

カルマン渦列の消滅と再生成のメカニズム

同志社大学・理工学部 水島 二郎 (Jiro Mizushima)
同志社大学・工学研究科 赤嶺 博史 (Hiroshi Akamine)

Department of Mechanical Engineering, Doshisha University

1. はじめに

柱状物体後流に生じるカルマン渦列は、日常生活でもしばしば観察される現象であり、これまでも多くの研究が行われてきた [1, 2]. ところが、このカルマン渦列は、ある程度下流へ流されると消滅し、さらに下流で再び生成されることはあまり知られていない.

柱状物体直後に現れるカルマン渦列の発生は柱状物体後流の全体不安定性によるものであることがわかっており、臨界条件やストローハル数などの物理的性質もこれまでによく調べられている. 一方、カルマン渦列の消滅と再生成についての研究はこれまであまり進んでいない. カルマン渦列の消滅と再生成について詳しく調べたのは、Taneda[3]である. Taneda は静止流体中に円柱を曳航することにより、円柱直径の数 100 倍程度の後方まで流れを可視化し、カルマン渦列中の渦間隔の変化を調べた. その結果、円柱 (直径 d) の後方に生じるカルマン渦列は、円柱後方 $50d \sim 100d$ の位置まで流されて来ると消滅し、数 $100d$ 後方で再び現れるということを発見した. Taneda はこの渦列の消滅は渦配置の不安定性により生じ、下流へ流される渦が再配置するために起こる現象であると考えた. また、渦列の消滅と再生は何度も繰り返して生じるものであると予想した.

Durgin and Karlsson[4] は渦列を生じる円柱の後方にそれと直交するように大きな円柱を置いて渦列の移流速度を人為的に遅くすることにより、詳細な実験を行い、第 1 渦列の消滅と第 2 渦列の生成を定量的に調べた. 彼らは、第 1 渦列の消滅について非粘性渦モデルにより各渦の渦領域の変形を調べた. その結果、2 列に並ぶ渦列の流れ方向渦間隔を h とし、流れと垂直方向の間隔を a とすると、 $a/h > 0.366$ のときには各渦は他の渦との相互作用によって流れ方向に引き延ばされた楕円形渦となり、引き延ばされた楕円渦が自己誘導速度で回転し合体することにより、渦列は消滅してほぼ一様なせん断速度場になるという結論を得た. さらに、彼らは平板を過ぎる流れの線形安定性を調べた Sato and Kuriki[5] の論文を引用し、平板後流の速度場 (ウェイク) と渦列が消滅することによってできる速度場とを比較し、第 2 渦列はこの一様なせん断速度場の不安定性によるものであると予想した. また、Cimbala, Nagib and Rosho[6] は流れの可視化と熱線流速計による詳細な実験を行い、円柱後流中の振動数を測定した. 彼らは下流の各位置における平均流速分布を求め、その速度分布をもつ平行流に対する非粘性安定性解析を行うことにより不安定攪乱の振動数を評価し、実験結果と比較した. その結果、第 2 渦列は第 1 渦列が消滅してできたせん断流の線形不安定性により生じると結論した. この結論は、Karasudani and Funakoshi[7] によっても確かめられた.

カルマン渦列中の渦は下流へ流されるにしたがって、流れと垂直方向の間隔 a が大きくなるが、流れ方向の間隔 h はあまり変わらないため、その比 a/h が大きくなり、その配列が不安定になり、渦の合体が生じることにより第 2 渦列が発生すると主張する研究結果もある. Okude and Matsui[8, 9] は流れの可視化と熱線流速計による測定を行い、第 1 渦列中の渦が合体することにより、第 2 渦列が生じるという観測結果を得た. また、流れ場中に外乱として音を加えると、音の振動数に依存して 2 つまたは 3 つの渦が合体するという実験結果を得ている. ただし、可視化写真から渦の合体を議論することには注意が必要であるという指摘もある [6]

現在では第1渦列の消滅はその配置の不安定性によって起こり、第2渦列はその結果としてできる平均せん断流の線形不安定性によって生じるという結論が支配的であるが、それらの論拠はまだ十分ではない。第1渦列の消滅と第2渦列の発生について明確な結論が未だに得られていないのは、円柱を過ぎる流れにおける第2渦列の発生は円柱からその直径の100倍以上離れた位置で生じるため、実験的研究においても数値シミュレーションにおいても精度の低下という問題が伴うためである。ところが、最近、Inasawa and Asai [10] は角柱を過ぎる流れから生じる音の伝播について、圧縮性流れの数値シミュレーションを行い、角柱後流においてもカルマン渦列の消滅と再生が起こることを確かめた。彼らの計算では、角柱の流れ方向の辺長を w 、流れと垂直な辺長を d とするとき、角柱のアスペクト比 $A = w/d$ が1では彼らの計算範囲においては渦列の消滅は観測されず、 $A = 0.4$ のときは渦列の消滅と再生が観測された。アスペクト比 A の値が0.5程度であれば、第2渦列の発生は角柱の比較的近傍で生じ、第1渦列および第2渦列の強さが大きく減衰しないために数値シミュレーションでも実験でも精度の低下が小さくなる。

本研究では、角柱の後流において渦が消滅する機構と渦が再生成する機構について数値シミュレーションおよび線形安定性解析によって明らかにする。円柱ではなく角柱を選ぶ理由は、先に説明したように、パラメータ A の値によって、渦列の消滅と再生が生じる場合と生じない場合が存在し、その物理的理由を調べるのに適しているからである。

