

## 概均質ベクトル空間の理論

行者明彦 述  
(Gyoja Akihiko)  
木村達雄 記  
(Taeko Kimura)

### まえがき

これは、1988年10月25日（火）から28日（金）にわたり筑波大学数学系で行われた行者明彦氏による集中講義を、木村達雄のノートに基づき、書き表したものです。内容は、概均質ベクトル空間の基本定理というべき、相対不変式の複素べきに関する佐藤幹夫先生の理論を見通しよく、しかも今まで必要だった正則性という基本的な仮定もとり除いて証明を与えており、大変興味深いものとなっています。既に§2に於て、行者氏自身による諸結果が表れており、従来の基本的な文献 佐藤幹夫述、新谷卓郎記「概均質ベクトル空間の理論」数学の歩み15-1とかなり雰囲気の違いの違ったものになっています。

時間を延長してまで、丁寧にわかりやすく講義をして下さった行者明彦氏に心から感謝致します。

1988年11月16日、木村達雄

## 概均質ベクトル空間の理論

概均質ベクトル空間の理論というのは佐藤幹夫氏によって始められた理論で、代数解析学の発展の大きな原動力の一つとなり、また整数論とか表現論への応用もあります。ここでは、自分なりの理解に従って概均質ベクトル空間の理論についてお話しします。内容は

§ 1 準備、Appendix

§ 2 概均質ベクトル空間の構造

§ 3 D-module

§ 4 基本定理、Appendix

§ 5 実例

§ 6 Kac-Moody Lie algebra

§ 1 では代数多様体とか代数群などあとで使われることを準備します。§ 3 の D-module というのは線型微分方程式系を代数的にとらえ直したもので § 4 で使われる解析的な知識の準備を与えます。§ 4 は概均質ベクトル空間の理論のハイライトといって良い所です。§ 1 から § 4 までが本講義、§ 5 が補講、§ 6 が private seminar で、§ 1 から § 4 までは、予備知識を殆ど仮定しません。但し Appendix は、それとは別で、必要な知識を仮定します。

## §1. 準備

$X$  を集合,  $C_X$  を  $X$  上の  $\mathbb{C}$ -valued functions 全体,  $\mathbb{C}[X]$  を  $C_X$  の  $\mathbb{C}$ -subalgebra で 単位元  $1$  を含むものとする. このとき pair  $(X, \mathbb{C}[X])$  を 仮に, ここの話で ringed set とよぶことにする.

定義 1. 写像  $f: X \rightarrow Y$  が  $(X, \mathbb{C}[X])$  から  $(Y, \mathbb{C}[Y])$  への morphism であるとは,  $\forall \varphi(y) \in \mathbb{C}[Y]$  に対して,  $\varphi(f(x)) \in \mathbb{C}[X]$  となること.

また, この  $f$  が isomorphism であるとは,  $f$  = 全単射かつ  $f^{-1}$  も morphism となることである.

定義 2.  $\mathbb{C}[X]$  の元  $\varphi$  を,  $X$  上の regular function とよぶ.

定義 3.  $\{ \bigcap_{\varphi \in A} \varphi^{-1}(0) ; A \subset \mathbb{C}[X] \}$  の形の  $X$  の部分集合を  $X$  の閉集合として,  $X$  に topology を入る.

これを  $X$  の Zariski-topology という.

ringed set  $(X, \mathbb{C}[X])$  の閉部分集合  $Y \subset X$  も

$\mathbb{C}[Y] = \{ \varphi|_Y ; \varphi \in \mathbb{C}[X] \}$  により自然に

ringed set  $(Y, \mathbb{C}[Y])$  になる.

定義4.  $\mathbb{C}$ 上の $n$ 変数多項式環  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  の元は

$\mathbb{C}^n$ 上の  $\mathbb{C}$ -valued function と考えられるから, ringed set

$(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n])$  が得られる。これを affine space とよぶ。

いちいち  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  を記すのも面倒なので,  $\mathbb{C}^n$  と略記

する。この場合の regular function は多項式で, Zariski-topology に関する閉集合とは 多項式の共通零点と

いうことになる。 $\mathbb{C}^n$  の (Zariski-topology に関して)

閉集合と同形な ringed set を affine variety

とよぶ。(既約性は仮定しない)。affine variety 上の

regular function とは 多項式をその variety に制限

したものである。

Remark Affine variety には 2種類の topology

が入る。即ち

(Z) Zariski topology , と

(C) Classical topology, 即ち  $\mathbb{C}^n$  の部分空間としての topology.

区別のため (Z) の場合には, Zariski-closed (又は

単に (Z)-closed) 等 と記すことにする。

Exercise 1.  $X, Y$  をそれぞれ  $\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m$  の  $(Z)$ -closed set とする. そのとき 写像  $f: X \rightarrow Y$  が morphism である為の 必要十分条件は,  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  の元  $F_1(x), \dots, F_m(x)$  が存在して  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_m(x))$  により 写像  $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  を作るとき  $f = F|_X$  となることである. これを示せ.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \supset & X \\ F \downarrow & & \downarrow F|_X = f \\ \mathbb{C}^m & \supset & Y \end{array}$$

Exercise 2. (i) affine variety の  $(Z)$ -closed subset も 自然に affine variety になる.

(ii) affine varieties の直積も affine variety になる.

Lemma 1.  $\mathbb{C}^n$  の部分集合  $U$  を空でない  $(Z)$ -open set とし  $\mathbb{C}[U] \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \Big|_U ; \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n], \varphi_1(u) \neq 0 \text{ for } u \in U \right\}$  とおく. このとき,  $(U, \mathbb{C}[U])$  が affine variety になる

必要十分条件は ある  $f \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  により  $U = f^{-1}(\mathbb{C}^\times) = \{x \in \mathbb{C}^n \mid f(x) \in \mathbb{C}^\times\} (= \{x \in \mathbb{C}^n ; f(x) \neq 0\})$  と表わせること  
但し  $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} - \{0\}$ .

⊙  $U = f^{-1}(\mathbb{C}^*)$  のとき

$$U \xrightarrow{\sim} \{(x, t) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \mid f(x)t - 1 = 0\}$$

$$x \longmapsto (x, f(x)^{-1})$$

$$x \longleftarrow \pi(x, t)$$

は isomorphism を与えるから  $(U, \mathbb{C}[U])$  は

affine variety である。逆の証明は略す。 //

例.  $GL_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n^2}; \det X \neq 0\}$  は  
affine variety である。

### tangent space

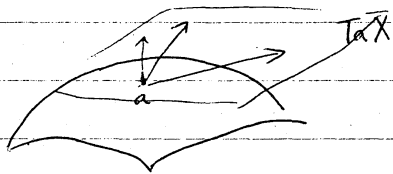
$X$  を affine variety とすると, いくつかの多項式  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  の  
共通零点として表わせる:  $X = \{x \in \mathbb{C}^n \mid \varphi_1(x) = \dots = \varphi_N(x) = 0\}$

( $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  の ideal は すべて有限生成であるから, 多項式は  
有限個で十分である)

このとき, 直観的には  $a \in X$  に対して,

$$T_a X = \{\text{点 } a \text{ で } X \text{ に接するベクトル}\} \text{ としたい。これでは}$$

勿論 定義にならないが, 図のように点  $a$  に接するベクトルを



全部 集めてきたのが tangent

space, である。そこで もうひとつ

なれば数学的, なれば直観的な定義を与えよう。

$X$  の中の曲線  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in X \quad (t \in \mathbb{C})$

で  $x(0) = a \in X$  なるものを考えて,  $t=0$  で微分したもの

$\left. \frac{d}{dt} x(t) \right|_{t=0}$  を  $A = (A_1, \dots, A_n)$  とおけば,  $T_a X$  の元が

得られ, 逆に  $T_a X$  の元はこのようにして得られる。

さて  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  が  $X$  の中にあるということは

$\varphi_i(x_1(t), \dots, x_n(t)) = 0 \quad (i=1, \dots, N)$  ということ, これを  $t$  で

微分して  $t=0$  とおけば,

$$\sum_{j=1}^n \left. \frac{d}{dt} x_j(t) \cdot \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right|_{t=0} = 0$$

$$= \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) = 0 \quad \text{を得る.}$$

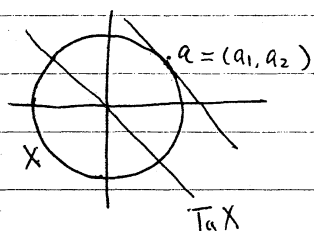
逆にこれを積分すれば また もとの曲線を与えられる, これが

接ベクトルの定義を与えておいて, 次のように定義する。

定義  $T_a X = \left\{ (A_1, \dots, A_n) \mid \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(a) = 0, i=1, \dots, N \right\}$

を  $X$  の  $a$  における tangent space とう。

例)  $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 1$

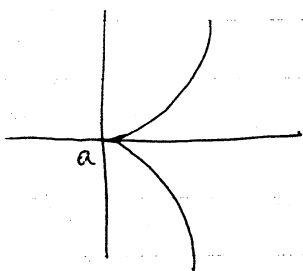


このとき  $a \in \{\varphi=0\}$  における接線の方程式

は  $\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(a)(A_j - a_j) = 0$  という形である。

これは affine space だが、これを原点を通るように移動して  
ベクトル空間にしたのが tangent space である。

例)  $X = \{(x, y) \mid x^3 - y^2 = 0\} \ni a = (0, 0)$



$$\varphi(x, y) = x^3 - y^2$$

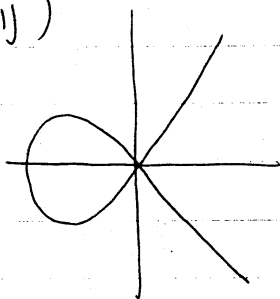
この場合,  $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 3x^2$ ;  $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -2y$  であり

$a = (0, 0)$  では共に零となり

$T_a X = \mathbb{C}^2$  となる。このように

variety は 1次元だったが、接空間が 2次元になることもある。

例)



$$y^2 = x^2(x+1)$$

この場合も  $a = (0, 0)$  における

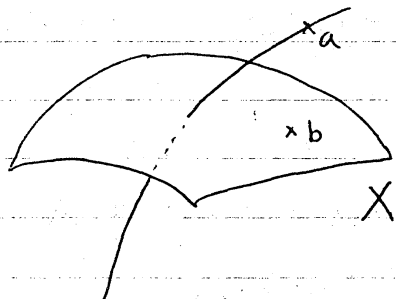
tangent space は  $T_a X = \mathbb{C}^2$  となる。

これ等の例をしてみると、とがった点や交わった点では  
 $T_a X$  が大きくなり、ふつうのなめらかな所の点では  
variety と接空間の次元が等しくなっていることがわかる。  
そこで、次のように定義する。

定義 1.  $X$  が点  $a$  で smooth であるとは,

$\dim T_a X = \dim_a X$  となること. ここで  $\dim_a X$  は

$X$  の点  $a$  の近くでの次元である. 例えは



$X$  が図のような形の variety の

とき,  $a$  のところでは  $X$  は 1 次元,

$b$  のところでは  $X$  は 2 次元, となっている。

定義 2.  $X$  が smooth であるとは,  $X$  の各点  $a$  で

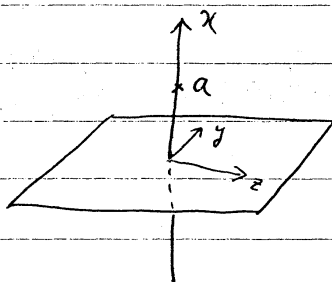
$X$  が smooth であること.

