

退化した放物型作用素の基本解について

阪大 理 堤 千里

§1. 序

放物型擬微分作用素

$$L = \frac{\partial}{\partial t} + p(t; x, D)$$

に対する基本解 $E(t)$ を擬微分作用素の表象の計算によつて、
 t を助変数とする擬微分作用素として構成する。こゝで、
 $p(t; x, D)$ は次の条件を満たすものとする。

仮定

- (i) $p(t; x, \xi) \in \mathcal{E}_t^0(S_{\rho, \delta}^m)$ ($m \geq 0$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$) であつて、
 $0 \leq m' \leq m$, $C > 0$ が存在して

$$\operatorname{Re} p(t; x, \xi) \geq C \langle \xi \rangle^{m'}.$$

- (ii) 任意の multi index $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対し、 $C_{\alpha, \beta}$ が存在して

$$|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(t; x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \operatorname{Re} p(t; x, \xi) \langle \xi \rangle^{-\rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

但し $p_{(a)}^{(a)}(x, \xi) = (\partial/\partial \xi_1)^{a_1} \cdots (\partial/\partial \xi_n)^{a_n} (-i\partial/\partial x_1)^{b_1} \cdots (-i\partial/\partial x_n)^{b_n} p(x, \xi)$,

$\langle \xi \rangle = (1 + |\xi|^2)^{1/2}$, かつ $C, C_{\alpha, \beta}$ は $x \in \mathbb{R}^n, 0 \leq t \leq T (T \leq +\infty)$ に対して一様にとれるものとする.

この仮定 (i) (ii) は t を固定するごとに, Hörmander [2] による擬微分作用素 $p(x, D)$ が準楕円型であるための十分条件に相当するもので, L は放物型作用素 ($m' = m$) と含む作用素である.

さて, 基本解 $E(t)$ の構成は, $\Gamma(t, s; x, D)$ が与えられた時に次の形の積分方程式を解く事に帰着される.

$$\Gamma(t, s; x, D) + \mathcal{G}(t, s; x, D) + \int_s^t \Gamma(t, \sigma; x, D) \mathcal{G}(\sigma, s; x, D) d\sigma = 0$$

この $\mathcal{G}(t, s; x, D)$ を求めるために, 擬微分作用素の多重積の表象と [4], [6] による oscillatory integral を使って正確に計算する事が必要となる.

二階の退化した放物型作用素に対する基本解については Matuzawa [7] がある.

§2. 補題と定理

擬微分作用素の表象の topology として次の2つのものを考える.

定義 1. $S_{\beta, \delta}^m = \{ p(x, \xi) \in C^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n); |p_{(a)}^{(a)}(x, \xi)| \leq C_{\alpha, \beta} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|} \}$
 $\forall \alpha, \beta$

$p(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$, 整数 $l \geq 0$ に対し

$$|p|_{m, l} = \inf \sup_{\substack{| \alpha | + | \beta | \leq l \\ (x, \xi) \in \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n}} \{ |p_{(\alpha, \beta)}^{(u)}(x, \xi)| \langle \xi \rangle^{m + \rho | \alpha | - \delta | \beta |} \}$$

とする。この時 $S_{\rho, \delta}^m$ はこの semi-norms $|p|_{m, l}$ により Fréchet space となる。さらに $\mathcal{E}_t(S_{\rho, \delta}^m) = \{p(t) \in S_{\rho, \delta}^m; p(t) \text{ が } t \text{ に関して連続}\}$ とする。

定義 2. 次の条件を満たす時 $\{p_j\}_{j=1}^\infty \in S_{\rho, \delta}^m$ が $p \in S_{\rho, \delta}^m$ に weak に収束するという； $\{p_j\}_{j=1}^\infty$ が $S_{\rho, \delta}^m$ の有界集合であって，任意の compact 集合 $K \subset \mathbb{R}_\xi^n$ に対し $\mathbb{R}_x^n \times K$ 上で一様に $p_j(x, \xi) \longrightarrow p(x, \xi)$ ($j \rightarrow \infty$)。さらに $p(t) \in w\text{-}\mathcal{E}_t(S_{\rho, \delta}^m)$ は $t \longrightarrow p(t) \in S_{\rho, \delta}^m$ が $S_{\rho, \delta}^m$ に weak topology を入れた時連続となるものとする。

