

多オートマトン系における definiteness の問題

京大 理学部 西尾 英之助

§① はじめに

多オートマトン (polyautomaton) は, 同一の有限オートマトンを多数個結合した一組の (有限) オートマトンである。ここでは, 多オートマトンを順に生成する規則を考え, その規則に従って生成された多オートマトンの列について, 例えば definiteness のような性質が, ある番号以降すべてについて成立つか否か, あるいはある番号で初めて成立つようなことが起るか否か, などの問題を扱う。

その動機として, (i) セル構造オートマトン理論の拡張, と (ii) 神経系の個体発生や系統発生モデルづくりとがある。後者については少し説明が必要だと思われる: 神経系の発生の機構は未だ十分に解明されていないが, 基本素子であるニューロンが, つぎつぎとシナプス結合をして, 特定の神経回路網が完成する。この時, 結合したニューロンは最早細胞

分裂はしないと云われている。各神経系は固有の機能や性質を持っているが、発生の初期から持っているのではなくて、ある発生段階に達して始めてそれらが現われてくる。発生の各段階に対応する多オートマトンを考え、生長の時間的経過に対して、多オートマトンの列を考える。従って、多オートマトンの列について、機能や性質の消長を論ずることによって、発生現象の一側面を知ることができる。

§II 多オートマトン系の定義

1.1 素子オートマトン (cell, a finite automaton)

$A = \langle Q, n, f \rangle$ で定義される。 ここで

Q ; 内部状態の有限集合, n ; 入カターミナル数, 各ターミナルには 1 から n の番号がっいていて、各時刻には入力として Q の元が入って来る。

$f: Q \times Q^n \rightarrow Q$ で、 A の状態遷移関数である。

cell の Q と f を問題にしないで、入カターミナル数 n のみを扱う場合には、" n -cell" と書く。

1.2 多オートマトン (polyautomaton, a connected set of cells)

まず、 n -cell を多数結合した net C_n を定義する:

$$C_n: N \times [n] \rightarrow N \cup X \cup \{0\}$$

ただし、 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, $N =$ 自然数の集合, $X =$ 外部

入力変数の集合 $\{x_i \mid i \in N\}$ である。

net C_n 中の cell k から, cell i のターミナル j へ結線されていければ, $C_n(i, j) = k$

とし, 外部入力 x_k が, cell i のターミナル j へ入っていければ, $C_n(i, j) = x_k$

とし, (i, j) ターミナルへは上記のいずれの線も入っていないときは $C_n(i, j) = 0$

とする。 $C_n(i, j) = 0$ のとき, (i, j) は "open" であるという。

C_n は $N \times [n]$ のすべての真について定義されているとは限らないが, $\forall j \in [n]$ について $C_n(i, j)$ が定義されているならば, その i については, $\forall j \in [n]$ で $C_n(i, j)$ が定義されていると仮定する。このとき n -cell i は " C_n の素子である" という。

C_n の素子の全体を (C_n) , その個数を $\#(C_n)$ と書く。

$B(C_n) = \{(i, j) \mid C_n(i, j) = 0\}$ を境界ターミナルの集合,

$X(C_n) = \{(i, j) \mid C_n(i, j) \in X\}$ を入力ターミナルの集合という。

C_n の全体を G_n と書き, n -net の全体という。

$A = \langle Q, n, f \rangle$ のとき, $M = \langle A, C_n \rangle, (C_n \in G_n)$ を (A から成る) オートマトンという。 M の cell の数は $\#(C_n)$ であり, 入力ターミナルは $X(C_n)$ である。

1.4 生長規則の制限

前節の生長規則の定義は広すぎるので、つぎのような制限を設けたものを扱う。

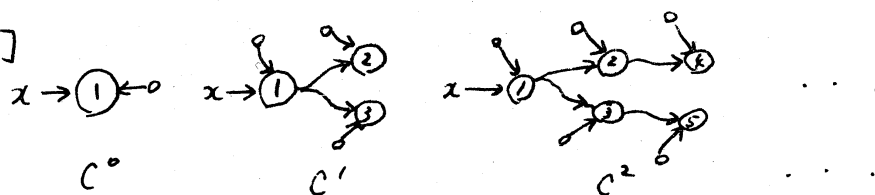
○単調増大型 (monotone growth) $m-G$ では g はつぎの条件を満たす;

$$(i) \quad (g(c)) \supset (c), \quad c \in C_n$$

$$(ii) \quad (\forall i, j, k \in N) (c(i, j) = k \Rightarrow g(c)(i, j) = k)$$

すなわち、一旦 net に含まれた cell は以降のすべての net に含まれる。また net 内の結線も消えることはない。

[$m-G_2$ の例]



