

「ゲージ場理論 — ${}^3\text{He-B}$ での Collective Mode」*)

東大教養 伊豆山 健 夫

量子流体では物質場の位相が第一義的役割を果たしている。その空間的変化は「超流動速度場」を与えるが、これを「ゲージ場」と呼んでいる。

今、 $\phi(x)$ ($x = (\vec{x}, t)$) を実験室系における量子化波動関数とする。速度 $\vec{A}/m$ で動いている座標系でみた量子化波動関数を $\phi(x)$ とすると、 $\phi(x) = \exp(i \vec{A} \cdot \vec{x}/m) \phi(x)$ である。時空の各点で $\vec{A}(x)/m$ で動いている座標系に乗ってみると、 $\phi(x) = \mathcal{R} \cdot \phi(x)$ 、但し $\mathcal{R}^\dagger \mathcal{R} = 1$ でかつ $\mathcal{R}^\dagger \frac{1}{i} \partial_\nu \mathcal{R} = A_\nu$ である。但し $\nu = 0, x, y$ or z 。 ϕ に一価性を要求すると $\mathcal{R}$ も一価で、

$$\partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda = 0 \quad \text{except on L. S.}$$

但し L. S. は線状 singularity で (point singularity や localized lump も含ませられる)、そこでは右辺が δ -関数型でその係数は $2\pi \times [\text{整数}]$ である。特に、時空にまたがって $\partial_0 A_j - \partial_j A_0$ を考えるとき、そのような singularity は「津波」とでも呼ぶべきもので、そのようなものが、力学的に存在可能とは考えられないので、

$$\partial_0 A_j = \partial_j A_0 \quad (j = x, y, z)$$

更に $A_0 = -\mu$ (μ は化学ポテンシャル) なので $\dot{A}_j = -\partial_j \mu$ 。

フーリエ変換して $\dot{A}_j[\vec{k}] = -i k_j \mu[\vec{k}]$

また $\mu[\vec{k}] = \delta \mathcal{H} / \delta \rho[-\vec{k}]$ 。

ここにハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \int \left\{ \frac{1}{2m} (\partial_j \phi^\dagger) (\partial_j \phi) - J_j A_j + \frac{\rho}{2m} A_j A_j \right\} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} V(k) \rho[\vec{k}] \cdot \rho[-\vec{k}]$$

IZUYAMA Takeo

*) これは 1979 年 7 月 12 日の物性研での研究会で発表したものである。

伊豆山健夫

であるから $\mu[\vec{k}] = V(k) \rho[\vec{k}]$ 。

斥力 $V(k) > 0$ の場合を考える。また上で

$$J_j \equiv \frac{1}{2im} \{ \phi^\dagger \partial_j \phi - (\partial_j \phi^\dagger) \phi \}$$

非量子液体では $\vec{J} \cdot \vec{A}$ は無視できて (RPA), ハミルトニアン of ゲージ場依存部分は

$$\Delta \mathcal{H} = \frac{\rho}{2m} \sum_{\vec{k}} \vec{A}[\vec{k}] \cdot \vec{A}[-\vec{k}] + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{V(k)} \mu[\vec{k}] \cdot \mu[-\vec{k}]$$

となる。ここで $\vec{A}[\vec{k}] \equiv \vec{k} (V(k))^{1/2} Q_{\vec{k}}$ とおくと

$$\Delta \mathcal{H} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \left\{ \frac{k^2 V(k) \rho}{m} Q_{\vec{k}} Q_{-\vec{k}} + \dot{Q}_{\vec{k}} \dot{Q}_{-\vec{k}} \right\}$$

従って分散 $\omega_k = \left(\frac{V(k) \rho}{m} \right)^{1/2} k$ のゼロ音波が得られる。

以上を拡張して, $U(1) \times SO(3)$ の対称性をもつ量子流体 ($^3\text{He B}$) を考える。変換 $\phi = \mathcal{R} \cdot \phi$ は

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ \phi_\downarrow \end{pmatrix} \quad \text{も} \quad \phi = \begin{pmatrix} \phi_\uparrow \\ \phi_\downarrow \end{pmatrix}$$

もスピンをもつので, $\mathcal{R}$ は 2×2 マトリクスである。

$\mathcal{R}^\dagger \mathcal{R} = 1$ とし, また ϕ の一価性, 従ってまた $\mathcal{R}$ の一価性が要求される。 ϕ で書いたオーダ・パラメータが BW 型

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} Y_{1,-1}(\hat{k}) & Y_{1,0}(\hat{k}) \\ Y_{1,0}(\hat{k}) & \sqrt{2} Y_{1,1}(\hat{k}) \end{pmatrix}$$