擬微分作用素に対して，表象の topology と Sobolev space での作用素ノルムとの次の基本的関係がある。

補題 1. (Calderón and Vaillancourt [1], Kumano-go and Nagase [3]) $p(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^0$ ($0 \leq \delta \leq \rho \leq 1$) とすると $p(x, D)$ は $L^2(\mathbb{R}^n)$ 有界作用素となる。 $p(x, \xi) \in S_{1, \delta}^0$ ($0 \leq \delta < 1$) とすると $p(x, D)$ は $L^p(\mathbb{R}^n)$ 有界作用素となる。 ($1 < p < \infty$)。

補題 2. (Kumano-go and Tautsumi [5]) $\{p(x, \xi)\}_{j=1}^\infty \in S_{\rho, \delta}^m$ が $p(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m$ に weak に収束すれば，任意の $u \in H_{s+m}^1$ に対し

$$p_j(x, D)u \xrightarrow{(j \rightarrow \infty)} p(x, D)u \quad \text{in } H_s.$$

擬微分作用素の多重積 $p_1(x, D)p_2(x, D) \cdots p_\ell(x, D)$ の単純表象を $[p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_\ell]$ で表わすものとする. この時, 次の展開定理が成立する.

補題 3. (Nagase and Shinkai [9]). 任意の自然数 N に対して

$$[p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_\ell] - \sum_{k=0}^{N-1} [p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_\ell]_k \in S_{\rho, \delta}^{M-(\rho-\delta)N}$$

が成立する. ここで $p_j \in S_{\rho, \delta}^{m_j} (1 \leq j \leq \ell)$, $M = \sum_{j=1}^{\ell} m_j$,

$$[p_1 \circ p_2 \circ \cdots \circ p_\ell]_k$$

$$= \sum_{|\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_{\ell-1}| = k} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2! \cdots \alpha_{\ell-1}!} p_1^{(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{\ell-1})} p_2^{(\alpha_2 + \cdots + \alpha_{\ell-1})} \cdots$$

$$\times p_3^{(\alpha_3 + \cdots + \alpha_{\ell-1})} \cdots p_{\ell-1}^{(\alpha_{\ell-1})} p_\ell^{(\alpha_\ell + \cdots + \alpha_{\ell-1})}$$

定理 $p(t, x, \xi) \in \mathcal{E}_t^0(S_{\rho, \delta}^m)$ が仮定(i)(ii)を満たすとする. この時, 次の性質を持つ $E(t, s) = e(t, s; x, D) \in W - \mathcal{E}_{t, s}^0(S_{\rho, \delta}^0)$ が構成できる:

$$(2.1) \quad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + p(t; x, D) \right) E(t, s) = 0 & \text{in } t > s \\ E(s, s) = I \end{cases}$$

$m - (\rho - \delta)N \leq 0$ なる自然数 N に対し, $e(t, s)$ は次の展開を

持つ.

$$e(t, s) = \sum_{j=0}^{N-1} e_j(t, s) + f_N(t, s).$$

ここに

$$(2.2) \quad \begin{cases} e_j(t, s) \in W - \Sigma_{t,s}^0 (S_{s,\delta}^{-(p-\delta)j}) & (0 \leq j \leq N-1), \\ f_N(t, s) \in W - \Sigma_{t,s}^0 (S_{s,\delta}^{m-(p-\delta)N}). \end{cases}$$

より詳しく, 任意の α, β に対し t, s は independent な定数

$C_{j,\alpha,\beta}, C'_{\alpha,\beta}$ が存在して, $e_{j(\beta)}^{(\alpha)}(t, s) = a_{j,\alpha,\beta}(t, s) e_0(t, s)$