例)  $X = \{(x, y, z) \mid xy = xz = 0\}$  を考える.

$$x \neq 0 \Rightarrow y = z = 0 \quad \text{や}$$

$$X = \{(x, 0, 0)\} \cup \{(0, y, z)\} \quad \text{となる.}$$

$a = (1, 0, 0) \in X$  とすると  $\dim_a X = 1$  である.



代数幾何学では 次元の定義は 1 次元や

2 次元をまざっているときは, 一番大きい所を

次元とするから  $\dim X = 2$  である.

明らかに  $\dim T_a X = 1$  である.

従って  $\dim T_a X \neq \dim X$  ではあるが,  $X$  は smooth at  $a$ , である。

さて variety という空間を微分すると tangent space ができたが、今度は morphism という写像の方を微分することもある。

まず直観的にみるために、多項式写像  $F: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$  が与えられていて、この制限で morphism  $F: X(\subset \mathbb{C}^n) \rightarrow Y(\subset \mathbb{C}^m)$  が与えられているとする。

$a \in X$  に対し、 $\chi(0)=a$ ,  $\chi(t)=(x_1(t), \dots, x_n(t)) \in X$

( $t \in \mathbb{C}$ ) なる  $X$  内の曲線  $\chi$  を  $t=0$  で微分すると

$\frac{d}{dt} \chi(t) \Big|_{t=0} = A = (A_1, \dots, A_n) \in T_a X$  なる tangent vector

が得られたのであったが、この曲線  $\chi(t)$  を  $F$  で移して

$\frac{d}{dt} F(\chi(t)) \Big|_{t=0}$  を考えれば  $T_{F(a)} Y$  の元、即ち  $F(a)$  に

おける  $Y$  の tangent vector が得られる等である。

これを  $(dF)_a(A)$  とおきたい。

$$\frac{d}{dt} F(\chi(t)) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (F_1(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, F_m(x_1(t), \dots, x_n(t))) \Big|_{t=0}$$

$$= \left( \sum_{j=1}^n \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_n(t)), \dots, \sum_{j=1}^n \frac{dx_j(t)}{dt} \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(x_1(t), \dots, x_n(t)) \right) \Big|_{t=0}$$

$$= \left( \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial F_1}{\partial x_j}(a), \dots, \sum_{j=1}^n A_j \frac{\partial F_m}{\partial x_j}(a) \right)$$

$$= (A_1, \dots, A_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(a), \dots, \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \quad \text{を得る。}$$

そこで、この表示を  $(dF)_a(A)$  の定義とする。

## 代数群

定義 1.  $GL_n(\mathbb{C})$  の Zariski-closed な部分群を  
線形代数群 という。ここでは 線形代数群 しか考えないので、  
単に 代数群 ということにする。

2. 代数群 の 間の 準同型写像 としては morphism に  
なっているものしか考えない。例えば、 $\mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times$  や

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \rightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$$

は考えない。

3.  $G =$  代数群,  $X = \text{affine variety}$  として,  $G$  が  $X$  に  
作用する, いうときは 単に 集合  $X$  に作用するというだけでは  
なく,  $G \times X \rightarrow X$  が morphism になっているものだけを  
考える。

4. 準同型写像  $\rho: G \rightarrow GL_n(\mathbb{C})$  を  $G$  の表現  
という。  $G, GL_n(\mathbb{C})$  は 代数群 ゆえ, 約束 2. により  
morphism になっているものだけを考える。従って

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \rightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ z & \mapsto & |z| \end{array}$$

等は表現とはいわない。

### 代数群の例

(i)  $GL_n(\mathbb{C}) = \{X \in M_n(\mathbb{C}) \mid \det X \neq 0\}$  は代数群である。

(ii)  $GL_1(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^\times$  と書く。

$\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$  も代数群で (algebraic) torus とよばれる。

(本当の torus は  $\mathbb{C}_1^\times \times \cdots \times \mathbb{C}_1^\times$ ,  $\mathbb{C}_1^\times = \{z \in \mathbb{C} : |z|=1\}$  であるが algebraic でないので, この代用として  $\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times$  を取る。実際 torus に近い性質を色々もつ。)

(iii)  $SL_n(\mathbb{C}) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det X = 1\}$

これは special linear group とよばれる。

(iv)  $SO_n(\mathbb{C}) = \{X \in GL_n(\mathbb{C}) \mid \det X = 1, {}^t X X = 1\}$

これは special orthogonal group とよばれる。

(v)  $Sp_{2n}(\mathbb{C}) = \{X \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t X J X = J\}$

但し  $J = \left( \begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right)$ , これは symplectic group とよばれる。

この講義では, 代数群 といっても これらだけしか出てこず。

### Lie algebra

$G (\subset GL_n(\mathbb{C}))$  を代数群,  $e (\in G)$  を単位元

とする。そのとき  $G$  の Lie algebra  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  は

$e$  における tangent space  $T_e G$  のことである。このとき  $T_e G \subset T_e GL_n(\mathbb{C}) = M_n(\mathbb{C})$  中  $\mathfrak{g}$  Lie algebra の元は  $n$  次の行列 と考えられる。

1. 代数群  $G$  が ベクトル空間  $V$  に作用している とする。即ち morphism  $G \times V \rightarrow V$  が与えられている。この tangent space を考え、morphism の微分を考えると、ベクトル空間  $V$  の tangent space は  $V$  だから、 $\mathfrak{g} \times V \rightarrow V$  を得る。即ち Lie algebra  $\mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  が  $V$  に作用する。

2. 準同型写像  $\phi: G \rightarrow H$  に対し 微分写像  $(d\phi)_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$  が得られるが、 $d$  を別の意味で使いたくないので、これを単に  $\phi$  と記すことにする。 ( $\phi = (d\phi)_e: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{h}$ )

3.  $A \in M_n(\mathbb{C})$ ,  $t \in \mathbb{C}$  に対し

$$\exp(tA) = 1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \quad \text{とおくと}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \exp(tA) \right|_{t=0} = A \quad \text{である。} \quad \text{このとき,}$$

$$\star \quad \forall t \in \mathbb{C} \text{ に対して, } \exp tA \in G \iff A \in \mathfrak{g}$$

$\therefore GL_n(\mathbb{C})$  の各元  $x$  に対して,  $\mathfrak{g} \cdot x \subset T_x GL_n(\mathbb{C})$

を対応させると、これが involutive distribution と

よばれるものになり、 $\{\exp tA \mid t \in \mathbb{C}\}$  が この *involutive distribution* の ひとつの 積分多様体 となる。そして  $G \cdot x$  が 極大積分多様体 となるから、あとは Frobenius の定理 を使えばよい、  
 というわけだが こゝは大変 不親切な説明ですので、数学辞典  
 あるいは 松島与三：多様体入門 など をみて下さい。 //

### reductive な代数群

定義  $G$  を代数群 とする。

1.  $G$  が 単純 (simple) であるとは

(i)  $G =$  連結 (従って この条件より  $O(n)$  は 単純群ではない)

(ii)  $G$  の 正規部分群 は、 $G$  全体、又は 有限群  
 (例えば  $\{cI_n; c^n=1\}$  は  $SL_n(\mathbb{C})$  の 正規部分群)

(iii)  $G \not\cong \mathbb{C}^\times, \{1\}$  (これは、例えば 素数位数の巡回群は有限単純群とは違いないが、ぶつうは除外して考えるか、  
 こういうことに対応している。)

2.  $G$  が *reductive* とは、単位元を含む連結成分  $G^0$  が、  
 $G^0 = G_1 \times \cdots \times G_n / (\text{中心に含まれる有限群})$ 、但し  $G_i$  は  
 単純代数群 または  $\mathbb{C}^\times$ 、と表わせること。

Remark 連結性は, この場合は  $(Z)$ -topology でも  $(C)$ -topology でも, どちらでも同じである.

例)  $SL_n(\mathbb{C}), SO_n(\mathbb{C}) (n \geq 5), Sp_{2n}(\mathbb{C})$  などはすべて単純代数群である.

Lemma 2.  $G$  が reductive な代数群とする.

- (i)  $G$  の maximal compact subgroup  $K$  が共役を除いて unique に存在する。しかも  $K$  は  $G$  内で Zariski-dense で,  $\pi_0(K) \xrightarrow{\sim} \pi_0(G)$  即ち  $K$  の連結成分の集合と  $G$  の連結成分の集合が 1対1 に対応する.
- (ii)  $G$  の任意の compact subgroup  $K'$  に対して,  $K \supset K'$  となる maximal compact subgroup が存在する.

(例えは  $\mathbb{C}^\times \supset K = \{z; |z|=1\}$  は maximal compact で Zariski-dense, である.)

証明)

$G$  が連結の場合は Helgason: Symmetric Space ... (1962) の chapter 6 の §2 をみよ. 連結でない場合の証明は文献探しても見当たらなかったのて, Appendix で

与えることにする. (§1 の Appendix )

例)  $U_n = \{ g \in GL_n(\mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} g = 1 \}$  を unitary 群  
とする. このとき

$$GL_n(\mathbb{C}) \supset K = U_n$$

$$SL_n(\mathbb{C}) \supset K' = U_n \cap SL_n(\mathbb{C})$$

$$SO_n(\mathbb{C}) \supset K'' = U_n \cap SO_n(\mathbb{C})$$

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) \supset K''' = U_n \cap Sp_{2n}(\mathbb{C})$$

は maximal compact subgroup である.

Lemma 3  $K$  を compact 群 とすると,  $K$  上には

不変測度 (Haar measure) が 存在する. すなわち

$K$  上の 連続関数  $f$  に対して, 積分  $\int_K f(k) dk$  が 定義でき,

$$\int_K f(ak) dk = \int_K f(k) dk \quad (\forall a \in K) \quad \text{とできる. このとき}$$

$$\int_K f(ka) dk = \int_K f(k^{-1}) dk = \int_K f(k) dk, \quad \int_K dk < \infty$$

である. これは 定数倍を除いて unique であるから,

$$\int_K dk = 1 \quad \text{と 正規化しておく. (このような measure は unique).}$$

## Appendix (§1)

Lemma 2  $G$  が (連結を仮定しない) reductive 代数群  
とすると

(i)  $G$  の maximal compact subgroup  $K$  が 共役を  
除いて 唯一つ 存在して, Zariski-dense であり

$\pi_0 K \xrightarrow{\sim} \pi_0 G$  が 成立つ.

(ii)  $G$  の 任意の compact subgroup  $K'$  は ある  
maximal compact subgroup  $K$  に 含まれる.

を 証明しよう.

参考文献は

代数群: SGA3, Steinberg: Conjugacy class  
(Springer Lecture Note)

但し この部分については詳しく説明する. あと

有限群のコホモロジー (例えば 弥永昌吉編: 数論 岩波書店 など)

と 「連結の場合」の E. Cartan の 証明 (Helgason の本

など) を 使って 証明する.