2. 問題設定と基礎方程式

2.1 基礎方程式と境界条件

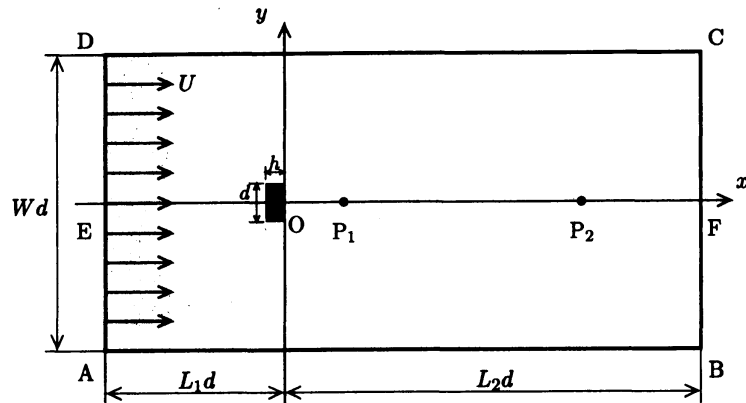


図 1: 計算領域と座標系.

流速 U の一様流中に置かれた角柱を過ぎる流れを考え、角柱の下流側の辺の中心を原点 O として、流れ方向に x 軸をとり、 x 軸と垂直に y 軸をとる (図 1)。長方形断面をもつ角柱の流れと垂直方向の辺長を d 、流れ方向の辺長を h として、角柱のアスペクト比を $A = h/d$ で定義する。図 1 で、点 P_1 と P_2 で示される 2 点はそれぞれ第 1 渦列および第 2 渦列の特徴を調べる代表位置である。

流れは 2 次元流非圧縮流であると仮定する。一様流速 U を代表速度にとり、流れと垂直方向の角柱の長さ d を代表長さにとってすべての物理量を無次元化する。たとえば、無次元座標を $(x^*, y^*) = (x/d, y/d)$ 、無次元速度を $(u^*, v^*) = (u/U, v/U)$ のように定義するが、今後は無次元量であることを表すアスタリスク $*$ を省略する。2 次元非圧縮流を考えているので、流れ関数

$\psi(x, y, t)$ と渦度 $\omega(x, y, t)$ を導入する ($u = \partial\psi/\partial y$, $v = -\partial\psi/\partial x$). 流れを支配する基礎方程式は, ψ と ω に関する渦度輸送方程式とポアソン方程式であり,

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = J(\psi, \omega) + \frac{1}{Re}\Delta\omega, \quad (1)$$

$$\Delta\psi = -\omega, \quad (2)$$

$$J(f, g) = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)$$

と表すことができる. ここで, Re はレイノルズ数であり, 流体の動粘性係数を ν として, $Re \equiv Ud/\nu$ と定義した.

数値計算では, 無限に広い流れ場を図1に示すように, 流れ方向に $L_1 + L_2$, 流れに垂直方向に W をもつ有限領域 ABCD で近似する. 角柱表面における境界条件はすべりなし条件

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \quad (3)$$

を用いる. ここで n は角柱表面の法線方向である. 上流境界 (AD) では一様流速 U (無次元流速で $u = 1$) であるとし,

$$\psi = y, \quad \omega = 0 \quad (4)$$

を境界条件とする. 両端の境界 (AB, DC) は角柱から十分に遠く, そこでは一様流であるとして,

$$\psi = \psi_1 \quad (\text{AB}), \quad \psi = \psi_2 \quad (\text{DC}), \quad \omega = 0 \quad (\text{AB, DC}) \quad (5)$$

を課す. 下流境界 (BC) には速度勾配一定の流出条件あるいは必要に応じてゾンマーフェルト放射条件

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} + c \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial t} + c \frac{\partial\omega}{\partial x} = 0 \quad (6)$$

を用いる.

非定常な流れ場 (ψ, ω) を求めるときは, 渦度輸送方程式 (1) とポアソン方程式 (2) を境界条件 (3)–(6) のもとで適当な初期条件を与えることにより数値シミュレーションにより解く.

2.2 定常解と時間平均流

角柱を過ぎる流れは, 小さいレイノルズ数では対称な定常流であるが, ある臨界レイノルズ数よりも大きくなると, 流れは不安定となり振動流へ遷移する. しかし臨界レイノルズ数よりも大きなレイノルズ数においても対称定常流は定常方程式 (式 (1) で時間微分を 0 とおいた式) と式 (2) および境界条件 (3) – (6) を満たす解として存在する. すなわち, 定常解 ($\bar{\psi}, \bar{\omega}$) は

$$J(\bar{\psi}, \bar{\omega}) + \frac{1}{Re}\Delta\bar{\omega} = 0, \quad (7)$$

$$\bar{\omega} = -\Delta\bar{\psi} \quad (8)$$

を境界条件 (式 (3)–(6)) のもとで解くことにより得られる. この定常解の不安定性によりカルマン渦列 (第1渦列) が生じる.