となるようにする。実験室系でみるとスピン量子化軸は時空でゆらいでいて, ϕ で書くと, オーダ・パラメータはこのようなにならない。

ゲージ場 A_α^ν ($\nu = 0, x, y, z; \alpha = 0, x, y, z$) は次のように定義される。

$$i A_\alpha^\nu \sigma_\alpha = \mathcal{R}^\dagger \partial_\nu \mathcal{R}$$

但し $\sigma_0 = 1$ で, $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は Pauli スピン行列。 $\mathcal{R}$ のユニタリー性から

$$-i A_\alpha^\nu \sigma_\alpha = (\partial_\nu \mathcal{R}^\dagger) \mathcal{R}$$

は明らか。 A_0^ν を A^ν と書く。これらから

$$F^{\lambda\nu} \equiv \partial_\lambda A^\nu - \partial_\nu A^\lambda$$

$$F_a^{\lambda\nu} \equiv \partial_\lambda A_a^\nu - \partial_\nu A_a^\lambda + \varepsilon_{abc} (A_b^\lambda A_c^\nu - A_b^\nu A_c^\lambda)$$

を定義する。($a = x, y, z$: ε_{abc} は完全反対称) Kinematical Condition は

$$F_a^{\lambda\nu} = 0 \quad \text{except on L. S.}$$

($\alpha = 0, x, y, z$) となる。分配関数を求めるとき、この Kinematical Condition が充たされるような sub-space で A_α^ν の積分は遂行される。しかし、この Kinematical condition は、Topological 線状 charge を導入することにより、追放することもできる。このようにすれば、ゲージ場は、一人歩き始めるわけであるが、vortices の存在が、熱力学に重要な効果をもつときにのみ、このような定式化も有効となるだろう。ここでは、ゲージ場 A_α^ν が、量子液体のダイナミクスに如何に登場するか、と言うテーマにしぼる。

$$A^\nu \equiv A_0^\nu, \quad \mathbf{A}^\nu \equiv (A_x^\nu, A_y^\nu, A_z^\nu)$$

は、次の Kinematical condition をみtas。

$$\partial_0 A^j = \partial_j A^0, \quad (1)$$

$$\partial_0 \mathbf{A}^j = \partial_j \mathbf{A}^0 + \mathbf{A}^j \times \mathbf{A}^0 \quad (2)$$

ただし

$$A^0[\vec{k}] = -\delta\mathcal{H}/\delta\rho[-\vec{k}], \quad A_a^0[\vec{k}] = -\delta\mathcal{H}/\delta s_a[-\vec{k}] \quad (s_a = \phi^\dagger \sigma \phi)$$

Number current

$$\mathcal{J}^j \equiv \frac{1}{2im} [\phi^\dagger \partial_j \phi - (\partial_j \phi^\dagger) \phi]$$

Spin current

$$\mathcal{J}_{(\text{spin})}^j \equiv \frac{1}{2im} [\phi^\dagger \sigma \partial_j \phi - (\partial_j \phi^\dagger) \sigma \phi]$$

は、それぞれ

伊豆山健夫

$$\mathcal{J}^j = J^j + \frac{\rho}{m} A^j \quad (3)$$

$$\mathcal{J}_{(\text{spin})}^j = \bar{J}^j + \frac{\rho}{m} \bar{A}^j \quad (4)$$

となる。但し

$$\bar{J}^j = \frac{1}{2im} [\phi^\dagger \bar{\sigma} \partial_j \phi - (\partial_j \phi^\dagger) \bar{\sigma} \phi]$$

で $\bar{\sigma} \equiv \mathcal{R}^\dagger \sigma \mathcal{R}$ は、スピン・ベクトル σ を、 ϕ のスピン量子化座標系に投影したものである。 $\bar{A}^j$ はゲージ場 A^j を、この座標系に投影したものである。

ハミルトニアンは、B.W. のハミルトニアン中、 ϕ のかわりに ϕ を代入したものを $\mathcal{H}_{\text{BW}}[\phi]$ と書くと、

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \mathcal{H}_{\text{BW}}[\phi] + \int \{ J^j A^j + \bar{J}_a^j \bar{A}_a^j + \frac{1}{2m} \rho A^j A^j + \frac{1}{2m} \rho \bar{A}_a^j \bar{A}_a^j + \frac{1}{m} \bar{s}_a^j \bar{A}_a^j A^j \} \\ + \frac{1}{2} K^{-1} \sum_k \rho[k] \rho[-k] + \frac{1}{2} \chi^{-1} \sum_k \bar{s}_a[k] \cdot \bar{s}_a[-k] \end{aligned}$$

ここに K , χ はそれぞれ静的 compressibility および帯磁率である。また $s_a(x) \equiv \phi^\dagger(x) \sigma_a \phi(x)$ 。

