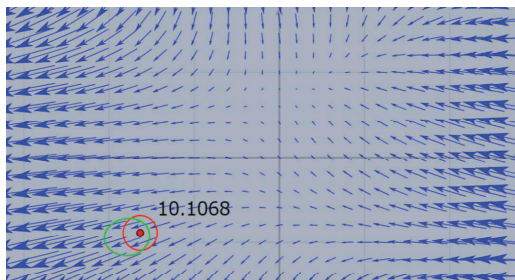


図 11: ベクトル場の発散

以上はほんの一例であるが，このような教材を学習者が直接操作することによりベクトル場やスカラー場に対する直観的理解が深まることは十分期待できる．なお，上記のコンテンツはすべて Cinderella に標準装備された CindyScript を用いて作られているが， KeTCindy によって追加された関数を含めて HTML 化することも可能である (KeTCindyJS).

5 まとめと今後の展望

以上の試みにより， KeTCindy を用いてベクトル解析の諸概念の理解を深めるための様々な図解教材を作成できることが分かった．これらの一部はすでに実際の講義で使用し，授業評価アンケートの自由記述欄でも好意的な評価を得ている．

今回は grad , rot , div といった場の微分に関する図解が中心となったが，線積分や面積分，各種積分定理の図解もベクトル解析において必要である． KeTCindy の前身といえる KeTPic を用いた図解は [6] で試みられているので，これを KeTCindy を用いてより柔軟で汎用性の高い形に発展させていくことが望まれる．

また， KeTCindy によるベクトル場の描画をより多くの人が使えるよう，今回のプログラムをもとにオプションを整備して KeTCindy の関数として実装していきたい．

謝辞

本研究は，京都大学数理解析研究所共同事業「数学ソフトウェアとその効果的教育利用に関する研究」による成果である．本研究は JSPS 科研費 16K01152 の助成を受けている．

参考文献

- [1] 高遠節夫， KeTCindy 開発チーム：「 KeTCindy の開発について」，数理解析研究所講究録 1978, pp. 173–182, 2015

- [2] Takato S., What is and How to Use KeTCindy—Linkage Between Dynamic Geometry Software and LaTeX Graphics Capabilities—, Lecture Notes in Computer Science 9725, Springer, pp.371–279, 2016
- [3] 山下哲：「 $\text{K}_\text{E}\text{T}\text{Cindy}$ による図入り PDF 教材の作成」, 数理解析研究所講究録 2022, pp. 59–64, 2016
- [4] 山下哲, 小林茂樹, 牧下英世, 高遠節夫：「 $\text{K}_\text{E}\text{T}\text{Cindy}$ で作成した PDF スライド教材による授業実践について」, 数理解析研究所講究録 2067, pp. 47–54, 2018
- [5] 金子真隆, 中原敬広, 中村泰之：「CindyJS によるコンテンツの Web 上での利用について」, 数理解析研究所講究録 2067, pp. 37–46, 2018
- [6] 長谷川研二：「 $\text{K}_\text{E}\text{T}\text{pic}$ によるベクトル解析の教材の作成」, 数理解析研究所講究録 2022, pp. 65–71, 2017
- [7] <https://sites.google.com/site/ketcindy>
- [8] <http://ketpic.com/>
- [9] <http://www.cinderella.de>
- [10] <https://cindyjs.org/>