$G$  = reductive 代数群,  $G^0$  は  $G$  の単位連結成分,  
 $Z = Z(G^0)$  は  $G^0$  の中心 とする。

$K_Z \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ z \in Z; \overline{\{z^n | n \in \mathbb{Z}\}} \text{ が compact, } (- \text{ は classical topology での closure}) \right\}$  とおく。

$K_Z$  の元は 何乗しても だいたい単位元の近くをぐるぐるまわっているような元たちである。

$K_Z$  は  $Z$  の中の maximal compact subgroup になっている。  $Z$  は可換群 中々 話は簡単である。

$T \subset G^0$  を maximal torus とする。 maximal torus というのは,  $G^0$  に含まれる algebraic torus で次元が最大のもののことで, 共役を除いて唯一つ存在する。

$\Delta = T$  に関する root 系  
 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\} = \Delta$  の root basis  
 $X_{\alpha_i} \in \text{Lie}(G^0)$  : root vector とする。

これについて 説明する。

$\alpha \in \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$  に対して

$\mathfrak{g}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{ X \in \mathfrak{g} \mid tXt^{-1} = \alpha(t)X \text{ for } \forall t \in T \}$  と

おく。(すべて行列ゆえ  $t \times t$  等の演算は可能である)

そのとき、 $\Delta$  が  $T$  に関する root 系 とは

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in \text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \mid \alpha \neq 1, \mathfrak{g}_\alpha \neq 0 \}$$

のことである。

$\text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times)$  は  $(\phi_1, \phi_2)(t) = \phi_1(t)\phi_2(t)$  により

群をなすが、 $T = \mathbb{C}^\times \times \underbrace{\cdots \times \mathbb{C}^\times}_{\ell'}$  という形ゆえ

$$\text{Hom}(T, \mathbb{C}^\times) \cong \mathbb{Z}^{\ell'} \quad (\text{加法的に書くことにする})$$

$\cup$   
 $\Delta$

これにより  $\Delta \subset \mathbb{Z}^{\ell'}$  と考える。

$\Delta \supset \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  が root basis であるとは

$\forall \alpha \in \Delta$  に対し  $\exists k_1, \dots, k_\ell \in \mathbb{Z}$  が存在して

$$\alpha = k_1 \alpha_1 + \dots + k_\ell \alpha_\ell \quad \text{但し} \quad k_1, \dots, k_\ell \geq 0$$

$$\text{又は} \quad k_1, \dots, k_\ell \leq 0$$

と表わせる。

$\alpha \in \Delta$  について  $\dim \mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  であるが、もっと詳しくみると

$\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$  であることがわかる。従って、

$\mathfrak{g}_\alpha = \mathbb{C} X_\alpha$  と表わせる。この  $X_\alpha$  が root vector

である。

以下  $\text{Aut}(G^0)$  は  $G^0$  の自己同型群を表わすが、  
 約束により、自己同型 *といえは morphism* になっているものしか  
 考えない。

$$A = \left\{ \sigma \in \text{Aut}(G^0) \mid T^\sigma = T, \{X_{\alpha_1}^\sigma, \dots, X_{\alpha_\ell}^\sigma\} = \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_\ell}\} \right. \\ \left. \text{as a set} \right\}$$

$\sigma \in \text{Aut}(G^0)$  は リー環の元  $X_\alpha$  にも作用している。

$\text{Int}(G^0)$  で  $G^0$  の内部自己同型群を表わす。

$$\Rightarrow \text{Aut}(G^0) = \text{Int}(G^0) \rtimes A \quad (\text{半直積})$$

即ち  $\text{Aut}(G^0)$  の元は  $\text{Int}(G^0)$  と  $A$  の元の積で  
 表わされて、 $\text{Int}(G^0)$  は  $\text{Aut}(G^0)$  の正規部分群  
 かつ  $\text{Int}(G^0) \cap A = \{e\}$  となる。

これを示そう。

$\text{Aut}(G^0) \ni \sigma$  が  $\text{Int}(G^0)$  と  $A$  の元の積にあること:

$\because$   $T^\sigma$  は  $G^0$  の maximal torus 中  $T$  と共役、従って  
 $\exists \sigma_1 \in \text{Int}(G^0)$  s.t.  $T^\sigma = T^{\sigma_1}$ .  $\sigma\sigma_1^{-1}$  を考  
 えることにより、 $T^\sigma = T$  といえる。すると  $\sigma(\Delta) = \Delta$   
 であるから root basis を他の root basis へうつす。

しかし root basis たちは Weyl 群でうつるが, Weyl 群は特別な内部自己同型である. 結局  $\sigma$  は root basis を集合として, 動かさないとしてよい. そのとき

$$\{X_{\alpha_1}^\sigma, \dots, X_{\alpha_\ell}^\sigma\} = \{c_1 X_{\alpha_1}, \dots, c_\ell X_{\alpha_\ell}\} \text{ as a set}$$

となる.  $\alpha_i(t) = \frac{1}{c_i}$  ( $i=1, \dots, \ell$ ) となる  $t \in T$  に

よる内部自己同型を更に施せば

$$t(c_i X_{\alpha_i})t^{-1} = X_{\alpha_i} \quad (i=1, \dots, \ell) \text{ 中へ}$$

結局  $\{X_{\alpha_1}^\sigma, \dots, X_{\alpha_\ell}^\sigma\} = \{X_{\alpha_1}, \dots, X_{\alpha_\ell}\}$  となる.

結局  $\sigma$  は内部自己同型を modulo  $\sigma$  として  $A$  の元になった. //

他については省く.

さて  $G^\circ$  は  $G$  の正規部分群ゆえ  $G/G^\circ = \cancel{G^\circ} G$  である

$$\begin{array}{ccc} G/G^\circ & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \sigma & \longmapsto & [\sigma] \end{array}$$

$\sigma$  の代表元のひとつである.

$[\sigma]$  による  $G$  の内部自己同型  $\text{Int}_{[\sigma]}$  は ( $G^\circ$  が正規部分群だから)  $G^\circ$  の自己同型をひきおこす.

$$\text{Int}_{[\sigma]} \in \text{Aut}(G^\circ)$$

しかし  $[\sigma]$  は  $G^\circ$  の元だけ自由度があるから,

$\text{Int}_{[\sigma]}$  は  $G^0$  の内部自己同型のみだけ ずらすことができる。従って  $[\sigma]$  を適当にとりて

(\*)  $\text{Int}_{[\sigma]} \in A$  , とすることが出来る。

但し  $\sigma$  に対して (\*) の条件下でも  $[\sigma]$  は *unique* ではない。 $G^0$  の center のみだけ自由である。そこで、

$\forall \sigma, \tau \in G/G^0$  に対し,  $\exists C_{\sigma, \tau} \in G^0$  で

$$[\sigma\tau] = [\sigma][\tau] C_{\sigma, \tau} \quad \text{となるものがある}$$

(  $[\sigma\tau]$  も  $[\sigma][\tau]$  も  $\sigma\tau$  の代表元である! )

$$\Rightarrow \text{Int}_{[\sigma\tau]} = \text{Int}_{[\sigma]} \text{Int}_{[\tau]} \text{Int}_{C_{\sigma, \tau}} \quad \text{となるから}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Int}_{[\sigma\tau]}, \text{Int}_{[\sigma]}, \text{Int}_{[\tau]} \in A \\ \text{Int}_{C_{\sigma, \tau}} \in \text{Int}(G^0) \end{array} \right. \quad \text{であるから}$$

$$\text{Int}_{C_{\sigma, \tau}} \in A \cap \text{Int}(G^0) = \{e\}$$

即ち,  $C_{\sigma, \tau} \in Z(G^0) = G^0$  の center.

さて  $[\sigma\tau\rho]$  を = 通りに計算すると,

$$[\sigma\tau\rho] = [\sigma\tau][\rho] C_{\sigma\tau, \rho}$$

$$= [\sigma][\tau] C_{\sigma, \tau} [\rho] C_{\sigma\tau, \rho}$$

$$= [\sigma][\tau][\rho] C_{\sigma, \tau}^{\rho} C_{\sigma\tau, \rho} \quad \text{但し}$$

$G/G^0 \ni \sigma$  は  $Z(G^0) \ni z$  に  $z^\sigma \stackrel{\text{def}}{=} z^{[\sigma]} = [\sigma]^{-1} z [\sigma]$

で作用させる. 即ち  $z^{[\sigma]} = [\sigma] z^\sigma$

今の場合,  $C_{\sigma, \tau} [p] = [p] C_{\sigma, \tau}^p$  である.

$$\text{一方, } [\sigma \tau p] = [\sigma] [\tau p] C_{\sigma, \tau p}$$

$$= [\sigma] [\tau] [p] C_{\tau, p} C_{\sigma, \tau p}$$

即ち  $C_{\sigma, \tau}^p C_{\sigma \tau, p} = C_{\tau, p} C_{\sigma, \tau p}$  可換ゆえ

$$C_{\tau, p}^{-1} C_{\sigma \tau, p} C_{\sigma, \tau p}^{-1} C_{\sigma, \tau}^p = 1 \quad \text{と表わせる.}$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{この覚え方.} \quad \begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\quad} & \tau \xrightarrow{\quad} p \\ & & \downarrow \\ & & \sigma \tau \end{array} \Rightarrow \begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\quad} & \tau \xrightarrow{\quad} p \\ & & \downarrow \\ & & \sigma \tau \end{array} \\ \\ \begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\quad} & \tau \xrightarrow{\quad} p \\ & \uparrow & \\ & \sigma p & \end{array} \Leftarrow \begin{array}{ccc} \sigma & \xrightarrow{\quad} & \tau \xrightarrow{\quad} p \\ & & \downarrow \\ & & \sigma \tau \end{array} \\ \\ \text{あとは 交互に inverse にすればよい.} \end{array} \right)$$

このような関係式をみたす  $\{C_{\sigma, \tau}\}$  を 2-cocycles といい,

$\{C_{\sigma, \tau}\}$  に同値関係を

$$(*) \text{ をみたす } \succ \text{ 代表系をかえる } \Leftrightarrow \sim$$

によって入れて,

$$\{C_{\sigma, \tau}\} / \sim = H^2(G/G^0, Z(G^0)) \quad \text{とおく.}$$

次のような exact sequence を考える。但し  $Z = Z(G^0)$ .

$$0 \rightarrow K_Z \rightarrow Z \rightarrow Z/K_Z \rightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

これから long exact sequence を作ると,

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(G/G_0, K_Z) \rightarrow H^0(G/G_0, Z) \rightarrow H^0(G/G_0, Z/K_Z) \\ &\rightarrow H^1(G/G_0, K_Z) \rightarrow H^1(G/G_0, Z) \rightarrow H^1(G/G_0, Z/K_Z) \\ &\rightarrow H^2(G/G_0, K_Z) \rightarrow H^2(G/G_0, Z) \rightarrow H^2(G/G_0, Z/K_Z) \rightarrow \cdots \\ &\hspace{15em} (\text{exact}) \end{aligned}$$

となる.

さて 実質的に  $K_Z$  が  $Z$  の torsion part 中  $Z/K_Z$  は torsion free, 実質 (すぐわかることだが)  $\mathbb{R}$ -vector space と同型になる。 ところで 次のことが知られている.

$$H^i(\text{有限群}, \mathbb{R}^n) = 0 \quad (i > 0).$$

これを使うと  $H^1(G/G_0, Z/K_Z) = H^2(G/G_0, Z/K_Z) = 0$  中  $Z$

$$H^2(G/G_0, K_Z) \cong H^2(G/G_0, Z)$$

が得られる.