連続の式は

$$\partial_0 \rho = -\partial_j \mathcal{J}^j \quad (5)$$

$$\partial_0 \tilde{\mathbf{s}} = -\partial_j \mathcal{J}_{(\text{spin})}^j \quad (6)$$

ただし $\tilde{\mathbf{s}} \equiv \phi^\dagger \boldsymbol{\sigma} \phi$ 。

(1),(3),(5)から第四音波を導く。(3)において J^j は、ハミルトニアン中の $J^j \cdot A^j$ を通じ、 A^j に依存する。 A^j について線型化近似をとると

$$J^j[\vec{q}, \omega] = K^{ji}(q, \omega) A^i[\vec{q}, \omega]$$

$$K^{ji}(\vec{q}, \omega) = 2 \langle J^j[\vec{q}] \frac{\mathcal{H}_{\text{BW}}[\phi]^\times}{(\mathcal{H}_{\text{BW}}[\phi]^\times)^2 - \omega^2} J^i[\vec{q}] \rangle_\phi$$

ただし $\langle \dots \rangle_\phi$ は $\mathcal{H}_{\text{BW}}[\phi]$ による grand canonical average をとれ、 $\times$ 印は、後続オペレータと交換子をとれということ。B相では $\mathcal{H}_{\text{BW}}[\phi]^\times$ にギャップがあるので、 $\omega \rightarrow 0$, $q \rightarrow 0$ をとることができる

$$K^{ji} = 2 \langle J^j \frac{1}{\mathcal{M}_{\text{BW}}[\phi]} J^i \rangle_\phi \quad (8)$$

$J^j \equiv \sum_{\vec{k}, \sigma} \frac{k_j}{m} a_{k\sigma}^\dagger a_{k\sigma}$, ただし $a_{k\sigma}$ は ϕ を展開したもの。従って(3)は

$$\mathcal{J}^j = \frac{\rho}{m} (\delta_{ji} - m K_{ji}) A^i \equiv \rho_{ji}^{(s)} A^i \quad (9)$$

(8)で $a_{k\sigma} = \sum_\tau (u_{\sigma\tau}(k) \alpha_{k\tau} + v_{\sigma\tau}(k) \alpha_{-k\tau}^\dagger)$ を用い, α について対角化されていることと, u, v には BW の解を用いると $\rho_{ji}^{(s)} = \rho^{(s)} \delta_{ji}$ 。ただし

$$\rho^{(s)} = (\rho/m) Y(T) \quad (Y \text{ は Yosida 関数})$$

となる。superfluid 成分の運動にのみ着目しているので(5)において ρ は $\rho^{(s)}$ に等しい。これと(1),(9) とから第四音波が, well-defined mode で, 分散 $\omega_q = (\rho^{(s)}/mK)^{1/2} q$ が導びかれる。

スピン波についても同じ手法が適用される。(4)より

$$\mathcal{J}_a^j = D_{ab}^{ji} \bar{A}_b^i \quad (10)$$

$$D_{ab}^{ji} = \frac{\rho}{m} (\delta_{ji} \delta_{ab} - m \Gamma_{ab}^{ji})$$

$$\Gamma_{ab}^{ji} = 2 \langle \bar{J}_a^j \frac{1}{\mathcal{M}[\phi]} \bar{J}_b^i \rangle_\phi$$

が $q, \omega \rightarrow 0$ の極限で導びかれる。

j - 座標系の軸の選び方を a - 座標系に揃えると

$$D_{ab}^{ji} = \frac{\rho}{m} \left[\delta_{ji} \delta_{ab} - \frac{1}{5} (\delta_{ab} \delta_{ji} + \delta_{ja} \delta_{ib} + \delta_{jb} \delta_{ia}) \right] \cdot (1 - Y(T))$$

が得られる。線型近似のもとで, (2)は

$$\partial_0 \mathbf{A}^j = \chi \partial_j \mathbf{s}$$

(6)は $\partial_0 \mathbf{s} = -\partial_j \mathcal{J}_{(\text{spin})}^j$ であるからこれに(10)を用いて, よく知られたB相のSpin波およびその分散が導かれる。

以上において, 我々のゲージ場は, 直接 ϕ を変換して行くプロセスに現れるものであ

伊豆山健夫

って、オーダ・パラメータの変換において得られるダイアディック $\mathcal{Q}_a^j$ と結局は同じものではあるが、より直載的であり、ハミルトニアンを基礎にもつ意味において、非線型項まで取り入れようと言うとき、見落しなく計算が遂行できる。

二流体力学は、相互作用 $\vec{J} \cdot \vec{A}$, $\vec{J} \cdot \vec{A}$ から高次のプロセス (Gaussian) を通じて導びかれるものであって、ゲージ対称性が、見通しをよくしてくれる筈である。

Homotopy 解析は従来のを未だ出していない。何より、A相では、まず流体力学を整理しなければならない。