対称定常解がある臨界レイノルズ数で不安定となって生じる第1渦列は, レイノルズ数が大きくなると角柱からある距離だけ下流へ流れた後に消滅する. さらにレイノルズ数が大きくなると物体からおおよそ $100d$ 離れた位置から第2渦列が生じる. 第2渦列は, 第1渦列が消滅してできた

ほぼ一様なせん断流の不安定性によって生じると予想されている。せん断流の不安定性を調べるにあたり、角柱後方で生じている第1渦列の振動を時間平均し、これによって求められた流れ場を主流としてせん断流の安定性解析を行う。時間平均した流れ場を時間平均流と呼び、 $(\langle\psi\rangle, \langle\omega\rangle)$ と表す。

2.3 線形安定性解析

まず対称定常解の線形安定性を調べるために、対称定常解に攪乱を加えた状況を考える。対称定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ に加えられた攪乱を ψ', ω' として、流れ関数 ψ と渦度 ω を

$$\psi = \bar{\psi} + \psi', \quad \omega = \bar{\omega} + \omega' \quad (9)$$

と表す。この式を式(1)に代入すると、攪乱に対する非線形攪乱方程式

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = \frac{1}{Re} \Delta \omega' + J(\psi', \bar{\omega}) + J(\bar{\psi}, \omega') + J(\psi', \omega') \quad (10)$$

を得る。式(10)において非線形項を無視し、攪乱の時間依存性を指数関数的 $(\psi' = \hat{\psi}(x, y)e^{\lambda t}, \omega' = \hat{\omega}(x, y)e^{\lambda t})$ であると仮定し、式(10)へ代入すると

$$\lambda \hat{\omega} = \frac{1}{Re} \Delta \hat{\omega} + J(\hat{\psi}, \bar{\omega}) + J(\bar{\psi}, \hat{\omega}). \quad (11)$$

が得られる。式(11)を攪乱についてのポアソン方程式

$$\hat{\omega} = -\Delta \hat{\psi} \quad (12)$$

と共に境界条件の下で解き、固有関数および固有値を求める。ここで、 λ は複素線形増幅率と呼ばれ、一般に複素数であり、その実部 λ_r と虚部 λ_i はそれぞれ攪乱の増幅率と角速度(振動数)を表している。

攪乱 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ の境界条件として、角柱表面では次の滑りなし条件：

$$\hat{u} = \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = 0, \quad \hat{v} = -\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

を用い、上流と流れに垂直方向に十分に離れた計算領域側面境界では $\hat{\psi} = \hat{\omega} = 0$ を課し、下流での流出条件には、

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \hat{\omega}}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

を用いる。時間平均流の安定性解析では、 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ の代わりに $(\langle\psi\rangle, \langle\omega\rangle)$ を用いる。

2.4 数値シミュレーション

数値シミュレーションでは、差分法を用い、初期値・境界値問題として基礎方程式(1)と(2)を数値的に解く。計算領域を x 座標および y 座標について、等間隔 Δx および Δy の正方格子 ($\Delta x = \Delta y$) に分割し、渦度輸送方程式(1)の時間微分を1次精度の前進オイラー法で近似し、粘性項および非線形項の空間微分を2次精度の差分で近似する。また、ポアソン方程式(2)は空間微分を2次精度の差分を用いて近似し、SOR法 (Successive Over Relaxation Method) を用いて逐

次代入法により解を求める。このとき、収束判定は各格子点 $(i\Delta x, j\Delta y)$ における時刻 $n\Delta t$ での流れ関数 $\psi(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t)$ の $k-1$ 回目の逐次解 $\psi_{i,j}^{n(k-1)}$ と k 回目の値 $\psi_{i,j}^{n(k)}$ の絶対誤差の最大値が 10^{-6} より小さくなったときに解は収束したとみなす。

時間刻みは主に $\Delta t = 0.001$ を用い、空間刻みを $\Delta x = \Delta y = 0.1$ とした。これらの値をさらに小さくして計算を行ったが、 $\Delta x = \Delta y = 0.05$ の場合との流速の誤差は最大で 2% であり、計算精度はこれらの値で十分であることを確認した。

式 (10) で非線形項を 0 とおいて得られる線形攪乱方程式と ω' についてのポアソン方程式の数値シミュレーションも式 (1) と (2) の場合と同様に行う。ただし、初期条件には式 (1) と (2) の数値シミュレーションの結果 (ψ, ω) から対称定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ を引いた解を用い、上流および計算領域側面での境界条件には $\psi' = 0$ および $\omega' = 0$ を適用する。

定常流の数値計算と線形安定性についても数値シミュレーションと同様に差分法を用いる。方程式 (11) と (12) における空間微分をすべて 2 次精度の差分で近似し、これらを SOR 法による反復法で解くことにより対称定常解を求める。SOR 法における解の収束判定は数値シミュレーションの場合とほぼ同様であるが、収束条件として、 $k-1$ 回目の逐次解 $\psi_{i,j}^{(k-1)}$ と k 回目の値 $\psi_{i,j}^{(k)}$ の絶対誤差の最大値が 10^{-8} より小さくなったときに解は収束したとみなした。

3. 計算結果

3.1 流れ場

角柱のアスペクト比 A の違いによって角柱を過ぎる流れパターンは大きく異なる。いくつかのアスペクト比 ($A = 5.0, 4.0, 3.0, 0.5, 0.2$) について数値シミュレーションを行った結果、アスペクト比が小さいほどカルマン渦列が消滅するまでの距離が短くなることがわかった。したがって、ここでは $A = 0.2$ のアスペクト比をもつ角柱を用いて、カルマン渦列の消滅と再生成のメカニズムについて調べることにする。