即ち, 代表系をとりかえて,  $C_{\sigma, \tau} \in K_Z$  とできる.

$$[\sigma\tau] = [\sigma][\tau] C_{\sigma, \tau}, \quad C_{\sigma, \tau} \in K_Z$$

そこで  $\bigcup_{\sigma \in G/G^0} [\sigma]K_Z = K'_Z$  を考える。

$K_Z$  は torsion 全体で 特性部分群 である

$$[\sigma]K_Z [\tau]K_Z = [\sigma][\tau]K_Z = [\sigma\tau]K_Z$$

故に  $K'_Z$  が compact group になっている。

さて  $G^0$  の maximal compact subgroups の全体は  $G^0$  が連結ゆえ classical な E. Cartan の定理によりすべて共役で  $G^0/K^0$  と同型になっている ( $K^0$  は  $G^0$  の max. compact subgroup). しかもこれは complete, simply-connected な Riemann manifold しかも negative curvature をもつ。

しかも compact 群  $K'_Z$  が  $K^0 \mapsto kK^0k^{-1}$  ( $k \in K'_Z$ ) によって作用する。

一般に complete, simply connected な negative curvature をもつ Riemann 多様体には compact 群が作用すれば不動点をもつことが知られている。(Helgason の教科書参照)  
そこで、その不動点を  $K^0$  とする。

$K = K^0 K'_Z$  とおく。不動点 ということとは

$\forall k \in K'_2$  に対し  $kK^0k^{-1} = K^0$  であるから

$K$  は群. しかも compact である ( $K^0, K'_2$  は compact  $\rightarrow K^0 \times K'_2$  compact  $\rightarrow$  その連続像  $K = K^0 K'_2$  も compact)

しかも この compact 群  $K$  は lemma 2 のすべての条件を満たす. 共役に関しては

$$G/K \simeq G^0/K^0 \quad (\text{Riemann 多様体として})$$

であるから E. Cartan の古典的な結果がそのまま使える.

//

## §2. 概均質ベクトル空間の構造

定義 1.  $G$  を 代数群,  $V$  を 有限次元ベクトル空間,  
 $\rho: G \rightarrow GL(V)$  を 表現 とする。このとき,  
 $(G, \rho, V)$  が 概均質ベクトル空間 (prehomogeneous  
 vector space, P.V. と略記) とは,  $V$  の点  $v_0$  で  
 $G \cdot v_0$  が  $V$  の open set になるものが存在することである。  
 以下 この  $G \cdot v_0$  を  $O_0$  と書く:  $Gv_0 = O_0$ .

2.  $f \in V$  上の 恒等的には 零ではない有理関数 とする。  
 $f$  が 相対不変式 (relative invariant) であるとは  
 指標  $\phi \in \text{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$  が存在して  $f(gv) = \phi(g)f(v)$   
 $(g \in G)$  が有理関数として成り立つことで,  $\phi$  を  $f$  に  
 対応する 指標 (character) といい,  $f \leftrightarrow \phi$  と略記する。

Lemma 1.  $(G, \rho, V)$  を P.V. とする。

(i)  $f_1 \leftrightarrow \phi, f_2 \leftrightarrow \phi \Rightarrow f_1 = f_2 \times \text{constant}$ .

(ii) 相対不変式は 斉次式

$$\begin{aligned} \text{ii)} \quad \left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad f_1(gv) &= \phi(g)f_1(v) \\ f_2(gv) &= \phi(g)f_2(v) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left( \frac{f_1}{f_2} \right)(gv_0) = \left( \frac{f_1}{f_2} \right)(v_0) (= \text{constant}) \\ (v_0 \in O_0) \end{aligned}$$

即ち  $\frac{f_1}{f_2} \equiv c$  on  $G u_0 \subset \bigcup_{\text{open}} V$ . open set 上 constant と

なる有理関数は全体で constant, 即ち  $f_1 = c f_2$ .

(ii)  $\forall c \in \mathbb{C}^\times$  に対し,  $f \leftrightarrow \phi$  なる  $F_c \leftrightarrow \phi$ , 但し  $F_c(u) = f(cu)$ , 従って (i) より  $f(cu) = c' f(u)$ , これは  $f$  が斉次式であることを意味している. //

この Lemma 1 は簡単だが, 概均質ベクトル空間の理論の基礎になるものである.

以下  $G = \text{reductive}$  な代数群 (連結とは仮定しない),

$K(\subset G) = \text{maximal compact subgroup}$  (Appendix で証明したように reductive 群  $G$  には, 必ず存在する)

$f = \text{相対不変式}$ ,  $f \leftrightarrow \phi$

$\Omega = f^{-1}(\mathbb{C}^\times) = \{f \neq 0\}$ : affine variety (cf. §1, Lemma 1) とする.

Lemma 2.  $\Omega$  内の  $G$ -orbit  $O_1$  で Zariski-closed in  $\Omega$  であるものが, 唯一つ存在する.

$\therefore$  (存在)  $O_1$  を  $\Omega$  内の  $G$ -orbit で次元が最小のもの

とする.  $\overline{O}_1$  を  $O_1$  の Zariski-closure in  $\Omega$  とすると,  $G$  は

$\overline{O}_1$  にも作用するから  $\overline{O}_1 = O_1 \cup O' \cup O'' \cup \dots$  と  $G$ -orbits に

分解することかできるが,  $O' \cup O'' \cup \dots \subset \overline{O_1} = O_1$  中  
 $O', O'', \dots$  等は  $G$ -orbits で  $\dim O' \leq \dim O_1, \dots$  となっ  
 ている. ところが次元を最小にとっているから, このような  $O', O'', \dots$  は  
 存在しない. 即ち  $\overline{O_1} = O_1$ .

(一意性)  $O_1, O'_1$  が  $\Omega$  内の  $G$ -orbits で Zariski-closed  
 in  $\Omega$ ,  $O_1 \neq O'_1$  (従って  $O_1 \cap O'_1 = \emptyset$ ) とする.

このとき  $\varphi \in C[\Omega]$  で,  $\varphi|_{O_1} \equiv 1$ ,  $\varphi|_{O'_1} \equiv 0$  とする  
 ものが存在する. (これは Hilbert 零点定理を使って次のように示せる.)

$\mathcal{I}(O'_1) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in \mathcal{O}[X_1, \dots, X_n]; \varphi|_{O'_1} \equiv 0 \} = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$  とすると,

$\{ a \in V; \varphi_1(a) = \dots = \varphi_N(a) = 0 \} = \overline{O'_1} = O'_1$  で  $O_1 \cap O'_1 = \emptyset$  中

$O_1$  の点で  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  の共通零点になるものは存在しない. 従って

$(\varphi_1, \dots, \varphi_N) \equiv (1) \pmod{\mathcal{I}(O_1)}$  即ち  $\varphi = a_1 \varphi_1 + \dots + a_N \varphi_N$  なる

形の元で  $\varphi \equiv 1 \pmod{\mathcal{I}(O_1)}$  なるものが存在する. このとき

$\varphi|_{O_1} \equiv 1$ ,  $\varphi|_{O'_1} \equiv 0$  とする.)

次に  $\varphi_1(u) = \int_K \varphi(ku) dk$  とおく.  $dk$  は compact 群  $K$  の

上の normalized Haar measure である.

$\forall k' \in K$  に対して,  $\varphi_1(k'u) = \int_K \varphi(kk'u) dk = \int_K \varphi(ku) dk$

$= \varphi_1(u)$  を得る.

$\varphi_i(k'u) = \varphi_i(u) \ (\forall k' \in K)$  というのは,  $K$  の元  $k'$  が  
ある多項式関係を満たしている ということ,  $K$  は  $G$  内で  
Zariski-dense であつたから, この多項式関係は  $G$  まで  
自動的にのびて  $\varphi_i(gu) = \varphi_i(u) \ (\forall g \in G)$  が得られる.  
(  $K \subset \{g \in G; \varphi_i(gu) = \varphi_i(u)\} = \text{Zariski-closed}$  で両辺の closure  
をとれば  $\bar{K} = G$  より, 得られる )

このやり方は *unitarian trick* といわれている。

さて  $\varphi_i(gv_0) = \varphi_i(v_0) = c \ (\forall g \in G)$  より

$\varphi_i \equiv c$  on  $Gv_0 \underset{\text{dense}}{\subset} \Omega$ , 従つて  $\varphi_i \equiv c$  on  $\Omega$  とする.

ところが,  $v \in O_1$  なる,  $kv \in O_1$ , 従つて  $\varphi_i(kv) = 1$  かつ

$$\varphi_i(v) = \int_K \varphi_i(kv) dk = \int_K 1 dk = 1$$

同様に,  $v \in O'_1$  なる  $\varphi_i(v) = 0$ , これは  $\varphi_i \equiv c$  に反する.

// Lem 2

さて,  $(G, \rho, V)$  に対し, 相対不変多項式  $f, \phi, \Omega = f^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ ,

$O_0 = \text{open orbit}, O_1 (= \text{closed in } \Omega)$

$V$  の basis を  $u$  とつ とると

$\rho: G \rightarrow GL(V) \cong GL_n(\mathbb{C})$  で,  $K$  を  $G$  の maximal  
compact subgroup とすると  $\rho(K)$  は  $GL_n(\mathbb{C})$  の

compact subgroup かつ  $GL_n(\mathbb{C})$  のある maximal compact subgroup (これは  $AU_nA^{-1}$ ,  $\exists A \in GL_n(\mathbb{C})$  の形) に含まれる.

即ち  $P(K) \subset AU_nA^{-1}$ .

basis をとりかえて,  $P(K) \subset U_n$  としてよい.

以下 同様に約束する。

$V^\vee$  を  $V$  の dual space  $\text{Hom}_{\mathbb{C}}(V, \mathbb{C})$  とし,

$\langle \rangle: V^\vee \times V \rightarrow \mathbb{C}$  を 自然な pairing (即ち  $\langle f, u \rangle = f(u)$ ) とする.

$V$  の basis  $\{v_1, \dots, v_n\}$  に対し  $\{v_1^\vee, \dots, v_n^\vee\}$  を  $V^\vee$  の dual basis とする。これにより

$P^\vee: G \rightarrow GL_n(V^\vee) \cong GL_n(\mathbb{C})$  と同一視すれば,

$P^\vee(g) = {}^t P(g)^{-1}$  となる。

とくに  $\forall k \in K(\subset G)$  に対して,  $P^\vee(k) = {}^t P(k)^{-1} = \overline{P(k)}$

となる ( $P(K) \subset U_n$  による)。これにより, 複素共役をとれば,

$(G, P^\vee, V^\vee)$  に対し,  $f^\vee, \phi^\vee, \Omega^\vee, O_0^\vee, O_i^\vee$  等が得られる。

例として  $f^\vee$  を構成してみよう。

$f(x_1, \dots, x_n) = \sum c_{\bar{i}_1 \dots \bar{i}_n} x_1^{\bar{i}_1} \dots x_n^{\bar{i}_n}$  に対して

$f^\vee(x_1, \dots, x_n) = \sum \bar{c}_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$ , 従って

$k \in K$ ,  $v^v \in V^v$  に対して

$$f^v(kv^v) = \overline{\phi(k)} f^v(v^v)$$

$\phi(K)$  は  $\mathbb{C}^\times$  の compact subgroup かつ  $\phi(K) \subset \{z; |z|=1\}$

従って  $\overline{\phi(k)} = \phi(k)^{-1}$  ( $k \in K$ ) 即ち

$f^v(kv^v) = \phi(k)^{-1} f^v(v^v)$ . これは代数関係中の unitarian trick により

$f^v(gv^v) = \phi(g)^{-1} f^v(v^v)$  ( $g \in G$ ,  $v^v \in V^v$ ) が成り立つ.