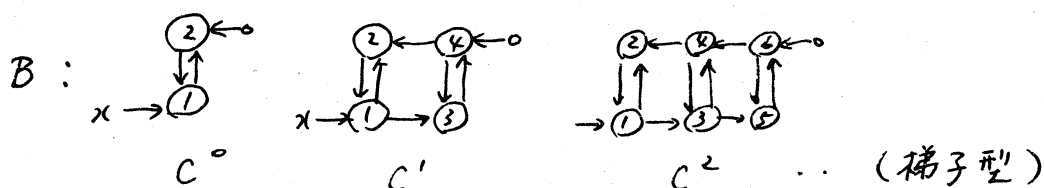
○内部生長型 (internal growth) $i-G$

(i) まず単調増大型であること,

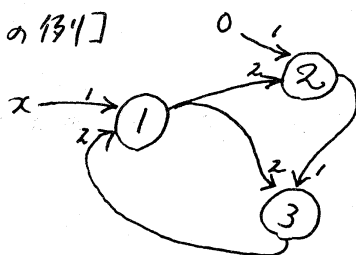
$$(ii) \quad c(i, j) = \lambda k \Leftrightarrow g(c)(i, j) = \lambda k$$

すなわち外部入力ターミナルは不変である。

[$i-G_2$ の例]



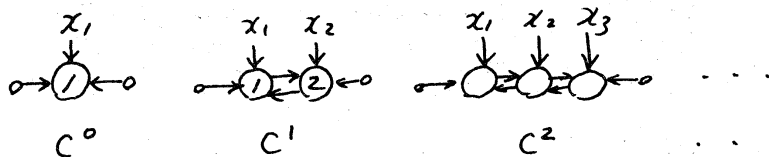
[2-net の例]

 $\tau = \pi + 1 \nu(1,1)$ が外部入力 x $\tau = \pi + 1 \nu(2,1)$ の "open"1.3 多オートマトン系(列) (growth process, series of nets)まず n -net の生長規則 $G_n = \langle g, c^0 \rangle$ を考えよ。 n : 素子として n -cell を用いることを示す。明らかなことは省略する。 $g: G_n \rightarrow G_n$ の写像であって, $g(c)$ は, 定義されているならば, それは c から何らかのアルゴリズムによって一意的に定まるものとする。 $c^0: G_n$ の元で a priori に与えられる。 G_n によって生成される net の系列 $S(G_n)$

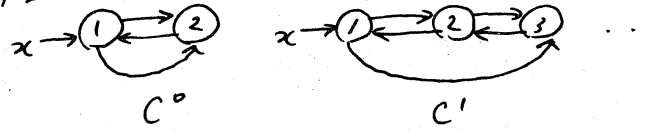
$$g(c^0) = c^1, \quad g(c^i) = c^{i+1} \quad (i=1, 2, \dots) \quad \text{として,}$$

 $S(G_n) = (c^0, c^1, c^2, \dots)$ を G_n によって生成される net の系列という。 G_n と A によって生成される多オートマトン系列 $S(G_n, A)$ は, $S(G_n)$ の各 net c^i を多オートマトン $\langle A, c^i \rangle = M^i$ でおきかえたものである。[$S(G_3)$] の例

(m-G でもあり)



[$m-G$ でない例]



§2 多オートマトン系について論ずるテーマ

小柴, 西尾(1970) は一次元セル構造オートマトンの研究の一つとして, 丁度前節の [$i-G_2$ の例 A] (一次元 array) の場合について, $Q = \{0, 1\}$ とし, $open \rightarrow \oplus$ に定数 1 を入れたとき, 一般に (f によらないで) C^i が強連結でないならば, C^{i+1} も強連結ではない事を示した。従って, (f に依存して) ある n があって, C^{i+n} が初めて強連結でなくなるもので, この n を f の強連結性の標数と呼んだ。すべての C^i について強連結のときは, $n = \infty$ と定義した。同様に, 弱連結性, 到達可能性, 可制御性などの標数も定義された。