アスペクト比 $A = 0.2$ の角柱を過ぎる流れの数値シミュレーションを $Re = 30$ から 120 までのレイノルズ数で行った。その代表的な流れ場は図 2 のようになる。レイノルズ数が小さいとき、流れ場に孤立した渦は存在せず、せん断流が見られるのみである (図 2(a), $Re = 30$)。レイノルズ数が $Re = 40$ では流れは対称性を失い、振動流へ遷移している (図 2(b))。このときの流れ場中の振動は下流の広範囲に渡って持続している。しかし、レイノルズ数が $Re = 80$ になると、物体後方 $x = 30d$ で振動が消滅する (図 2(c))。図 2(c) では、第 2 渦列は計算領域内で確認されないが、レイノルズ数が $Re = 100$ まで大きくなると、図 2(d) のように角柱後方およそ $x = 80d$ 下流から第 2 渦列が形成される。

x 軸上の各点において y 軸方向の振動振幅を調べ、各渦列の最大振動振幅の 1/10 以上の振動振幅をもつ範囲を第 1 渦列および第 2 渦列の存在範囲と定義して、その存在範囲を描くと図 3 のようになる。図 3 より、流れが振動流へ遷移するのはおよそ $Re \sim 40$ であること、レイノルズ数が大きくなるにしたがって第 1 渦列の存在範囲が短くなることがわかる。また、第 2 渦列はおよそレイノルズ数 $Re \sim 90$ で生じ、レイノルズ数が大きくなるにつれて発生位置が上流へと遡ることがわかる。このような流れの遷移は Taneda の報告と定性的に一致し、円柱と角柱の違いはあるが、Taneda が見いだしたカルマン渦列の消滅と再生成をよく再現している。

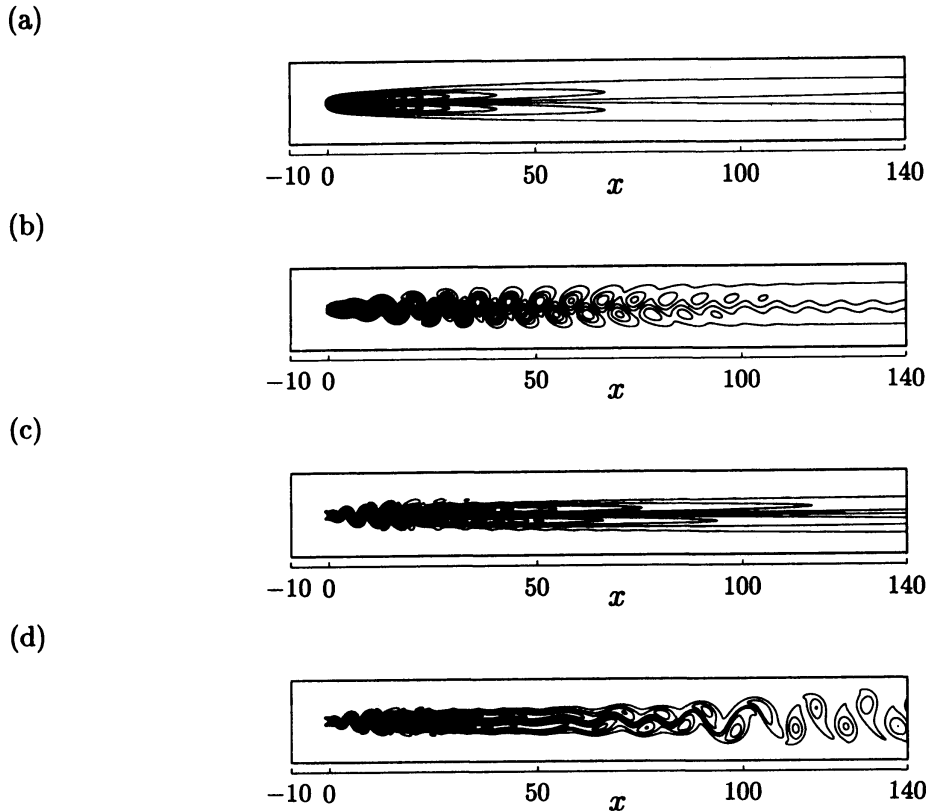


図 2: 流れ場 (渦度の等高線), $A = 0.2$. (a) 対称定常流. $Re = 30$, (b) 振動流. $Re = 40$, (c) 第 1 渦列の消滅. $Re = 80$, (d) 渦列の消滅と再生成. $Re = 100$.

3.2 分岐図

角柱を過ぎる流れについて、解の分岐と第 1 渦列の発生・消滅と第 2 渦列の発生する臨界レイノルズ数を調べるために、角柱後方流れの振動の大きさを表す代表的な物理量として、点 P_1 ($(x, y) = (20, 0)$) と点 P_2 ($(x, y) = (100, 0)$) における y 方向速度 v_1 および v_2 の最大振動振幅 a_1 と a_2 に着目する。観測点 P_1 は、第 1 渦列の振動振幅が大きくなる点であり、測定点 P_2 は第 2 渦列による振動が支配的となる点である。

振動振幅 a_1 と a_2 をレイノルズ数 Re の関数として描くと、図 4 のようになる。図 4 で、実線は観測点 P_1 での振動振幅 v_1 の最大値 a_1 、破線は P_2 での振動振幅 v_2 の最大値 a_2 を表している。実線は $a_1 \propto (Re - Re_c)^{1/2}$, ($Re_c = 35.5$) の関係を満たしており、解は $Re_c = 35.5$ を臨界点とするホップ分岐をしている。すなわち、点 P_1 でも P_2 においても、 Re_c までは y 方向流速は 0 であり、対称な定常流であるが、レイノルズ数が Re_c よりも大きくなると、 y 方向流速が生じ、振動することから、対称性が破れ振動流へ遷移する。すなわち第 1 渦列が生じる。位置 x_2 で観測する v_2 の最大振動振幅 a_2 は、第 1 渦列が生じる臨界レイノルズ数 Re_c で生じるホップ分岐により、 $Re > Re_c$ で有限の値となる。最大振動振幅 a_2 は Re の増加に伴ってだいに小さくなり、 $Re \sim 60$ 程度になると a_2 はほぼ 0 となって、レイノルズ数が $60 < Re < 90$ の範囲ではその振動振幅はほぼ 0 である。すなわち、点 P_2 においてこの範囲のレイノルズ数ではカルマン渦列は消滅することになる。さらに、レイノルズ数が $Re \sim 90$ 程度になると、 a_2 は再び有限の値をもち、第 2 渦列が生じていることがわかる。図 4 より、流れ場は $Re_c = 35.5$ で対称定常解の不安定性により解のホップ分岐を生じ、角柱後方全体にカルマン渦列が形成されることがわかった。