$\therefore \phi^v = \phi^{-1}$  以上をまとめて,

Lemma 3.  $\deg f^v = \deg f$ ,  $\phi^v = \phi^{-1}$

//

### b-函数

$f \leftrightarrow \phi$  なる  $f^s \leftrightarrow \phi^s$  ( $s$  は自然数, としておく).

さて  $\begin{cases} f^{s+1} \leftrightarrow \phi^{s+1} \\ f^v \leftrightarrow \phi^{-1} \end{cases}$  かつ  $f^{s+1}$  と  $f^v$  をうまく組み合わせ

せれば  $\phi^s$  に対応する相対不変式が作れそうで, もし作れれば

それは  $f^s$  と定数倍しか違わないから, 何か関係式が得られそうで

あるか, 実際, 次のことが成り立つ.

Lemma 4.  $f^v(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) f(x_1, \dots, x_n)^{s+1} = b(s) f(x_1, \dots, x_n)^s$

実際  $f^v(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}) f(x_1, \dots, x_n)^{s+1}$  は  $\phi^s$  に対応する相対不変式であり、従って  $f(x_1, \dots, x_n)^s$  と定数倍除いて一致する。その定数は  $s$  に依存するから  $b(s)$  と書く。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)^{s+1} = (s+1) f(x_1, \dots, x_n)^s \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x_1, \dots, x_n)^{s+1} = (s+1)s f(x_1, \dots, x_n)^{s-1} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} + (s+1) f(x_1, \dots, x_n)^s \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

etc. ゆえ  $b(s)$  は  $s$  に関して高々  $d$  次 ( $d = \deg f^v = \deg f$ )

の多項式である:  $b(s) = b_0 s^d + b_1 s^{d-1} + \dots + b_d \in \mathbb{C}[s]$

(一応、今は  $b_0 = 0$  の可能性も入れておく)。

この  $b(s)$  を  $b$  函数 とする。

記号  $\text{grad} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$

$$\text{grad} \log f = (\frac{\partial \log f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \log f}{\partial x_n})$$

$$= (\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_n}) = \frac{1}{f} \text{grad} f.$$

さて  $\text{grad} \log f \in \Omega = \{f \neq 0\}$  から  $V^v$  への写像と

考える:  $\text{grad} \log f: \Omega \rightarrow V^v$ .

Exercise 1. このとき,  $\text{grad log } f$  は  $G$  の作用と可換である。

Lemma 5 (i)  $f^v((\text{grad log } f)(v)) = b_0 f(v)^{-1} (v \in \Omega)$

(ii)  $b_0 \neq 0$

(i) Lemma 4 のあとの説明をみれば,

$$\frac{\partial^k}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} f^{s+1} = s^k \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial f}{\partial x_{i_k}} f^{s+1-k} + o(s^k)$$

が成り立つことが容易にわかる。従って

$$f^v\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) f^{s+1} = s^d f^v\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) f^{s+1-d} + o(s^d)$$

$$= b(s) f^s = b_0 s^d f^s + o(s^d)$$

$$\text{故に } f^v\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) f^{s+1-d} = b_0 f^{s+1-1}$$

$$\Rightarrow f^v\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right) f^{-d} = b_0 f^{-1}$$

$$\parallel \\ f^v\left(\frac{1}{f} \text{grad } f\right) = f^v(\text{grad log } f)$$

(ii) これは, M. Sato-T. Kimura, Nagoya Math. J. (1977) P. 72 を参照. //

Lemma 5 より  $\text{grad log } f(\Omega) \subset \Omega^v$  がわかった。

記号  $F = \text{grad log } f : \Omega \rightarrow \Omega^v$

$$F^v = \text{grad log } f^v : \Omega^v \rightarrow \Omega$$

$\mathcal{G} = \text{Lie}(G)$  とする。

Lemma 6. (i)  $\langle F(u), Au \rangle = \phi(A)$  ( $u \in \Omega$ ,  $A \in \mathcal{G}$ )

( $\phi$  は  $G$  の character であったが, 約束により 対応する  $\mathcal{G}$  の character も同じ  $\phi$  で表したことに注意)

(ii)  $\langle F^\vee F(u) - u, AF(u) \rangle = 0$  ( $u \in \Omega$ ,  $A \in \mathcal{G}$ )

(iii)  $F^\vee F(u) - u \in (T_{F(u)}F(\Omega))^\perp$  if  $F(u) \in F(O_0)$

$$\text{但し } T_{F(u)}F(\Omega) \subset T_{F(u)}V^\vee = V^\vee$$

$$\quad \quad \quad \uparrow \text{dual}$$

$$(T_{F(u)}F(\Omega))^\perp \subset V$$

(i)  $f(\exp tA \cdot u) = \phi(\exp tA)f(u)$

の両辺を  $t$  で微分して  $t=0$  とおくと,

$$\text{左辺} \rightarrow \sum_{j=1}^n \left. \frac{d(\exp tA \cdot u)_j}{dt} \right|_{t=0} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$$

$$\left( \text{ここで } \exp tA \cdot u = u + \frac{tAu}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} u + \dots \right)$$

$$= \sum_{j=1}^n (Au)_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} = \langle \text{grad } f, Au \rangle$$

$$\text{右辺} \rightarrow \phi(A)f(u)$$

$$\therefore \langle \frac{1}{f} \text{grad } f, Au \rangle = \phi(A)$$

$$\stackrel{\parallel}{\parallel} \langle \text{grad } \log f(u), Au \rangle = \langle F(u), Au \rangle$$

(ii) (i) を dual の方に適用すれば

$$\langle F^v(v^v), Av^v \rangle = -\phi(A) \text{ を得る. } v^v = F(v)$$

を代入すると,  $\langle F^v F(v), AF(v) \rangle = -\phi(A)$  とある.

$$\text{一方 } \langle v, AF(v) \rangle = -\langle Av, F(v) \rangle$$

$$\stackrel{(i)}{=} -\phi(A)$$

$$\text{これより } \langle F^v F(v) - v, AF(v) \rangle = 0$$

(iii) (ii) より  $F^v F(v) - v \in (G \cdot F(v))^\perp$  を得る.

$F(v) \in F(O_0)$  より  $v' \in O_0$  で  $F(v) = F(v')$  とあるもの

がある。そこで

$$G \cdot F(v) = T_{F(v)}(G \cdot F(v)) = T_{F(v)} G F(v')$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} T_{F(v)} F(Gv') = T_{F(v)} F(O_0)$$

$F$  は  $G$  の作用と可換 (Ex. 1)

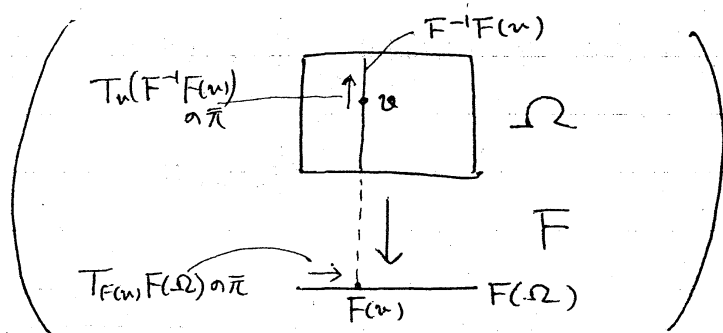
$$(O_0 \subset \underset{\text{open}}{\Omega} \text{ かつ } ^{(*)}) = T_{F(v)} F(\Omega)$$

$$\text{即ち, } F^v F(v) - v \in (T_{F(v)} F(\Omega))^\perp$$

// Lemma 6.

(\*)  $\underset{\text{open}}{F(O_0)} \subset F(\Omega)$  の証明, Hilbert's second theorem (cf. R. Steinberg: SLN 366, p. 14) により  $F(O_0)$  は  $\overline{F(O_0)}$  (i.e.  $V^v$  における Zariski closure) ( $\supset F(\Omega)$ ) における open set  $U (\neq \emptyset)$  を含む。そこで  $v_0 \in O_0$  を  $F(v_0) \in U \subset F(O_0)$  にとり,  $\forall v \in O_0$  に対し,  $v = gv_0$  なる  $g \in G$  をとておくと,  $F(v) = g F(v_0) \in gU \subset gF(O_0) = F(O_0)$  即ち  $F(O_0)$  は  $F(v)$  の  $\overline{F(O_0)}$  における近傍, 従って  $F(O_0) \stackrel{\text{open}}{\subset} \overline{F(O_0)}$  故に  $F(O_0) \subset F(\Omega)$  open. 尚, 最終的に定理 A より  $F$  は projection  $P$  と同一視できるから open map であることがわかる。

Lemma 7  $v \in O_0$  に対して  $T_v(F^{-1}F(u)) = (T_{F(u)}F(\Omega))^\perp$



∴)  $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in T_v(F^{-1}F(u))$  ということは,  $u$  に於る写像の微分  $(dF)_u$  の kernel の方向に入っているということ, 即ち  $(dF)_u(a) = 0$  と同値だが,  $F = \text{grad } \log f = \left( \frac{\partial \log f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \log f}{\partial x_n} \right)$  ゆえ, 座標で表わせば,

$$\left( -\frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(u) \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0 \text{ とする. これを言い換えては,}$$

$$\forall b = (b_1, \dots, b_n) \in V \text{ に対して, } (b_1, \dots, b_n) \left( \frac{\partial^2 \log f}{\partial x_i \partial x_j}(u) \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = 0$$

と同じであるが, 見方を変えて前二つを組んで考えれば

$$(dF)_u(V) \perp a \quad (a \in (dF)_u(V) \text{ が直交している}) \text{ を得る.}$$

さて  $u \in O_0 (= \text{open orbit})$  ゆえ  $V = T_u V = T_u G \cdot u$

$G \rightarrow G \cdot u, G \rightarrow GF(u)$  は submersion (即ち

写像の微分が全射) ゆえ  $G \cdot u \rightarrow GF(u)$  も submersion,

即ち  $T_u G \cdot u \rightarrow T_{F(u)} GF(u) = T_{F(u)} F(G \cdot u)$  は全射.