また西尾, 小柴(1969) は, 有限長の一次元 array において, 一端から他端への情報伝達を定義し, cell, とくに f が, その情報伝達能力の点から, (I) 初期状態によらず, ある有限長の array ならば情報が伝わる, より長い場合は伝わり^ない, (II) 初期状態によらず, いくつでも長い array において情報が伝わる, (III) 初期状態に依存して, 情報伝達能力が変わる, という3種に類別できることを示した。とくに (I) の類の cell については, 情報伝達の長さの限界が存在するわけ

である。

以上のような結果を考慮して、 τ の定義をする。

○究極的に安定な性質: ある性質, あるいは命題 (net についての) P があり, ある $S(G_n, A)$ において, $(\exists k)(\forall i \geq k)(P(M^i) = \text{true})$ のとき, P は (G_n, A) において究極的に安定であるという。そのような k の最小のものを P の安定性の標数という。

ある cell のクラス $\tilde{A}$ のすべての cell について, P が究極的に安定ならば, P は $(G_n, \tilde{A})$ において究極的に安定であるという。

そこで, 問題として, 如何なる P のどのような $(G_n, \tilde{A})$ について究極的に安定なのか? を考える。また特定の P を定めておいて, どのような $(G_n, \tilde{A})$ になるかを問う。また A を例えば: McCulloch-Pitts = ユーロ, として, 固定しておいて, P と G_n の関係を調べるのも興味あるテーマである。

§3 Definiteness

ここで P の具体例として, definiteness を取上げる。その動機は, 実際の神経系は, 短時間記憶のニューロンを素子としてより長い記憶を実現しているか。依然として有限時間記憶の net であると考えにかかっている。

3.1 Definiteness の定義と基本的事項

- 有限オートマトン M の最終状態が入力系列の最近の k 時間の部分によって一意的に決まり、 $k-1$ 時間の部分ではそうではないとき、 M は definite であり、その order は k であるという。そのような k が存在しないとき、 M は indefinite である。
- 任意の有限オートマトンの definiteness とその order を決めるアルゴリズムが存在する。
- オートマトンが definite であるならば、強連結部分は一つである。
- $x_1, x_2, \dots, x_n$ を入力ターミナル変数とするオートマトン A を $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ と書く。 A が $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ について definite のとき、 A は (totally) definite という。変数のいくつかを定数に固定して得られるオートマトンが definite のとき、 A は (partially) definite という。ある変数 x_i 以外の変数を定数にしたオートマトンが、この定数のとり方に無関係に definite であるとき、 A は x_i について (totally) definite であるという。すなわち、つぎの命題が成立する。

$\exists i, x_i$ について A が definite ならば、 A は totally definite である。その order は $A(x_i)$ のそれと等しい。(証明略)

3.2 $A = \langle \{0,1\}, z, f \rangle$, $G_2 =$ 一次元 array の場合.

cell として、2 入力、2 状態のオートマトンを用いる一次

元状の net の列について, definiteness が 安定の否かを調べる。

f を表現するのには, $\begin{array}{c|cc} & x_2 & \\ \hline & 0 & 1 \\ x_1 & 0 & a \\ & 1 & b \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} & 1 & 0 & 1 \\ \hline & 0 & e & g \\ & 1 & f & h \end{array} \quad (a, b, \dots = 0 \text{ or } 1) \text{ の}$
 ような表を用いることがある。この意味は, 例之は: 状態
 $a \rightarrow 02$: $\tau \rightarrow 3+1$ $x_1=1$, $\tau \rightarrow 3+1$ $x_2=0$ ならば, 状態
 $b \rightarrow$ 遷移する。このことを $f(0, 1, 0) = b$ と書く。

さて, ここで, 得られた主な結果を示そう。

[定理] 一次元状の net の列について, definiteness は完
 極的に安定ではない。

[証明] はつぎの命題による。

[命題] $f_{\oplus}(x, x_1, x_2) = x_1 \oplus x_2 \text{ (mod. 2 の加算)}$ とする

cell $A = \langle \{0, 1\}, 2, f_{\oplus} \rangle$ を用いる場合, (この order は i)

