

マルコフ過程を用いた動的幾何ソフトウェアについて (1)

明治大学 先端メディアサイエンス学科 阿原 一志
Kazushi Ahara, Frontier Media Science, Meiji University

1 はじめに

動的幾何ソフト (DGS) は、数学教育の分野で広く活用され、特に平面図形や立体図形を直感的かつ効果的に視覚化するためのツールとして注目されている。代表的な DGS の一つである GeoGebra[1] は、世界中で広く数学教育に応用されていることは既知の事実である。しかし、従来の DGS は幾何要素間の関係性が一方向的であって、これが教材作成の柔軟性の制約となったり、そもそも作図の困難さにつながったりすることもある。本稿では、この問題に取り組み、マルコフ過程を導入した双方向的な動的幾何学ソフトウェアのアーキテクチャをもとに実装されたソフトウェアである PointLine[2][3][4][5] にもとづき、PointLine に使用されているアルゴリズムの一部を公開し、その安定性についての議論を行う。

2 一般的な DGS における問題点

GeoGebra をはじめとする一般的な DGS では、たとえば三角形とその外接円を描画する場合、三角形から描き始めるか、それとも円から描き始めるかによって、ユーザーが操作できる自由要素の自由度が異なる。(図 1)

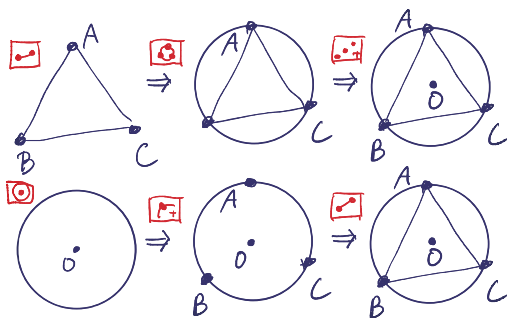


図 1: 一般 DGS による三角形と外接円の作図

図 1 の場合、上の列の作図では、最初に三角形 ABC を描画し、そののちに三点 A, B, C を通るような円を描画している。また下の列の作図では最初に円を描画し、円の上に三点 A, B, C を載せている。前者では、A, B, C の 3 つの点はそれぞれ 2 次元の自由度で動かせるが、円の中心を動かせる自由度はない。後者では、円は 3 次元の自由度 (中心

と半径)をもち、A,B,Cは円上のみを動けるということでそれぞれ1次元の自由度を持つ。自由度の総数は同じであるが、使用者からみた図の操作の自由度は異なる。

第2の問題点として、作図手順がわからない図は描画できないという問題がある。図2は三角形と円が互いに複雑に接しあっている図で、江戸時代の和算の問題の挿絵に類似の作図があることが知られている。筆者は寡聞にして、この図をGeoGebraで描画する方法を知らない。

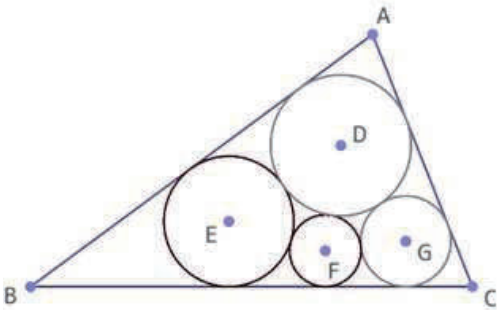


図 2: 和算の問題に類題がみられる作図

3 双方向的DGSとマルコフ過程

本章では、PointLineにおける代表的なモジュールに用いられているマルコフ過程について述べる。

3.1 「中点」モジュールの設計

中点モジュールでは、3点 A, B, C について、「点 C が線分 AB の中点である」状況を設定する。実際には次の条件を満たすようなマルコフ過程を用いることとする。以下では平面上の点 A を $A(\mathbf{a})$ と書いて、 A の位置ベクトルが $\mathbf{a}$ であることを意味するものとする。平面上の任意の3点 $A(\mathbf{a}), B(\mathbf{b}), C(\mathbf{c})$ に対して遷移関数 F_{MP} により次のステップの3点 $A'(\mathbf{a}'), B'(\mathbf{b}'), C'(\mathbf{c}')$ を決めるものとする。このことを $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}') = F_{MP}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ と書くことにする。このマルコフ過程は、以下の条件を満たすものとする。