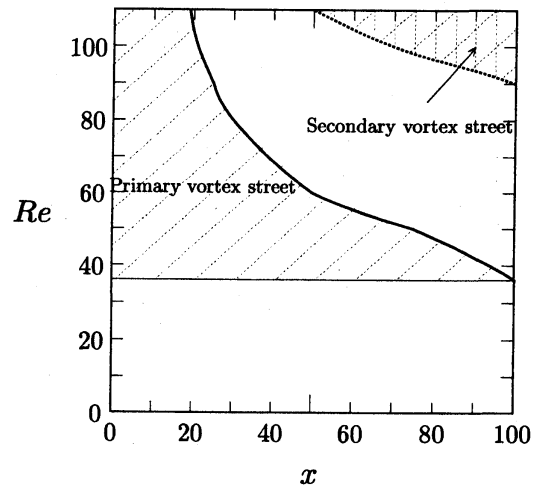


図 3: 第 1 渦列と第 2 渦列の存在範囲. $A = 0.2$.

また、レイノルズ数が大きくなるにしたがって下流からカルマン渦列が消滅し、 $Re = 90$ を超えると、第 2 渦列が生じることがわかった。

第 2 渦列が生じるメカニズムとして、対称定常解の第 2 不安定モードとして第 2 渦列が生じる可能性と、ホップ分岐により生じた第 1 渦列を含む振動流解が再び不安定となって第 2 渦列を含む振動流が生み出される可能性、およびカルマン渦列が消滅した後にできる単純せん断流 (時間平均流) が不安定となって第 2 渦列が生じる可能性がある。

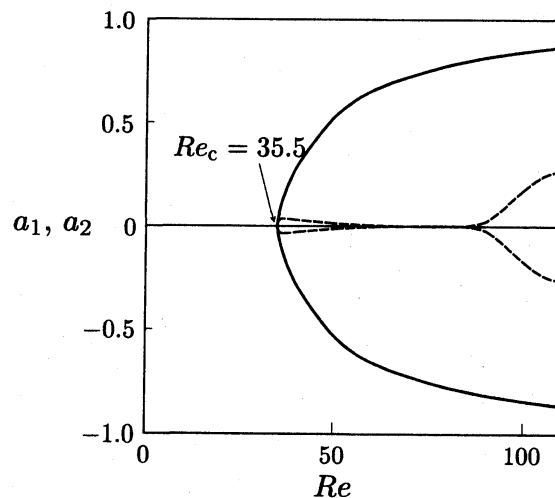


図 4: 分岐図 (振動振幅, a_1, a_2). $A = 0.2$. 実線: a_1 ($P_1, (x, y) = (20, 0)$) での振動振幅, 破線: a_2 ($P_2, (x, y) = (100, 0)$) での振動振幅.

3.3 振動数

第 1 渦列と第 2 渦列の関係を調べるため、2つの代表点 ($P_1 = (20, 0)$, $P_2 = (100, 0)$) における流れ場の振動数を評価する。図 5 は $Re = 100$ における P_1 および P_2 での y 方向速度 v の振動

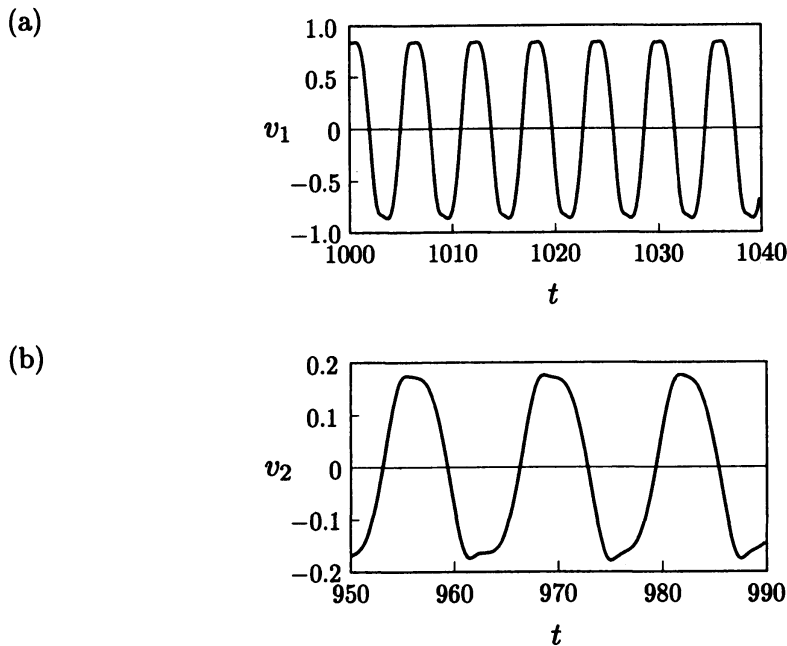


図 5: 点 P_1 および P_2 における y 軸方向の速度変動, v_1 と v_2 . $Re = 100$.