(i) $i = 2^k - 1$ ($k=1, 2, \dots$) となる M^i は definite であり,

(ii) $i = 2^k$ ($k=1, 2, \dots$) となる M^i は indefinite である。

G_2 として open terminal から入れ子定数を 0, 1 ずつ小に
 送んでもよい。また (内部成長型ではないか) 両端から
 外部入力を入れた net を考えても結果は同じである。

[証明]

まず (i) を証明するが, 両端から外部入力系列 $a_0 a_1 \dots a_t \dots$ およ
 び $b_0 b_1 \dots b_t \dots$ が入る場合を考えよう。

M^i ($i=2^k-1$) の初期様相を $\alpha^0 = \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i$ ($\alpha = 0$ or 1) とす
 の変数
 る。時刻 $t=1$ の様相は $\alpha^1 = \alpha_0 \oplus \alpha_2, \alpha_1 \oplus \alpha_3, \dots, \alpha_{i-2} \oplus \alpha_i, \alpha_{i-1} \oplus b_0$
 となる。一般に時刻 t における、各セルの状態は、 $\alpha_1, \dots, \alpha_i$
 の線型結合 ($\oplus$ の意味で) と外部入力 $a_0 \sim a_{t-1}, b_0 \sim b_{t-1}$ の
 線型結合部分の和 $\oplus$ で表現される。時刻 $t=k$ ですべての
 cell の状態 $\alpha_1 \sim \alpha_i$ の項を含まなくすれば、 M^i は definite
 (order k) である。初期様相の情報が11すれかの cell の中
 に永久に残るすれば、 M^i は indefinite である。

さて $f_{\oplus}$ の線型性から、外部入力系列として $000\dots$ を考
 えたとし、 $11\dots$ となるかわかる。初期様相の情報 $\alpha_1 \sim \alpha_i$ か
 $f_{\oplus}$ のもとで時間的に変化する様子を見るために、つぎのよう
 な線型変換行列を用いる。[小測定の示唆による]。

$$T_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{i \times i}$$

ただし T_i の元は $\{0, 1, \oplus\}$
 の元だと考える。

時刻 t の様相を α^t ($t=0, 1, 2, \dots$) とすると、

$$\alpha^{t+1} = \alpha^t T_i$$

従って

$$\alpha^t = \alpha^0 T_i^t$$

いま $f_i(\lambda) = |T_i - \lambda E|$, (ただし E は単位行列、 $| \cdot |$ は
 行列式) を定義する。

すると $f_i(\lambda) = -\lambda^i$ が成立つ。($i = 2^k - 1, k = 2, 3, \dots$)

なぜなら, (i) $i = 3 = 2^2 - 1$ のときは手計算で $f_3(\lambda) = -\lambda^3$ となる。

(ii) $i = 2^s - 1$ のとき $f_i(\lambda) = -\lambda^i$ が成立つたとする。

$$\text{すなわち } f_{2^{s+1}-1}(\lambda) = -\lambda (f_{2^s-1}(\lambda))^2 - 2 f_{2^s-2}(\lambda) \cdot f_{2^s-1}(\lambda)$$

(これは 2^s 行の 3 要素について小行列展開) する=とによって得られる。

いま④で演算しているから、右辺の 2 項は消える、

$$\text{従って、 } f_{2^{s+1}-1}(\lambda) = -\lambda \cdot (-\lambda^{2^s-1})^2 = -\lambda^{2^{s+1}-1}。$$

帰納法が完成した。

他方、Cayley-Hamilton の定理により

$$f_i(T_i) = [T_i - T_i E] = \mathbf{0} \quad (\text{ゼロ行列})$$

$$f_i(\lambda) = -\lambda^i \quad \text{から}$$

$$f_i(T_i) = -T_i^i$$

すなわち

$$T_i^i = \mathbf{0} \quad (i = 2^k - 1, k = 2, 3, \dots)。$$

$$\text{従って } \mathbf{x}^i = \mathbf{x}^0 T_i^i = \mathbf{0} \quad (\text{ゼロベクトル})。$$

すなわち初期状態にかかわらず、 $t = i$ において M^i の状態は外部入力 $a_0 \sim a_{i-1}$, $b_0 \sim b_{i-1}$ のみによって決まる。

以上で order は i 以下であることがわかった。丁度 i であることも証明するに、

$\exists \alpha^0 \mid \alpha^0 T_i^{i-1} \neq 0$ であることを示す。

実際 $\alpha^0 = (\alpha, 0, 0, \dots, 0)$ とすると

$$\alpha^0 T_i^{i-1} = (\alpha, 0, \alpha, 0, \dots, \alpha, 0) \neq 0 \text{ である。}$$