即ち  $(dF)_u(V) = T_{F(u)} F(G \cdot u)$  であるが,  $G \cdot u$  は

$\Omega$  の open set 中  $T_{F(u)} F(\Omega) = T_{F(u)} F(G, u)$

結局  $a \in T_u(F^{-1}F(u)) \iff a \in ((dF)_u(V))^\perp$

$$= (T_{F(u)} F(\Omega))^\perp$$

// Lemma 7

Lemma 8. (i)  $\forall u \in O_0$  に対して,  $F^{-1}F(u) \supset u + (T_{F(u)} F(\Omega))^\perp$

$$(ii) \quad \Omega^\vee \supset F(\Omega) \xrightleftharpoons[F]{F^\vee} F^\vee(\Omega^\vee) \subset \Omega$$

は互いに逆対応である。

∴

(i)  $u \in O_0$  に対して,  $O_0 \cap F^{-1}F(u)$  の tangent space はどの点で考えても一定で Lemma 7 により  $(T_{F(u)} F(\Omega))^\perp$  に等しい。さて variety で tangent space が一定ということとは曲がっていないということも意味する。ちよとでも曲がれば

tangent vector は、あっち向いたりこっち向いたりするわけで、まっすぐでなければいけない。  $u \in O_0 \cap F^{-1}F(u)$  である

から、以上のことより,  $(T_{F(u)} F(\Omega))^\perp$  の open dense subset  $U$  が存在して,  $u + U \subset O_0 \cap F^{-1}F(u)$  となる。

一方,  $\forall u' \in F^{-1}(F(u))$  に対して,  $f(u) = f(u')$  となる。

実際,  $F(u') = F(u)$  より, Lemma 5 により,  $b_0 f(u')^{-1} = f^\vee(F(u')) = f^\vee(F(u)) = b_0 f(u)^{-1}$  が成り立つ。

従って定数  $c$  で,  $F^{-1}(F(v)) \subset f^{-1}(c)$  となるものが存在する。

さて  $F^{-1}(F(v))$  は closed in  $\Omega$  である。(実際  $F: \Omega \rightarrow V^v$

は連続で一変  $F(v) \in V^v$  は closed ゆえ, その逆像  $F^{-1}(F(v))$  も

closed である。) 従って,  $F^{-1}(F(v))$  は closed in  $f^{-1}(c)$

( $\subset \Omega$ ) となるが,  $f^{-1}(c)$  は  $V$  の closed subset であるから

$F^{-1}(F(v))$  は closed in  $V$  となる。 さて,

$$F^{-1}(F(v)) \supset O_0 \cap F^{-1}(F(v)) \supset v + U \quad \text{で}$$

$F^{-1}(F(v))$  は Zariski-closed in  $V$  ゆえ, 両辺の (Z)-closure

$$\text{をとると, } F^{-1}F(v) \supset \overline{v+U} = v + (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp}$$

を得る。

(ii)  $v \in O_0$  に対し, Lemma 6 の (iii) と Lemma 8 の (i)

$$\text{により, } F^v F(v) \in v + (T_{F(v)}F(\Omega))^{\perp} \subset F^{-1}(F(v)),$$

即ち,  $FF^v F(v) = F(v)$  ( $\forall v \in O_0$ ) となり,

$FF^v = \text{id}_{F(O_0)}$  であるが,  $F(O_0)$  は  $F(\Omega)$  の中の

open dense subset であるから,  $FF^v = \text{id. on } F(\Omega)$

を得る。  $F^v F = \text{id. on } F^v(\Omega^v)$  も同様にして

得られる。 // Lemma 8.

Lemma 9  $F(\Omega)$  は smooth な affine variety であり、  
 しかも Zariski-closed in  $\Omega^\vee$  である。

$\therefore$  Lemma 8 の (ii) より,  $F(\Omega) = \{u^\vee \in \Omega^\vee \mid u^\vee = FF^\vee(u^\vee)\}$   
 であるが,  $u^\vee = FF^\vee(u^\vee)$  は代数関係ゆえ,  $F(\Omega)$  は  
 Zariski-closed in  $\Omega^\vee$  ところが  $\Omega^\vee$  は affine variety  
 (cf. §1, Lemma 1) であつたから,  $F(\Omega)$  は affine variety  
 である。さて,

$$(dF)_{F^\vee(u^\vee)}(V) \supset (dF)_{F^\vee(u^\vee)}(T_{F^\vee(u^\vee)}F^\vee(\Omega)) = T_{u^\vee}F(\Omega)$$

一方  $F(\Omega) \leftarrow F\Omega$  を考えると

$$T_{u^\vee}F(\Omega) \supset (dF)_{F^\vee(u^\vee)}(T_{F^\vee(u^\vee)}\Omega) = (dF)_{F^\vee(u^\vee)}(V)$$

$$\therefore T_{u^\vee}F(\Omega) = (dF)_{F^\vee(u^\vee)}(V) \quad \text{とくに}$$

$\dim T_{u^\vee}F(\Omega) = \dim (dF)_{F^\vee(u^\vee)}(V)$  が成り立つが

tangent space の次元は特異点があれば突然

はねあがるか, さがることはない。一方  $(dF)_{F^\vee(u^\vee)}$  の次元は

Jacobian の rank であるから, rank のさがるところで

その次元はさがるか, はねあがることはない。たゞ

$\dim T_{u^\vee}F(\Omega)$  は定数, 即ち  $F(\Omega) = \text{smooth}$ . // Lem 9

Lemma 10.  $\left( \frac{\partial^2 \log f^v}{\partial y_i \partial y_j}(u^v) \right) \Big|_{T_{u^v} F(\Omega)}$  は  $T_{u^v} F(\Omega)$  上は  $G_{u^v}$ -invariant, non-degenerate, symmetric bilinear form を定める.

$\therefore$ ) non-degenerate のみを示せば十分 (他は易しい)

$$\begin{array}{ccc} T_{u^v} V^v & \xrightarrow{(dF^v)_{u^v}} & T_{F^v(u^v)} V \\ \cup & & \cup \end{array}$$

$$T_{u^v} F(\Omega) \xrightarrow{\sim} T_{F^v(u^v)} F^v(\Omega^v) \quad \text{で,}$$

$$(dF^v)_{u^v} \Big|_{T_{u^v} F(\Omega)} \text{ を 座標 で かけば, } \left( \frac{\partial^2 \log f^v}{\partial y_i \partial y_j}(u^v) \right) \Big|_{T_{u^v} F(\Omega)}$$

$$\text{が 得られる. よって } \det \left( \frac{\partial^2 \log f^v}{\partial y_i \partial y_j}(u^v) \right) \neq 0. \quad // \text{ Lemma 10.}$$

Lemma 11 (Luna, Inv. Math. 1972)

$G$  = reductive 代数群,  $X$  = smooth affine variety, で

$G$  が  $X$  に作用しているとする。しかも,  $\forall x \in X$  に対し,  $T_x X$

上は  $G_x$ -inv. non-deg. symmetric bilinear form が

あれば  $X \supset \bigcup$  subset で (1) open, dense in

(2)-topology (2)  $G \bigcup = \bigcup$  (3)  $\forall x \in \bigcup$  に対し

$G \cdot x$  = closed in  $X$ .

定理 A (i)  $F(\Omega) = F(O_0) = \Omega^\vee$

(ii)  $O_1 \xrightleftharpoons[F^\vee]{F} O_1^\vee$  逆対応.

(iii)  $O_1^\vee$  の conormal bundle  $\Xi(TO_1^\vee)^\perp$  とする:

$$(TO_1^\vee)^\perp = \{(u, v^\vee) \in V \times O_1^\vee \mid v^\vee \in (T_{u^\vee} O_1^\vee)^\perp\}.$$

$$\Xi(u, v^\vee) = u + F^\vee(v^\vee) \quad (u \in V) \quad \text{とおく}$$

$$(TO_1^\vee)^\perp \xrightarrow{\Xi} \Omega$$

$$\begin{array}{ccc} & \curvearrowright & \swarrow F \\ \downarrow P & & \searrow \\ \text{projection} & & O_1^\vee \end{array} \quad \left( G \text{ 作用と可換} \right)$$

特に,  $\Omega$  は  $O_1^\vee$  の conormal bundle と完全に同一視できる.

証明) (i) Lemmas 9, 10, 11 により  $F(\Omega) \supset U$  で

① open, dense, ②  $G \cdot U = U$  ③  $G \cdot x = \text{closed in } F(\Omega)$

( $\forall x \in U$ ), とあるものがある。ところで  $F(O_0)$  も  $F(\Omega)$

の open, dense subset である。従って  $U \cap F(O_0) \neq \emptyset$  ゆえ,

$U \cap F(O_0) \ni v^\vee$  とする。(F は G の作用と可換だから)

$G \cdot v^\vee = F(O_0)$  で ③より, これは closed in  $F(\Omega)$ .

$F(O_0) = \text{dense in } F(\Omega)$  でもあるから,  $F(O_0) = F(\Omega) \subset \Omega^\vee$ .

Lemma 9 より,  $F(\Omega)$  は  $\Omega^\vee$  内で Zariski-closed ゆえ,  $F(O_0)$

$= G \cdot v^\vee$  は  $\Omega^\vee$  内の closed orbit. Lemma 2 より closed

orbit は  $O_1^\vee$  唯一つであるから  $F(O_0) = F(\Omega) = O_1^\vee$  を得る.

(ii) は (i) と Lemma 8 の (ii) より明らか.

(iii)  $G$  作用 と 可換 というところは殆ど明らかであるから

他の部分を示す.

$u^\vee \in O_1^\vee$ ,  $u \in F^{-1}(u^\vee)$  とすると,  $F(u) = u^\vee \in O_1^\vee = F(O_0)$

ゆえ Lemma 6 の (iii) が使えて,

$$F^\vee F(u) - u \in (T_{F(u)} F(\Omega))^\perp \quad \text{即ち}$$

$$u \in F^\vee u^\vee + (T_{u^\vee} F(\Omega))^\perp \quad (\forall u \in F^{-1}(u^\vee)) \text{ となり}$$

$$(*) \quad F^{-1}(u^\vee) \subset F^\vee u^\vee + (T_{u^\vee} F(\Omega))^\perp \text{ を得る。}$$

他方,  $u^\vee \in F(O_0)$  ゆえ  $u' \in O_0$  で  $u^\vee = F(u')$  とする

ものがある。この  $u' \in O_0$  に対し Lemma 8 の (i) が使えて,

$$F^{-1}F(u') \supset u' + (T_{F(u')} F(\Omega))^\perp \text{ を得る。}$$

$u^\vee = F(u')$  ゆえ

$$(**) \quad F^{-1}(u^\vee) \supset u' + (T_{u^\vee} F(\Omega))^\perp \text{ となる。}$$

(\*) と (\*\*) をあわせると,  $F^\vee u^\vee + (T_{u^\vee} F(\Omega))^\perp$  と

$u' + (T_{u^\vee} F(\Omega))^\perp$  は 同じ次元の affine space で

包含関係があるから一致することを使えば,

$$F^{-1}(u^\vee) = F^\vee u^\vee + (T_{u^\vee} F(\Omega))^\perp \text{ を得る。}$$

(i)より  $F(\Omega) = O_1^V$  かつ  $F^{-1}(u^V) = F^V u^V + (T_{u^V} O_1^V)^+$   
 $= F^V u^V + P^{-1}(u^V)$ . さて  $\Phi(u, u^V) = F^V u^V + u$   
 かつ  $F^V u^V + P^{-1}(u^V) = \Phi(P^{-1}(u^V))$ , 即ち

$P^{-1}(u^V) \xrightarrow[\sim]{\Phi} F^{-1}(u^V) \subset \Omega$  となり可換性がいえた.

$\Psi(u) = (u - F^V F(u), F(u))$  とおくと  $\Phi^{-1} = \Psi$

となり  $\Psi$  は同型である.

// Fr. A

## §3 D-module

ここでは §4 で必要な解析の準備をする。

$V = \mathbb{C}^n$  : affine space, とみて その上の関数環

$A = \mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$  とする. これに対して

operator ring  $D$  を

$D = D(V) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}]$  とする. 但し

$x_i : \varphi \mapsto x_i \varphi$ ,  $\frac{\partial}{\partial x_i} : \varphi \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}$  なる operator を

表す (ここで  $\varphi$  の範囲は必要に応じて決めることにする. 即ち

$D$  の元は抽象的な operator たちである)

$P, Q \in D$  に対して,  $[P, Q] = PQ - QP$  とおくと

$$[x_i, x_j] = 0, \quad \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, x_j \right] = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad \text{が 成り立つ.}$$

むしろ,  $D$  を生成元がこれ等の関係式をみたす抽象的な

$\mathbb{C}$ -algebra と考えてもよい。

感じがわかるように  $\left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, x_i \right] = 1$  を示してみよう。

$$\text{実際 } \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, x_i \right] \varphi = \left( \frac{\partial}{\partial x_i} x_i - x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \varphi$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} (x_i \varphi) - x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \varphi + x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} - x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = 1 \cdot \varphi \quad //$$

$D$  の元  $P$  を differential operator (微分作用素) と言う.