(条件 I) 任意の平面上の3点 $A_0(\mathbf{a}_0), B_0(\mathbf{b}_0), C_0(\mathbf{c}_0)$ に対して、漸化式

$$(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{c}_{n+1}) = F_{MP}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$$

によって点 $A_n(\mathbf{a}_n), B_n(\mathbf{b}_n), C_n(\mathbf{c}_n)$ ($n = 0, 1, \dots$) を定めたとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, \mathbf{c}_n)$ は収束する。

(条件 II) 収束した点を $A_\infty(\mathbf{a}_\infty), B_\infty(\mathbf{b}_\infty), C_\infty(\mathbf{c}_\infty)$ とするとき、 C_∞ は $A_\infty B_\infty$ の中点である。

以上が数学的な要請であるが、DGSをコントロールするマルコフ過程であることを念頭に置くと、

(条件III) 互いに異なる $A_0(\mathbf{a}_0)$, $B_0(\mathbf{b}_0)$, $C_0(\mathbf{c}_0)$ に対して、 $A_\infty(\mathbf{a}_\infty)$, $B_\infty(\mathbf{b}_\infty)$, $C_\infty(\mathbf{c}_\infty)$ は互いに異なる。

といった要請も暗黙の裡に含まれるものとする。

このようなマルコフ過程は一意ではない。たとえば、遷移関数を線形写像であると仮定しても、以下の F_{MP} はその条件を満たす。

$$F_{\text{MP}}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = ((1 - t_1)\mathbf{a} + t_1(-\mathbf{b} + 2\mathbf{c}), \\ (1 - t_2)\mathbf{b} + t_2(-\mathbf{a} + 2\mathbf{c}), \\ (1 - t_3)\mathbf{c} + t_3(\mathbf{a} + \mathbf{b})/2)$$

ここで $0 < t_1, t_2, t_3 \ll 1$ とする。この立式の図形的意味について説明しよう。

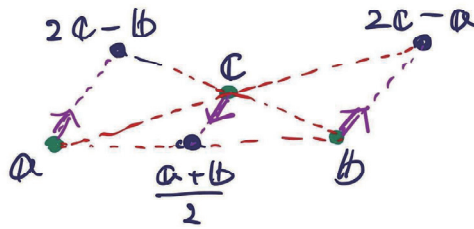


図3: 「中点」モジュールの概念図

図3において、幾つかの仮定のもとに、式を考察してみる。もし $\{A_n\}, \{C_n\}$ が固定されていると仮定する ($\{A_n\}, \{C_n\}$ に関する遷移関数を、 $A_{n+1} = A_n, C_{n+1} = C_n$ に変更する) と、位置ベクトル $\mathbf{b}_n$ は $2\mathbf{c}_n - \mathbf{a}_n$ に収束するような遷移関数でありたい。このことから、例えば $B_n(\mathbf{b}_n)$ であれば、 $\mathbf{b}_n$ と $2\mathbf{c}_n - \mathbf{a}_n$ の (ある一定の比率による) 内分点を $\mathbf{b}_{n+1}$ とすることが考えられる。ほかの点についても同様に考えて構成されたものが上記の F_{MP} である。

このマルコフ過程は、位置ベクトルの線形写像で表現され、その遷移行列 M は

$$M = \begin{pmatrix} 1 - t_1 & -t_1 & 2t_1 \\ -t_2 & 1 - t_2 & 2t_2 \\ t_3/2 & t_3/2 & 1 - t_3 \end{pmatrix}$$