つまり命題の(ii)を証明する。

$i = 2^k$ とし、 $\alpha^0 = (\alpha, 0, 0, \dots, 0)_i$ とする。すると

$$\alpha^0 T_i^{i-2} = (\alpha, 0, \alpha, 0, \dots, \alpha, 0) \text{ となり、従って}$$

$$\alpha^0 T_i^{i-1} = (0, 0, 0, \dots, 0, \alpha) \equiv \alpha^*$$

T_i は左右対称だから、

$$\alpha^* T_i^{i-1} = (\alpha, 0, \dots, 0) = \alpha^0$$

すなわち $\alpha^0 T_i^{2i-2} = \alpha^0$ 。

α^0 が周期 $2i-2$ で繰返すから、cell 1 の状態 α_1 が永久に M^i の中に残ることはになり、 M^i が indefinite であることを示す。〔命題の証明終り〕

$f \oplus$ については、 $i = 2^k$ だけでなく、 $2^k - 1$ 以外のすべての i についても、 M^i が indefinite になると予想される。上の証明法から明らかに、 $f \oplus 1 = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$ についても同様の命題が成立つ。

④ その他の関数について： 2 状態 2 入カター 3 + 1 の cell は全体で 256 種ある。それらについて、definiteness の判定

性と調べた。 Kobuchi (1973) が強連結性や弱連結性の標数と全部求めたところから、その結果を参考にし、興味のある f について調べた。

関数の名前とその表の表記に於いて $abcdefgh$ と 2 進数として読んだ数で表わすことにする。 open terminal には "0" を入れる。

1) $f_{85} = \begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 \end{array}$ は shift register を形成するから、すべての i について M_i は definite (order i) である。

2) f_{86} : M^1 は definite, $M^i (i \geq 2)$ は indefinite.

[証明] 初期様相 $000 \dots 0 \equiv 0^i$ に入力 $000 \dots$ を入札すると常に 0^i に留まり続ける。 $0^{i-2}, 1$ に入札すると $0^{i-2}, 1$ に留まる。

3) f_{101} : M^1, M^3, M^7 は definite (order 1, 3, ...)
 M^2, M^4, M^6, M^8 は indefinite

これは計算機を用いて求めた結果である。*)

[予想] f_{101} について $M^i (i=2^k-1)$ は open terminal の 0 のとき、order i の definite である。

4) f_{105} : $M^2 = \text{definite}$ $M^i (i=1, 3, 4, 5, 6, 7) = \text{indefinite}^*)$

5) f_{106} : $M^i (1 \leq i \leq 7) = \text{indefinite}^*)$

*) FACOM U200 で小さな i については M^i の状態遷移表を求め、その definiteness を求めた。 $i \geq 5$ では全部計算機にやらせた。 東京電機大学の古東馨氏が東大の山田尚勇氏と共同開発された、HLISP

以上はすべて強連結性の標数 k の関数である。従って、
大抵 n に $\rightarrow \infty$ M^i がdefiniteになる可能性をもっている
が、indefinitenessのおかげで i の後、definiteになるとは予想
しにくい。計算結果から $\rightarrow \infty$ の予想が立つ。

{予想} 2次元, $2 \times k$ cellの一次元arrayに n 個ある。 M^i が
definiteの場合、そのorderは i である。(i はcell数)

[問題] netの型を変えてorderが素数より大抵、definite
netが存在するか?

§4 まとめ

多オートマトン系の理論の一つの方向を、生物学からの動
機によって定式化し、最も単純な場合を解いた。実際の神
経系の発生、生長のモデルを直接目標とするには、発生の機
構を積極的に取入れ、cellとして、ニューロンやニューロン群を
用いねばならない。また性質として、より生物学的意味のあ
るものを考える必要がある。

[文献] 小柴・西尾(1970): 通信学会研究資料 A69-62 (1970)

西尾・小柴.(1969): 連合大会予稿 3369-3370 (1969)

Kobuchi (1973): 京大・工. 学位論文

*
をベースにしたオートマトン処理プログラム集 STOP を FACOM
230-48 にかけて結果を出していただいた。f田の命題の予想
はこのような計算結果を利用して立てたものである。