波形である。このとき、流れ場中では点 P_1 および P_2 を含むそれぞれの領域で第 1 渦列と第 2 渦列が生じている。両者の波形を比べると、第 1 渦列の振動は第 2 渦列よりも小さな振動振幅であり、短い周期であることがわかる。また、第 1 渦列と第 2 渦列の振動周期はそれぞれ $T_1 = 5.92$ ($f_1 = 0.169$), $T_2 = 12.5$ ($f_2 = 0.080$) となり、有理比とはならない。

各レイノルズ数について、点 P_1 と P_2 での振動数 f_1 および f_2 を評価し、レイノルズ数の関係として描くと図 6 のようになる。黒四角 (■) は点 P_1 での振動数 f_1 を表し、十字 (+) は点 P_2 での振動数 f_2 を表す。第 2 渦列が生じるレイノルズ数 $Re = 90$ よりも小さいレイノルズ数では、2つの振動数 f_1 と f_2 は一致する。すなわち、第 1 渦列の振動数と微小な振動振幅をもつせん断流の振動数とが一致する。レイノルズ数が 90 よりも大きくなると第 2 渦列が生じ、図 5 に示したように両者の振動数は有理比ではない。図 6 で、振動数 f_2 はレイノルズ数が 90 付近で値に飛びが生じている。

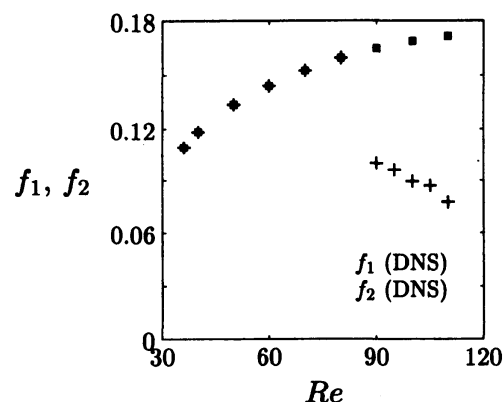


図 6: 振動数 (ストルーハル数). 点 P_1 での振動数 f_1 と点 P_2 での振動数 f_2 . ■: f_1 ($P_1, (x, y) = (20, 0)$), +: f_2 ($P_2, (x, y) = (100, 0)$).

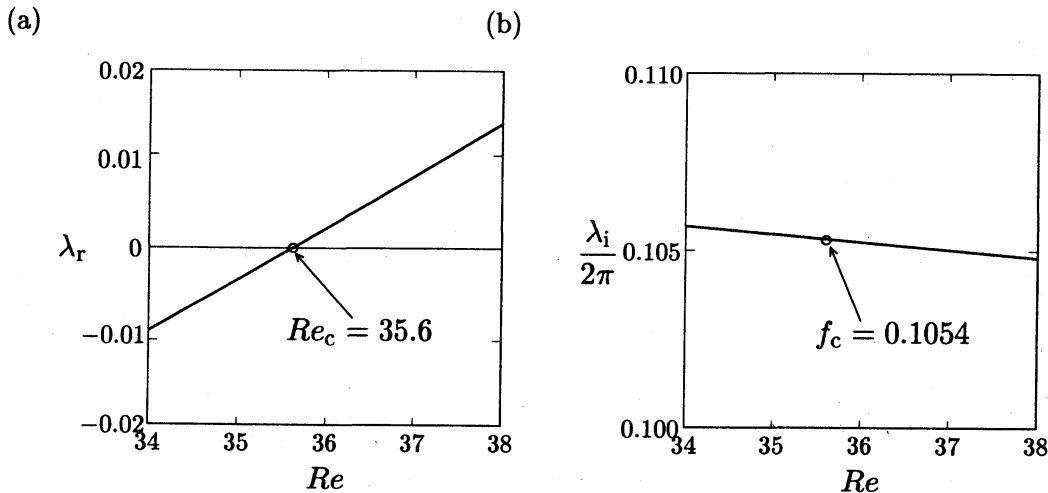


図 7: 対称定常解の線形安定性解析. (a) 線形増幅率 λ_r . (b) 振動数 $\lambda_i/2\pi$.

4. 線形安定性解析

4.1 対称定常解の線形安定性解析

カルマン渦列は対称定常解 $(\bar{\psi}, \bar{\omega})$ の線形不安定性により現れることが知られている. 対称定常解に加えられた攪乱についての方程式 (11) と (12) を数値的に解き, 最も不安定なモードの固有値 λ と固有関数 $(\hat{\psi}, \hat{\omega})$ を求める. 固有値 λ は複素数であり, 実部 λ_r は線形増幅率であり, 虚部 λ_i を 2π で割った値, すなわち $\lambda_i/2\pi$ は振動数 f を表す. 線形増幅率および振動数とレイノルズ数の関係を表すと図 7(a) と 7(b) のようになる. 線形増幅率が負から正に値を変えると, 流れは不安定となる. したがって, 図 7(a) より流れが不安定となる臨界レイノルズ数は $Re_c = 35.6$ である. この値は数値シミュレーションから求めた臨界レイノルズ数 $Re_c = 35.5$ (図 4) とほぼ一致しており, 円柱後流が不安定となる臨界値 $Re_c = 46.7$ [11] に比べればいくぶん小さな値である. 図 7(b) より, 臨界レイノルズ数 $Re_c = 35.6$ における振動数は $f_c = 0.1054$ となり, 数値シミュレーションから得られた臨界レイノルズ数 $Re_c = 35.6$ での振動数 $f_c = 0.109$ と計算精度の範囲内で一致している.