である。この行列の固有値は $1, 1 - t_1 - t_2 - t_3$ であり、その固有ベクトルは順に $(2, 0, 1), (-1, 1, 0), (-2t_1, -2t_2, t_3)$ である。実際、 $-1 < 1 - t_1 - t_2 - t_3 < 1$ であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n$ は収束する。固有値1の固有空間 W_1 は

$$W_1 = \{(x, y, z) | x + y - 2z = 0\}$$

であり、 $\mathbf{a}_\infty + \mathbf{b}_\infty - 2\mathbf{c}_\infty = \mathbf{o}$ が保証される。(対角化可能であるための必要十分条件は $t_1 + t_2 + t_3 \neq 0$ であるが、これは満たされる。)

参考までに PointLine では $t_1 = t_2 = t_3 = 1/10$ で運用している。中点モジュール単体であればこれで問題なく動作することは上のとおりだが、モジュールを組み合わせたときまで、安定的に図形が収束することについての保証まではない。

3.2 「点を円上に」モジュールの設計

点を $A(\mathbf{a})$ 、円の中心を $B(\mathbf{b})$ 、円の半径 r として、 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, r)$ についてのマルコフ過程を考える。平面ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ と正の実数 r についての遷移関数 $(\mathbf{a}', \mathbf{b}', r') = F_{PC}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, r)$ を適切に設定し、以下の条件を満たすものを設定したい。

(条件) 任意の平面ベクトル $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0$ と正の実数 r_0 に対して $(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}, r_{n+1}) = F_{PC}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, r_n)$ により $(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, r_n)$ ($n = 0, 1, \dots$) を定めるとき、極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, r_n) = (\mathbf{a}_\infty, \mathbf{b}_\infty, r_\infty)$ が「点 $A_\infty(\mathbf{a}_\infty)$ が中心 $B_\infty(\mathbf{b}_\infty)$ 半径 r_∞ の円の上にある」を満たす。

小さな正の定数 $0 < t_1, t_2, t_3 \ll 1$ を設定する。2点 AB の距離を $d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ として、ベクトル $\mathbf{c}$ を

$$\mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, r) = \frac{d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - r}{d(\mathbf{a}, \mathbf{b})}(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

として、

$$F_{PC}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, r) = (\mathbf{a} + t_1 \mathbf{c}, \mathbf{b} - t_2 \mathbf{c}, r + t_3(d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - r))$$

により定める (図4)。この遷移関数により、上の条件を満たすようなマルコフ過程を得ることができる。

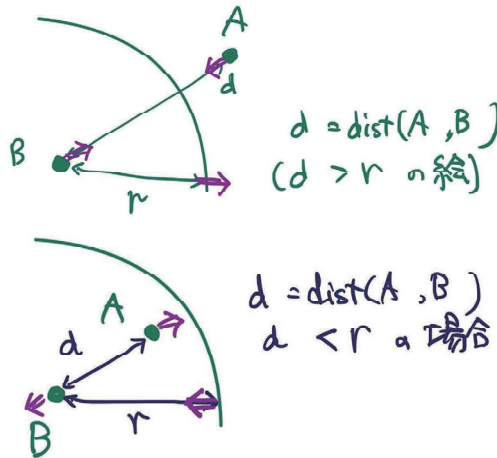


図4: 「点を円上に」モジュール

図は $d < r$ の場合、 $d > r$ の場合に分けて、点 A, B の動くべき方向、実数 r の変化すべき方向を図示している。

このモジュールの場合、損失関数をそれぞれ

$$L(\mathbf{a}, \mathbf{b}, r) = |d(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - r|$$

により定義すれば、 $(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}, r_{n+1}) = F_{PC}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, r_n)$ のときに、

$$L(\mathbf{a}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+1}, r_{n+1}) = |1 - t_1 - t_2 - t_3| L(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, r_n)$$

が示されるので、 $|1 - t_1 - t_2 - t_3| < 1$ のときに、 $L(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, r_n)$ と $\|\mathbf{c}(\mathbf{a}_n, \mathbf{b}_n, r_n)\|$ は0へ収束し、図は収束することがわかる。