と書くと

$$(2.3) \quad |a_{j,\alpha,\beta}(t, s)| \leq C_{j,\alpha,\beta}(\xi) \xi^{-p|\alpha|+|\beta|(p-\delta)j} \omega_{j,\alpha,\beta},$$

$$(2.4) \quad |f_N^{(\alpha)}(t, s)| \leq C'_{\alpha,\beta}(t-s) \xi^{m-(p-\delta)N-p|\alpha|+|\beta|}$$

$$\text{ここに } \omega_{0,0,0} = 1, \quad \omega_{0,\alpha,\beta} = \max \{ \omega, \omega^{|\alpha|+|\beta|} \} \quad |\alpha|+|\beta| \neq 0$$

$$\omega_{j,\alpha,\beta} = \max \{ \omega^2, \omega^{|\alpha|+|\beta|+2j} \} \quad (j \geq 1),$$

$$\omega = \operatorname{Re} \int_s^t p(\sigma; x, \xi) d\sigma.$$

系 (2.3), (2.4) の評価より,

$$p=1 \text{ の時 } E(t, s)u \xrightarrow{(t \downarrow s)} u \quad \text{in } L_p(\mathbb{R}^n) \quad \forall u \in L_p \quad (1 < p < \infty)$$

$$0 \leq \delta < p \leq 1 \text{ の時 } E(t, s)u \xrightarrow{(t \downarrow s)} u \quad \text{in } L_2(\mathbb{R}^n) \quad \forall u \in L_2$$

系は $e(t, \xi) \xrightarrow{(t \downarrow s)} 1$ weakly in $S_{\beta, \delta}^{\circ}$ と補題 2 より明らかである。

例 1. $L = \frac{\partial}{\partial t} + a(t) |\chi|^2 \mu (-\Delta)^{\nu} + 1$, $\mu, \nu \geq 0$ なる integer.

$a(t) \geq 0$ は連続関数. $(m' = 0, \beta = 1, \delta = \frac{\nu}{\mu})$

例 2. $L = \frac{\partial}{\partial t} + \psi(t, x) (-\Delta) + \psi(x, D)$, $\psi(x, t) \in \mathcal{E}_t^0(B_x)$,
 $C(\xi)^2 \geq \psi(x, \xi) \geq C(\xi)^d$. $(1 < d \leq 2)$ $(m' = d, \beta = 1, \delta = 2 - d)$

§ 3. 定理の証明

Shinkai [10] による擬微分作用素系の場合にも適用出来る方法によって述べる。

まず, 形式的に L に対する基本解は

$$I + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-1}} p(s_1) \circ p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j) ds_j$$

と書ける。そこで

$$(3.1) \quad e_0(t, \xi) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-1}} [p(s_1) \circ p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j)]_0 ds_j$$

$k \geq 1$ に対し

$$(3.2) \quad e_k(t, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-1}} [p(s_1) \circ p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j)]_k ds_j$$

と定義する。この時 $e_k(t, s)$ は次の微分方程式を満たす事に注意する。(cf. [8], [7], [11])

$$(3.3) \quad \begin{cases} \left[\frac{d}{dt} + p(t; x, \xi) \right] e_0(t, s) = 0 & \text{in } t > s \\ e_0(s, s) = 1 \end{cases}$$

$$(3.4) \quad \begin{cases} \left[\frac{d}{dt} + p(t; x, \xi) \right] e_k(t, s) = - \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{|\alpha|+j=k} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(t) e_{j,(\alpha)}(t, s) & \text{in } t > s \\ e_k(s, s) = 0 \end{cases}$$

(3.1) より

$$e_0(t, s) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \int_s^t ds_1 \int_s^{s_1} ds_2 \cdots \int_s^{s_{j-1}} p(s_1; x, \xi) p(s_2; x, \xi) \cdots p(s_j; x, \xi) ds_j$$

従って (3.3) が成立する。次に (3.4) については補題3による表現より

$$\begin{aligned} & [p(s_1) \circ p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j)]_k \\ &= p(s_1) [p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j)]_k + \sum_{|\alpha|=1} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(s_1) [p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j)]_{k-1, (\alpha)} \\ &+ \sum_{|\alpha|=2} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(s_1) [p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j)]_{k-2, (\alpha)} + \cdots \\ &\quad \cdots + \sum_{|\alpha|=k} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(s_1) [p(s_2) \circ \cdots \circ p(s_j)]_{0, (\alpha)} \end{aligned}$$

の成立する事に注意すればよい。

$e_j(t, s)$ に対する評価は (3.3), (3.4) と仮定 (ii) を使って, 帰納的に証明できる.