次に固有関数が表す流れパターンを見てみよう. レイノルズ数 $Re = 40, 80, 100$ のときの対称定常流と固有関数はそれぞれ図 8(a)-8(f) のようになる. レイノルズ数 40 において固有関数は下流の広範囲に渡って生じ, より大きなレイノルズ数 $Re = 80$ や 100 においてはその領域が短くなっており, 固有関数の存在範囲は図 2(b)-2(d) で描かれている第 1 渦列の存在範囲とほぼ同じである. このように, 第 1 渦列が消滅する原因は渦を励起する不安定性の生じる範囲がレイノルズ数が大きくなるとともに短くなるためである. なお, ここで考えているような小さなレイノルズ数においては, 角柱直後に生じた渦はおよそ $\Delta x = 5 \sim 6$ 程度流下するとその強さが半減し, 急速にその強さが弱くなるので, 非粘性渦から想像するようには渦は長い時間生き延びないのである.

また, 第 2 渦列が対称定常流の不安定性から生じる可能性について調べるため, 第 2 渦列を含む流れ場から対称定常流を引き去り, 線形固有関数の初期値として式 (11) と (12) を数値的に解いたが, 収束する解は得られず, 第 1 渦列のみを含む固有関数 (図 8) へと収束した. したがって, 第 2 渦列は対称定常流の線形安定性における第 2 固有モードである可能性はないと判断した (円柱を過ぎる流れの第 2 固有モードについては Verma and Mittal[12] を参照).

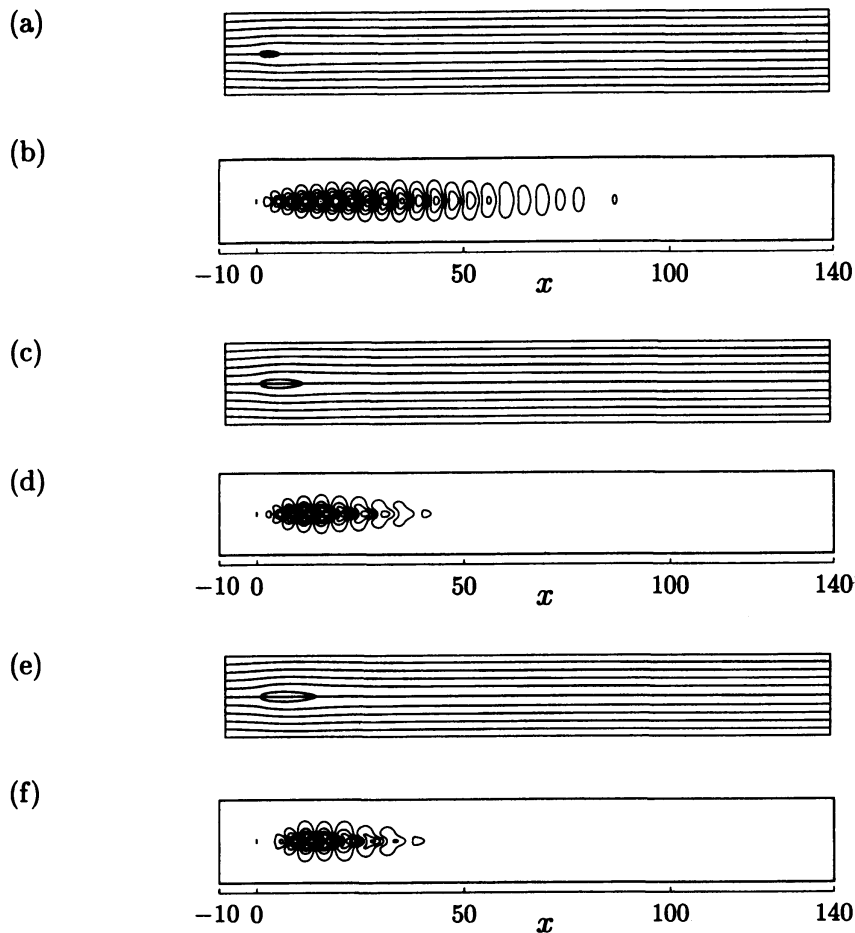


図 8: 攪乱の固有関数と主流の対称定常解 (流線). $A = 0.2$. (a), (b) $Re = 40$. (c), (d) $Re = 80$. (e), (f) $Re = 100$. (a), (c), (e) 対称定常流. (b), (d), (f) 固有関数.

4.2 時間平均流の線形安定性解析

第2渦列が生じる物理機構の可能性として、第1渦列が消滅してできたせん断流の不安定性が考えられる。このときできるせん断流はほぼ定常な流であるが、わずかな時間振動成分を含み、せん断流の上流部分では第1渦列を含む振動流である。したがって、このせん断流の不安定性を調べる最も簡単な方法はせん断流を含む振動流の時間平均場の線形安定性を調べる方法である。

振動流を時間平均して平均流を求めるため、第1渦列の振動周期 T_1 と第2渦列の周期 T_2 の最小公倍数の周期 T_3 を評価し、周期 T_3 の5倍の時間にわたって流れ場 (ψ, ω) の時間平均を行い、これを $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ とおく。レイノルズ数がおおよそ90より大きいとき第2渦列が形成されるので、 $Re = 95$ での平均流の線形安定性を調べる。図9(a)が $Re = 95$ でのある瞬間における流れ場であり、図9(b)はこのようにして得られた時間平均流である。平均流の線形安定性解析は対称定常解の線形安定性を調べたのと同様に行うことも可能であるが、ここでは線形攪乱方程式を適切な境界条件の下で初期値・境界値問題として数値的に解くことにより求めることにより、攪乱 (ψ', ω') の増幅率と固有関数を求める。ここで、初期としては数値シミュレーションで求めた (ψ, ω) と時間平均流 $(\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ との差 $(\psi, \omega) - (\langle \psi \rangle, \langle \omega \rangle)$ にとる。