4 考察

4.1 作図自由度の拡張について

前のセクションで挙げた二つの例について、PointLine を用いて描画した例を挙げておく。動画 [6] では、三角形とその外接円を描画している。ここでは、三角形と円を別々に（独立した位置に）描画したのちに、「点を円上に」モジュールを用いて、三角形の3つの頂点を円の上に載せている。このことにより、三角形の各頂点も円の中心も、自由度2で動かせることが動画内で示されている。

動画 [7] においては、筆者がGeoGebraを使って作図を断念した図について、PointLineを用いて描画した様子を動画に収めている。ここでは「円と直線を接させる」「円と円を接させる」という2種類のモジュールが使われている。このモジュールの内部アルゴリズムについては、本稿では記載を省略している。

4.2 点の固定にともなう発散について

動画 [8] では、きわめて特別な例について作図を試みている。

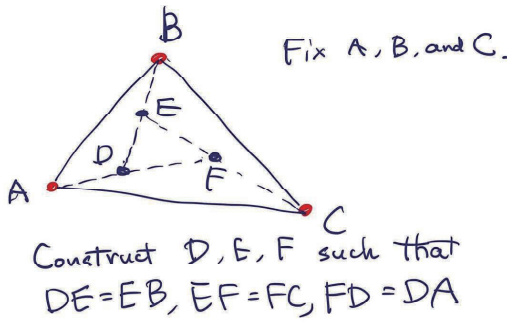


図 5: 中点を用いた作図

図5で、三角形 ABC の内側に3点 D, E, F があり、 E は BD の中点、 F は CE の中点、 D は AF の中点であるような作図を考える。点の位置ベクトルをそれぞれ $A(a), B(b), C(c), D(d), E(e), F(f)$ とすると、

$$d = (4a + 2c + b)/7$$

$$e = (4b + 2a + c)/7$$

$$f = (4c + 2b + a)/7$$

という関係式がある。動画の中では、3点 A, B, C を固定することなく最初に描画して見せ、PointLine での作図が可能であることを示している。そののちに、3点 A, B, C を固定して同じ作図を試みると図が発散してしまうことを示している。

このことに対応する数学的事象について説明する。当該作図においては、上記の「中点モジュールの遷移関数」 F_{MP} を3つ準備し、それらの合成関数により遷移関数を定める。

(PointLine の内部構造では、パラメータは $t_1 = t_2 = t_3 = 1/10$ としている。) この遷移関数は線形であり、固有値はすべて -1 より大きく 1 以下の実数になる。このことから図は収束し、作図が可能である。一方で、3点 A, B, C を固定して同じ作図を試みると、上記の遷移関数から3点 A, B, C に関する部分を自明な漸化式 $A_{n+1} = A_n, B_{n+1} = B_n, C_{n+1} = C_n$ と交換することになり、この場合にも遷移関数は線形であるが、固有値の中に 1 より大きいものが現れ、図が発散することが証明される。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP23K11375 の助成を受けている。

参考文献

- [1] GeoGebra, (<https://geogebra.org>), (2023 年 11 月 23 日現在)
- [2] PointLine, (<https://aharalab.sakura.ne.jp/PointLine/>), (2023 年 11 月 23 日現在)
- [3] 斎藤雄斗, 阿原一志, PointLine における線分比と軌跡に関する教材について, 数理解析研究所講究録 2208, (2021).
- [4] 斎藤雄斗, 阿原一志, PointLine における角度の実装と実例, 数理解析研究所講究録 2178 (2021).
- [5] 一宮 早来, 阿原一志, PointLine を利用したデジタル教材による、新しい幾何の教え方の提案, 統計数理研究所紀要, (2020).
- [6] PointLine circumcenter,
<https://youtu.be/lSCWlhSa74I> , (2023 年 11 月 23 日現在)
- [7] PointLine triangle and four circles,
<https://youtu.be/Y0iKmlRWrfE>) , (2023 年 11 月 23 日現在)
- [8] PointLine unstable example,
https://youtu.be/LHxZmsu_AL0) , (2023 年 11 月 23 日現在)