さて, 上記の様に $e_j(t, s)$ を定義すると展開定理より

$$\left[p(t) \circ \sum_{j=0}^{N-1} e_j(t, s) \right] = \sum_{j=0}^{N-1} p(t) e_j(t, s) + \sum_{j=0}^{N-1} \left(\sum_{k=0}^{j-1} \sum_{l+k=j} \frac{1}{\alpha!} p^{(\alpha)}(t) e_{k|l}(t, s) \right) + r_N(t, s) \quad \text{in } t > s$$

但し $r_N(t, s) \in S_{s, s}^{m-(p-s)N}$.

$\sum_{j=0}^{N-1} e_j(t, s; x, D) = K_N(t, s)$, $r_N(t, s; x, D) = R_N(t, s)$ とおくと

$e_j(t, s)$ が (3.3) (3.4) を満たす事より

$$(3.5) \quad \begin{cases} L K_N(t, s) = R_N(t, s) \\ K_N(s, s) = I \end{cases} \quad \text{in } t > s$$

が得られる.

基本解 $E(t, s)$ を次の形で求める.

$$E(t, s) = K_N(t, s) + \int_s^t K_N(s, \sigma) \Phi(\sigma, s) d\sigma$$

(3.5) より $\Phi(t, s)$ は次の積分方程式を満たさねばならない.

$$(3.6) \quad R_N(t, s) + \Phi(t, s) + \int_s^t R_N(t, \sigma) \Phi(\sigma, s) d\sigma = 0$$

$$\Phi_1(t, s) = -R_N(t, s),$$

$j \geq 2$ に就いて.

$$\begin{aligned}\bar{\Phi}_j(t, s) &= \int_s^t \bar{\Phi}_1(t, \sigma) \bar{\Phi}_{j-1}(\sigma, s) d\sigma \\ &= \int_s^t \int_s^{s_1} \cdots \int_s^{s_{j-2}} \bar{\Phi}_1(t, s) \bar{\Phi}_1(s_1, s_2) \bar{\Phi}_1(s_2, s_3) \cdots \bar{\Phi}_1(s_{j-1}, s) ds_{j-1} \cdots ds_2\end{aligned}$$

とおくと, その表式 $\varphi_j(t, s; \chi, \xi)$ に対し次の補題を得る.

補題 4. N を $m-(p-\delta)N \leq 0$ を満たす自然数とすると, 任意の α, β に対して $A_{\alpha, \beta}$ が存在して

$$|\varphi_j^{(\alpha)}(t, s; \chi, \xi)| \leq (A_{\alpha, \beta})^j \frac{(t-s)^{j-1}}{(j-1)!} \langle \xi \rangle^{m-(p-\delta)N - p|\alpha| + \delta|\beta|}$$

が成り立つ. 但し $A_{\alpha, \beta}$ は j に independent な定数.

補題により $\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(t, s) = \varphi(t, s) \in W - \Sigma_{t, s}^0(S_{p, \delta}^{m-(p-\delta)N})$ が求められ, (3.6) を満足する. $f_N(t, s) = \int_s^t k_N(t, \sigma) \circ \varphi(\sigma, s) d\sigma$ 及び (2.4) を満たす事は $k_N(t, s) \in W - \Sigma_{t, s}^0(S_{p, \delta}^0)$ より明らか.

以下, 補題 4. の証明をする.

Kumano-go and Taniguchi [4] による oscillatory integral を使うと, まづ $\varphi_j(t, s)$ について

$$\varphi_j(t, s; \chi, \xi) = \int_s^t \int_s^{s_1} \cdots \int_s^{s_{j-2}} ds_{j-1} \cdots ds_1 \left| O_s - \int \cdots \int e^{-i \sum_{\ell=1}^{j-1} \ell \cdot y_\ell} dy_\ell \right|$$

$$\times \varphi_1(t, s; x, \xi + \eta_1) \prod_{k=1}^{j-2} \varphi_1(s_k, s_{k+1}; x + \sum_{l=1}^k y_l, \xi + \eta_{k+1}) \\ \times \varphi_1(s_{j-1}, s; x + \sum_{l=1}^{j-1} y_l, \xi) dy_1 d\eta_1 \cdots dy_{j-1} d\eta_{j-1} \Big\}$$