適切な初期条件から初期値・境界値問題として線形攪乱方程式を解くと、ある時間の後に解の

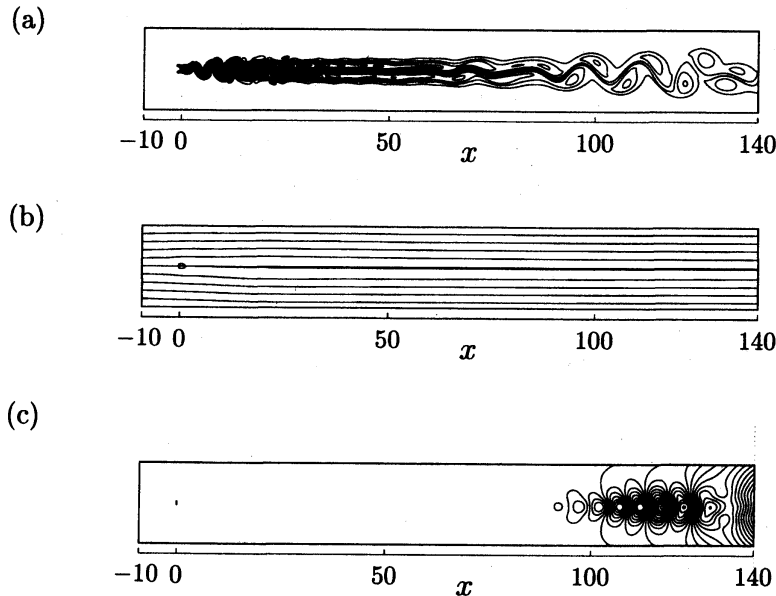


図 9: 流れ場 (流線). $Re = 95$. (a) 第 2 渦列を含む流れ場, (b) 時間平均流, (c) 攪乱の固有関数.

振幅が指数関数的に増幅あるいは減衰する漸近的な振る舞いをするようになる. このときの攪乱の流線が図 9(c) である. 図 9 において, 攪乱はおよそ $x = 85 \sim 90$ 程度下流に存在するように見える. これと比較するために, 同じレイノルズ数での数値シミュレーションより得られた渦度の等高線図を描いてもほぼ同じ流れ場が得られる. これより, 第 2 渦列は第 1 渦列が消滅してできた時間平均流 (せん断流) の不安定性によって誘起されると結論する. ただし, この計算については現在精度を確認中であり, また線形固有値問題の解を求めることにより確認を行っている.

5. 結論

円柱や正方形角柱を過ぎる流れにおいて, カルマン渦列の消滅と再生成は物体から非常に離れた位置から生じるが, 角柱のアスペクト比が小さいとき物体後方からおよそ $100d$ の範囲で生じることがわかった. この結果は実験においてもシミュレーションにおいても精度の低下を比較的小さく保つことができ, 渦列の消滅と再生成の現象を調べる際に有効な手段である. 渦列の消滅は対称定常解の線形安定性の性質で説明できる. また, 第 2 渦列の生成は第 1 渦列が消滅することにより生じた定常に近いせん断流の線形不安定性によるものであることがわかった.

謝辞

この報告を執筆するに際し, 首都大学東京の浅井雅人教授と稲澤歩助教および同志社大学大学院生の武本幸生氏から助言を受けたことを記し, 感謝の意を表する.

参考文献

- [1] BÉNARD, H. 1908 Formation des centres de giration á l'arrière d'un obstacle en mouvement. *C. R. Acad. Sci. Paris.* **147**, 839-842.

- [2] VON KÁRMÁN, T. 1911 Über den Mechanismus des Widerstandes, den einen bewegter Körper in einer Flüssigkeit erzeugt. *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys.* **K1**, 509-517.
- [3] TANEDA, S. 1959 Downstream development of the wakes behind cylinders. *J. Phys. Soc. Japan* **14**, 843-848.
- [4] DURGIN, W. W., KARLSSON, S. K. F. 1971 On the phenomenon of vortex street breakdown. *J. Fluid Mech.* **48**, 507-527.
- [5] SATO, H., KURIKI, K. 1961 The mechanism of transision in the wake of a thin flat plate placed parallel to a uniform flow. *J. Fluid Mech.* **11**, 321-352.
- [6] CIMBALA, J. M., NAGIB, H. M., ROSHKO, A. 1988 Large structure in the far wakes of two-dimensional bluff bodies. *J. Fluid Mech.* **190**, 265-298.
- [7] KARASUDANI, T., FUNAKOSHI, M. 1994 Evolution of a vortex street in the far wake of a cylinder. *Fluid Dyn. Res.* **14**, 331-352.
- [8] OKUDE, M. 1981 Rearrangement of Karman's vortex street. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci* **24**, 95-105.
- [9] OKUDE, M., MATSUI, T. 1990 Vorticity distribution of vortex street in the wake of a circular cylinder. *Trans. Japan Soc. Aero. Space Sci* **33**,
- [10] INASAWA, A., NAKANO, T., ASAI, M. 2011 Development of wake vortices and the associated sound radiation in the flow past a rectangular cylinder of various aspect ratios. *Proc. Seventh Int. Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena, (Ottawa, 2011)* in press.
- [11] JACKSON, C. P. 1987 A finite-element study of the onset of vortex shedding in flow past variously shaped bodies. *J. Fluid Mech.* **182**, 23-45.
- [12] VERMA, A. & MITTAL, S. 2011 A new unstable mode in the wake of a circular cylinder. *Phys. Fluids* **23**, 121701-1-4.