それは,

$$P = \sum_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n \geq 0} a_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n}(x) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\bar{i}_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\bar{i}_n}$$

$$a_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n}(x) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

の形をしている. 今,

$$P_j = \sum_{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n = j} a_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n}(x) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\bar{i}_1} \cdots \left( \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{\bar{i}_n} \quad \text{と おく}$$

$P = P_0 + P_1 + \dots + P_r$  ( $P_r \neq 0$ ) と表わせる. このとき

$r$  を  $P$  の order といい,  $r = \text{ord } P$  と表わす. そして,

$$\sigma(P) = \sum_{\bar{i}_1 + \dots + \bar{i}_n = r} a_{\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_n}(x) y_1^{\bar{i}_1} \cdots y_n^{\bar{i}_n} \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n] = \mathbb{C}[V \times V^*]$$

を  $P$  の principal symbol と言う. ( $x_1, \dots, x_n \in V$ ,

$y_1, \dots, y_n \in V$  の dual  $V^*$  の座標関数 とする)

定義.  $M = A$ -module ( $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ),  $m \in M$

とするとき  $m$  の annihilator は  $A$  の ideal にちる.

$$\text{Ann}_A(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{ a \in A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \mid am = 0 \} \subset_{\text{ideal}} A$$

$$\text{Supp}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in V \mid a(v) = 0 \text{ for } \forall a \in \text{Ann}_A(m) \}$$

これを  $m$  の support と言う.  $\text{Supp}(M) = \bigcup_{m \in M} \text{Supp}(m)$  を

$M$  の support とは.

定義  $M = D$ -module,  $m \in M$  に対して

$$\text{Ann}_D(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{P \in D \mid Pm = 0\} \underset{\text{left ideal}}{\subset} D$$

$$\text{ch}(m) \stackrel{\text{def}}{=} \{(v, v^v) \in V \times V^v \mid \sigma(P)(v, v^v) = 0 \text{ for } \forall P \in \text{Ann}_D(m)\}$$

これを  $m$  の characteristic variety とする.

$\text{ch}(M) = \bigcup_{m \in M} \text{ch}(m)$  を  $M$  の characteristic variety (特性多様体) とする.

$D$ -module  $M$  は  $A$ -module としても

あるから  $M$  に対して  $\text{Supp}(M)$ ,  $\text{Supp}(m)$  ( $m \in M$ ) 等も

定義されていることに注意しよう.

Lemma 1.  $M = D$ -module に対して,

(i)  $P \in D, m \in M$ , に対して  $\text{Supp}(Pm) \subset \text{Supp}(m)$ .

(ii)  $M = Du$  ならば,  $\text{Supp}(M) = \text{Supp}(u)$

∴ (i)  $\forall P \in D$  に対し  $\text{Supp}(m) \supset \text{Supp}(Pm)$  を示すには,

①  $\text{Supp}(m) \supset \text{Supp}(x_i m)$ , ②  $\text{Supp}(m) \supset \text{Supp}(\frac{\partial}{\partial x_i} m)$

③  $\text{Supp}(m_1) \cup \text{Supp}(m_2) \supset \text{Supp}(m_1 + m_2)$  を示せばよい.

① を示す.  $x \in \text{Ann}_A(m) \Rightarrow xm = 0 \Rightarrow x(x_i m) = x_i(xm) = 0$

$\Rightarrow x \in \text{Ann}_A(x_i m)$  即ち  $\text{Ann}_A(m) \subset \text{Ann}_A(x_i m)$ , よって

$\text{Ann}_A(m)$  の共通零点  $\text{Supp}(m)$  は  $\text{Ann}_A(x_i m)$  の共通零点  $\text{Supp}(x_i m)$

を含む:  $\text{Supp}(m) \supset \text{Supp}(x_i m)$ .

② を示す.  $a \in \text{Ann}_A(m) \Rightarrow 0 = \frac{\partial}{\partial x_i}(\underbrace{a^2}_0 m)$

$$= 2 \frac{\partial a}{\partial x_i} \underbrace{a^2}_0 + a^2 \frac{\partial m}{\partial x_i} \quad \text{i.e. } a^2 \frac{\partial m}{\partial x_i} = 0 \Rightarrow a^2 \in \text{Ann}_A\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)$$

今  $\varphi: \text{Ann}_A(m) \rightarrow \text{Ann}_A\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)$  とすると,  $\varphi(\text{Ann}_A(m)) \subset \text{Ann}_A\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right)$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ a & \longmapsto & a^2 \end{array}$$

ゆえ 共通零点を考えると  $\text{supp}\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right) \subset \varphi(\text{Ann}_A(m))$  の共通零点

$$= \left\{ v \in V \mid a^2(v) (= a(v)^2) = 0 \Leftrightarrow a(v) = 0 \text{ for } \forall a \in \text{Ann}_A(m) \right\}$$

$$= \text{Supp}(m) \quad \text{i.e. } \text{Supp}(m) \supset \text{Supp}\left(\frac{\partial m}{\partial x_i}\right).$$

③ を示す.  $\text{Ann}_A(m_1) \text{Ann}_A(m_2) \subset \text{Ann}_A(m_1 + m_2)$  ゆえ

$$\text{共通零点たちは, } \text{Supp}(m_1) \cup \text{Supp}(m_2) \supset \text{Supp}(m_1 + m_2)$$

となる.

$$(ii) \quad \text{Supp}(M) = \bigcup_{P \in D} \text{Supp}(Pu) \stackrel{(i)}{\subset} \text{Supp } u$$

$$\begin{array}{c} \subset \\ \uparrow \\ D \ni 1 \end{array} \bigcup_{P \in D} \text{Supp}(Pu) = \text{Supp}(M) \quad \text{i.e. } \text{Supp}(M) = \text{Supp } u.$$

Lemma 2.  $M = D$ -module に對して,

$$\text{ch}(M) \cap (V \times \{0\}) = \text{Supp}(M) \times \{0\} \quad (\subset V \times V^*)$$

$\therefore \forall m \in M$  に對して,  $\text{ch}(m) \cap (V \times \{0\}) = \text{Supp}(m) \times \{0\}$

を示せば  $\text{ch}(M) = \bigcup_{m \in M} \text{ch}(m)$ ,  $\text{Supp}(M) = \bigcup_{m \in M} \text{Supp}(m)$  によ

り十分である.  $J = \text{Ann}_D(m)$  とおくとき,

$$(v, 0) \in \text{ch}(M) \iff \sigma(P)(v, 0) = 0 \text{ for } \forall P \in J$$

(ここで, もし  $\text{ord } P = n > 0$  なら  $\sigma(P)(x, y)$  は  $y$  について  $n$  次同次多項式 であり常に  $\sigma(P)(v, 0) \neq 0$  が成り立つから, この条件は実質的には  $\text{ord } P = 0$  即ち  $P \in J \cap A$  についての条件である. 従って

$$\iff \sigma(P)(v, 0) = 0 \text{ for } \forall P \in J \cap A$$

$$\iff a(v) = 0 \text{ for } \forall a \in \text{Ann}_A(m) \iff v \in \text{Supp}(m)$$

// Lem 2

### Fourier 変換

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \forall P \in D \text{ に対し 定数 } C > 0$$

で  $|(P\varphi)(x)| < C \text{ on } \mathbb{R}^n \text{ となるものが存在する} \}$

の元を 急減少関数 といふ. どんな多項式 (多項式も  $D$  の元) を

かけても全体で定数でおさえられているわけだから、微分もこめて無限遠で非常に小さくなっている関数たちです。

従って積分の収束などがうまくいく。  $\varphi \in \mathcal{S}$  の

$$\text{Fourier 変換 } \mathcal{F}(\varphi)(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx \text{ を}$$

考えてみる。但し  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $y = (y_1, \dots, y_n)$  に対して

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad dx = dx_1 \cdots dx_n \text{ である。}$$

これは 5.7 の Fourier 変換だから  $\mathcal{F}(x_i \varphi)$ ,  $\mathcal{F}(\frac{\partial}{\partial x_i} \varphi)$  等を調べてみよう。

$$\mathcal{F}(x_i \varphi)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i \varphi(x) e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \frac{1}{\sqrt{-1}} \left( \frac{\partial}{\partial y_i} e^{\sqrt{-1}x \cdot y} \right) dx = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_i} (\mathcal{F}(\varphi)(y)).$$

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \sqrt{-1} y_i e^{\sqrt{-1}x \cdot y} dx \quad (\text{部分積分による})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}} y_i \mathcal{F}(\varphi)(y)$$

$$\text{即ち } \mathcal{F}(x_i \varphi) = \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_i} \mathcal{F}(\varphi), \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \frac{1}{\sqrt{-1}} y_i \mathcal{F}(\varphi)$$

となる。

これらをまとめて表わす為に operators の Fourier 変換 を,

$$\mathcal{F}(x_i) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \mathcal{F}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{-1}} y_i \quad \text{により}$$

定義すると,

$\mathcal{F}: D(V) \xrightarrow{\sim} D(V^*)$  が得られ,  $\mathbb{C}$ -algebra としての同型を与える。そして,

$$\boxed{\mathcal{F}(P\varphi) = \mathcal{F}(P) \mathcal{F}(\varphi)} \quad \text{なる関係が得られる。}$$

次に一般に  $M = D(V)$ -module に対して

$\mathcal{F}(M)$  を集合としては  $M$  と同じだが、次のようにして

$D(V^*)$ -module の構造を入れたものとする。

$m \in M$  を  $\mathcal{F}(M)$  の元と思うとき  $\mathcal{F}(m)$  と書くことに

$$\text{すれば, } \mathcal{F}(P) \mathcal{F}(m) = \mathcal{F}(Pm) \quad (P \in D(V), m \in M)$$

により,  $D(V^*)$ -module の構造を入れる。これがうまく

Fourier 変換というものをとらえている, と思われる

わけです。

Lemma 3 (i)  $E = \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$  とおく。  $c \in \mathbb{Z}$  と  $P \in D$

に対して、次の条件は同値

(a)  $P = \sum_{i_1, \dots, i_n - j_1 - \dots - j_n = c} a_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{j_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{j_n}$  とあらわせる。

(b)  $EP - PE = cP$

(ii)  $P \in D$  が  $\underbrace{\text{ある } c \in \mathbb{Z} \text{ に対して}}_{\text{か}} (i) \text{ の条件をみたす時、Fourier 変換により principal symbol は } \sigma(\mathcal{F}(P))(x, y) = \sigma(P)\left(\frac{x}{\sqrt{-1}}, \frac{y}{\sqrt{-1}}\right) \text{ とかわる。}$

(iii)  $m \in M$  が  $E_m \in \mathbb{C}m$  をみたす時、  $ch(\mathcal{F}(D_m)) = \sqrt{-1} ch(D_m)$ 。

Remark. 一般には、

$$\sigma(\mathcal{F}(P))(x, y) \neq \sigma(P)\left(\frac{x}{\sqrt{-1}}, \frac{y}{\sqrt{-1}}\right)$$

$$ch(\mathcal{F}(M)) \neq \sqrt{-1} ch(M).$$

たとえば、  $P = x^2 \frac{d}{dx} + x \frac{d^3}{dx^3}$  を考えてみて下さい。

以下で構成する  $D$ -module  $N_\alpha$  の生成元  $f^\alpha$  は、

$E f^\alpha \in \mathbb{C} f^\alpha$  をみたすことに注意。

さて  $f \in \mathbb{C}[V]$  に対して,  $B \subset f^{-1}\mathbb{C}^*$  なる open ball を考える. (open ball でなくても 単連結 ならばよいが 簡単の為 そのようにする).  $\lambda \in \mathbb{C}$  に対し,  $f^\lambda$  は 多価関数 だが,  $f^\lambda|_B$  は ある branch を とれば, 1価関数 になる. それを単に  $f^\lambda$  と書くことにする.