と書ける. ($dy = (2\pi)^n dy$)

$n_0 > n/2$ を固定して

$$e^{-iy_k \cdot \eta_k} = (1 + \langle \xi + \eta_k \rangle^{2\delta n_0} |y_k|^{2n_0})^{-1} (1 + \langle \xi + \eta_k \rangle^{2\delta n_0} (-\Delta \eta_k)^{n_0}) e^{-iy_k \cdot \eta_k}$$

として部分積分と変数変換 $z_k = \sum_{l=1}^k y_l$ ($1 \leq k \leq j-1$) とすると

$$(3.7) \quad \varphi_j(t, s; x, \xi) = \int_s^t \int_s^{s_1} \cdots \int_s^{s_{j-2}} ds_{j-1} \cdots ds_1 \left\{ O_s - \int \cdots \int e^{-i \sum_{l=1}^{j-1} z_l (\eta_l - \eta_{l+1})} \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^{j-1} \Gamma_k(z_{k-1}, z_k, \eta_k) dz_1 d\eta_1 \cdots dz_{j-1} d\eta_{j-1} \right\}.$$

$$\text{但し, } \Gamma_k(z_{k-1}, z_k, \eta_k) = \Gamma(s_{k-1}, s_k; x, \xi; z_{k-1}, z_k, \eta_k)$$

$$= [1 + \langle \xi + \eta_k \rangle^{2\delta n_0} (-\Delta \eta_k)^{n_0}] (1 + \langle \xi + \eta_k \rangle^{2\delta n_0} |z_k - z_{k-1}|^{2n_0})^{-1}$$

$$\times \varphi_1(s_{k-1}, s_k; x + z_{k-1}, \xi + \eta_k), \quad (1 \leq k \leq j-1)$$

$s_0 = t, s_j = s, z_0 = 0, \eta_j = 0$ とする.

$\varphi_1 \in W - \mathcal{E}_{t,s}^0(S_{s,\delta}^{m-(p-\delta)N})$ と η , $\eta \in \mathbb{R}^n$ の α, β, γ に対し

$$(3.8) \quad \left| \partial_{z_{k-1}}^\alpha \partial_{z_k}^\beta \partial_{\eta_k}^\gamma \Gamma_k(z_{k-1}, z_k, \eta_k) \right| \leq C_{\alpha, \beta, \gamma}' \langle \xi + \eta_k \rangle^{m-(p-\delta)N + \delta|\alpha| + \beta|} \\ \times (1 + \langle \xi + \eta_k \rangle^{2\delta n_0} |z_k - z_{k-1}|^{2n_0})^{-1}$$

が成り立つ。

(3.7) より 補題の証明については、任意の l について

$$(3.9) \quad \left| O_s - \iint \cdots \int e^{-i \sum_{k=1}^{l-1} z_k (\eta_k - \eta_{k+1})} \prod_{k=1}^{l-1} \Gamma_k(z_{k-1}, z_k, \eta_k) dz_1 \cdots d\eta_{l-1} \right| \\ \leq (A_0)^l \langle \xi + \eta_l \rangle^{m-(p-\delta)N}$$

を示せば十分

$C_0 > 0$ が存在して

$$|\eta_1 - \eta_2| \leq C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle \quad \text{ならば} \quad \frac{1}{2} \langle \xi + \eta_1 \rangle \leq \langle \xi + \eta_2 \rangle \leq 2 \langle \xi + \eta_1 \rangle$$

$$|\eta_1 - \eta_2| \geq C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle \quad \text{ならば} \quad \langle \xi + \eta_1 \rangle \leq C_1 |\eta_1 - \eta_2|$$

が成り立つ事に注意する。

まず $l=2$ の時に (3.9) を示す。 η_1 に関する積分を次の 3 つに分ける; $I_1 = \{\eta_1; |\eta_1 - \eta_2| \leq C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle^\delta\}$,

$$I_2 = \{\eta_1; C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle^\delta \leq |\eta_1 - \eta_2| \leq C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle\}, \quad I_3 = \{\eta_1; |\eta_1 - \eta_2| > C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle\}$$

$$(3.8) \text{ より} \quad \iint_{\eta_1 \in I_1} |\Gamma_1(z_0, z_1, \eta_1)| dz_1 d\eta_1 \leq C \langle \xi + \eta_2 \rangle^{m-(p-\delta)N}$$

I_2 の部分は $-2M+n < 0$ なる整数 M を選んで, 部分積分をする
と

$$\left| \iint_{C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle \geq |\eta_1 - \eta_2| \geq C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle^\delta} e^{-i z_1 (\eta_1 - \eta_2)} |\eta_1 - \eta_2|^{-2M} (-\Delta_{z_1})^M \Gamma_1(z_0, z_1, \eta_1) dz_1 d\eta_1 \right|$$

$$\leq C \langle \xi + \eta_2 \rangle^{m-(p-\delta)N}$$

I_3 は $(2M-n)(1-\delta) > m-(p-\delta)N$ なる整数 M を選べば, I_2 の
場合と同様.

$$\left| \iint_{\eta_2 \in I_3} e^{-i z_1 (\eta_1 - \eta_2)} |\eta_1 - \eta_2|^{-2M} (-\Delta_{z_1})^M \Gamma_1(z_0, z_1, \eta_1) dz_1 d\eta_1 \right|$$

$$\leq C \int_{|\eta_1 - \eta_2| \geq C_0 \langle \xi + \eta_2 \rangle} |\eta_1 - \eta_2|^{-2M} \langle \xi + \eta_1 \rangle^{m-(p-\delta)N+2\delta M-n\delta} d\eta_1$$

$$\leq C \langle \xi + \eta_2 \rangle^{m-(p-\delta)N}$$

ここで C は $|\eta|_{m-(p-\delta)N, M}$ による定数である事に注意する.

$l \geq 3$ についても, 同様に η_k ($1 \leq k \leq l-1$) の積分を

$$I_1^R = \{\eta_k; |\eta_k - \eta_{k+1}| \leq C_0 \langle \xi + \eta_k \rangle^\delta\}, \quad I_2^R = \{\eta_k; C_0 \langle \xi + \eta_k \rangle^\delta \leq |\eta_k - \eta_{k+1}|$$

$$\leq C_0 \langle \xi + \eta_k \rangle\}, \quad I_3^R = \{\eta_k; |\eta_k - \eta_{k+1}| \geq C_0 \langle \xi + \eta_k \rangle\}$$

と分けて評価すればよい.

$\varphi_{f^{(a)}}^{(a)}(t, s; x, \xi)$ についても $\varphi_f(t, s; x, \xi)$ と同様にすればよい.

文 献

- [1] Calderón A. and Vaillancourt R. : On the boundedness of pseudo-differential operators, J. Math. Soc. Japan, 23 (1971), 374-378.
- [2] Hörmander L. : Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations, Singular Integrals, Proc. Symposia Pure Math., 10, (1967), 138-183.
- [3] Kumano-go H. and Nagase M. : L_p -theory of pseudo-differential operators; Proc. Japan Acad., 46, (1970), 138-142.
- [4] Kumano-go H. and Taniguchi K. : Oscillatory integrals of symbols of pseudo-differential operators on $\mathbb{R}^n$ and operator of Fredholm type, Proc. Japan Acad., 49, (1973), 397-402.
- [5] Kumano-go H. and Tautsumi C. : Complex powers of hypoelliptic pseudo-differential operators with applications, Osaka J. Math., 10, (1973), 147-174.
- [6] Kumano-go H. : Pseudo-differential operators of multiple symbol and the Calderón-Vaillancourt theorem (to appear).
- [7] Matsuzawa T. : On some degenerate parabolic equations II (to appear).
- [8] Mizohata S. : Hypoellipticité des équation paraboliques, Bull. Soc. Math. France, 85, (1957), 15-50.

- [9] Nagase M. and Shinkai K.: Complex powers of non-elliptic operators, Proc. Japan Acad., 46, (1970), 779-783.
- [10] Shinkai K.: On symbols of fundamental solutions of parabolic system (to appear).
- [11] Tsutsumi C.: The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudo-differential operator, Proc. Japan Acad., 50, (1974), 11-15.