$D$ -係数の  $\lambda$  の 多項式 を  $D[\lambda]$  と記す. ( $P\lambda = \lambda P$  for  $\forall P \in D$  である)

そして  $N \stackrel{\text{def}}{=} D[\lambda]f^\lambda$  ( $\lambda \cdot f^\lambda = \lambda f^\lambda$ ) を考え,

$\alpha \in \mathbb{C}$  に対し,  $N_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} N / (\lambda - \alpha)N$  とする.

自然な 準同型  $N \rightarrow N_\alpha = N / (\lambda - \alpha)N$  による  $f^\lambda$  の

image を  $f^\alpha$  と書く.  $f^\alpha$  は 関数 ではなく  $D$ -module

$N_\alpha$  の元 というだけであり,  $N_\alpha = Df^\alpha$  である.

Lemma 4 (M. Sato - M. Kashiwara - T. Kimura - T. Oshima, Inv. Math 1980 の appendix)

$W \subset \{(\lambda, v, \lambda(\text{grad} \log f)(v)) \in \mathbb{C} \times V \times V^\vee \mid f(v) \neq 0\}$

の closure とすると,

$W \cap (\{0\} \times V \times V^\vee) = \{0\} \times \text{ch}(N_\alpha)$ . 即ち

これにより  $\text{ch}(N_\alpha)$  は 完全に 記述 される.

Remark Lemma 4 に於て closure は  $(Z)$  でも  $(C)$  でも同じである. これは 既約多様体の中で  $\{f(v) \neq 0\}$  は  $(Z)$  でも  $(C)$  でも dense であることによる.

以上は P.V. に関係なかった部分で, ここから P.V. の話へいく.

以下  $G = \text{reductive 代数群}$ ,  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  をその表現で  $(G, \rho, V)$  が P.V. とする.

$V, f, \phi, \Omega = f^{-1}\mathbb{C}^*$ ,  $O_o = \text{open orbit in } \Omega$ ,  $O_c = \text{closed orbit in } \Omega$ ,  $V^\vee, f^\vee, \phi^\vee = \phi^{-1}, \Omega^\vee, O_o^\vee, O_c^\vee, F^\vee$  等は §2 の通りとする.

Lemma 5  $ch(N_\alpha) \cap (\{0\} \times V^\vee) = \{0\} \times \overline{O_c^\vee}$   
但し  $\overline{O_c^\vee}$  は  $V^\vee$  における  $O_c^\vee$  の Zariski-closure.

$\therefore$  まず  $ch(N_\alpha) \cap (\{0\} \times V^\vee) = \{0\} \times \text{closure of } \{\text{grad log } f(v) \mid f(v) \neq 0\}$  を示す.  $\text{grad log } f = (\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots)$  中  $-1$  次同次であるから  $\Delta(\text{grad log } f)(v) = \text{grad log } f(\frac{v}{\Delta})$  が成立することに注意すると, Lemma 4 より  $\subset$  は明らかである. 逆に  $(0, 0, \text{grad log } f(v)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varepsilon, \varepsilon v, \varepsilon(\text{grad log } f)(\varepsilon v)) \in \{0\} \times ch(N_\alpha)$  より

$$\supset \text{が示せる.} \quad \text{即ち } \text{ch}(N_\alpha) \cap (\{0\} \times V^\vee) = \\ \{0\} \times \overline{F(\Omega)} \stackrel{\text{TRA}}{=} \{0\} \times \overline{O_1^\vee} \quad // \text{Lemma 5}$$

$$\text{Lemma 6} \quad \text{Supp } \tilde{f}(f^\alpha) = \text{Supp } \tilde{f}(N_\alpha) = \overline{O_1^\vee}$$

$$\because N_\alpha = Df^\alpha \text{ (この } D \text{ は } V \text{ 上の } D \text{) より}$$

$$\tilde{f}(N_\alpha) = D\tilde{f}(f^\alpha) \text{ (この } D \text{ は } V^\vee \text{ 上の } D \text{), よって}$$

$$\text{Lemma 1 の (ii) より } \text{Supp } \tilde{f}(N_\alpha) = \text{Supp } \tilde{f}(f^\alpha)$$

$$\text{次に } \{0\} \times \text{Supp } \tilde{f}(N_\alpha) \stackrel{\text{lem 2}}{=} (\{0\} \times V^\vee) \cap \text{ch } \tilde{f}(N_\alpha)$$

$$\stackrel{\uparrow}{=} (\{0\} \times V^\vee) \cap \sqrt{-1} \text{ch } N_\alpha = \sqrt{-1}((\{0\} \times V^\vee) \cap \text{ch } N_\alpha) \\ \text{lem 3 の (ii)}$$

$$\stackrel{\text{lem 5}}{=} \sqrt{-1}(\{0\} \times \overline{O_1^\vee}) = \{0\} \times \sqrt{-1} \overline{O_1^\vee} \quad (\sqrt{-1} \overline{O_1^\vee}, \overline{O_1^\vee} \text{ は}$$

$$\text{共に (唯一の) closed orbit 中}) = \{0\} \times \overline{O_1^\vee}$$

$$\text{即ち } \text{Supp } \tilde{f}(N_\alpha) = \overline{O_1^\vee} \quad // \text{lem 6}$$

$$\text{Lemma 7.} \quad a \in \mathbb{C}[V^\vee] \text{ が } a|_{O_1^\vee} \equiv 0 \text{ ならば,} \\ \text{Supp}(a\tilde{f}(f^\alpha)) \cap \Omega^\vee = \emptyset \text{ を 示す.}$$

証明は §4 Appendix を 見よ.

Remark.  $a \in \mathbb{C}[V^*]$  が  $a|_{0^*} \equiv 0$  を満たせば,

$a^N \mathcal{F}(f^\alpha) = 0$  なる  $N$  が存在する.  $\text{Supp } \mathcal{F}(f^\alpha) = \overline{0^*}$  (Lemma 6)

ということは, 環論的にいえば, こうなる. Lemma 7 の方は,

$a \mathcal{F}(f^\alpha)|_{\Omega^*} = 0$  ということである.

$$J_\alpha = \{P(\lambda) \in D[\lambda] \mid P(\lambda)f^\alpha = 0\},$$

$$J_\alpha = \{P \in D \mid Pf^\alpha = 0\} \quad \text{と おく}$$

$$N = D[\lambda]f^\alpha \cong D[\lambda]/J_\alpha$$

$$N_\alpha = N/(\lambda - \alpha)N = Df^\alpha \cong D/J_\alpha \quad \text{である.}$$

この  $J_\alpha$  は何か 考えてみよう.

$$(\star) \quad \underline{P \in J_\alpha \iff Pf^\alpha = 0 \iff Pf^\alpha \in (\lambda - \alpha)N}$$

$$\iff \exists Q(\lambda) \in D[\lambda] \text{ s.t. } Pf^\alpha = (\lambda - \alpha)Q(\lambda)f^\alpha$$

$$\iff \exists Q(\lambda) \in D[\lambda] \text{ s.t. } \underline{P - (\lambda - \alpha)Q(\lambda) \in J_\alpha}$$

即ち

$$\boxed{P \in J_\alpha \iff \exists Q(\lambda) \in D[\lambda] \text{ s.t. } P - (\lambda - \alpha)Q(\lambda) \in J_\alpha}$$

さて,  $f$  を  $\phi$  に対応する 相対不変式 とする.

$$(\star) \quad f(gv) = \phi(g)f(v) \quad (g \in G, v \in V)$$

$\{v_1, \dots, v_n\} = V$  の base をとり, 座標で みてゆこう.

$A \in \mathfrak{g} = \text{Lie}(G)$  に対して,

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho(A)v_\mu = \sum_{\lambda=1}^n v_\lambda a_{\lambda\mu} \quad (a_{\lambda\mu} \in \mathbb{C}) \\ v = \sum_{\mu=1}^n v_\mu c_\mu = \sum_{\mu=1}^n v_\mu x_\mu(v) \quad (x_\mu \text{ は座標関数}) \end{array} \right.$$

とすると,

$$\rho(A)v = \sum_{\mu=1}^n \rho(A)v_\mu \cdot x_\mu(v) = \sum_{\mu=1}^n \sum_{\lambda=1}^n v_\lambda a_{\lambda\mu} x_\mu(v)$$

となる.

(\*) において  $g = \exp(tA)$  とおくと,

$$\begin{aligned} f(\exp tA \cdot v) &= f\left(\left(1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots\right)v\right) \\ &= f(v + tAv) + O(t^2) \quad (\rho(A)v = Av \text{ と略記!}) \\ &= f\left(\sum_{\lambda=1}^n v_\lambda x_\lambda(v) + t \sum_{\lambda, \mu=1}^n v_\lambda a_{\lambda\mu} x_\mu(v)\right) + O(t^2) \\ &= f\left(\sum_{\lambda=1}^n v_\lambda (x_\lambda(v) + t \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_\mu(v))\right) + O(t^2) \\ &= f\left(\dots, \underbrace{x_\lambda + t \sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_\mu}_{\substack{\uparrow \lambda \text{ 番目の変数}}}, \dots\right) + O(t^2) \end{aligned}$$

$$\text{従って } \left. \frac{d}{dt} f(\exp tA)v \right|_{t=0} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} \cdot \left(\sum_{\mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_\mu\right)$$

$$= \sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_\mu \frac{\partial f}{\partial x_\lambda} = \left. \frac{d}{dt} \exp t\phi(A) \right|_{t=0} f = \phi(A)f$$

故に

$$(**) \left( \sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} - \phi(A) \right) f = 0 \quad \text{かゝる}.$$

標語的にいへば

$$(*) \xrightleftharpoons[\text{積分}]{\text{微分}} (**)$$

即ち (\*\*) は  $f$  の相対不変性を微分方程式により記述したものである。(\*\*) は Lemma 6 の (i) と本質的に同じであるが、くり返し説明したのである)

$f^{\lambda}$  の character (の微分) は  $\lambda \phi(A)$  であるから, (\*\*) より  $\sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} - \lambda \phi(A) \in J_{\lambda}$  を得る.

これを書き換えると,

$$\left( \sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} - \alpha \phi(A) \right) - (\lambda - \alpha) \phi(A) \in J_{\lambda}$$

一般に  $P - (\lambda - \alpha) Q(\lambda) \in J_{\lambda} \Leftrightarrow P \in J_{\alpha}$  であつたから,

$$P_{\alpha, A} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{\lambda\mu} x_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} - \alpha \phi(A) \in J_{\alpha} \quad \text{を得る.}$$

即ち,  $P_{\alpha, A} f^{\alpha} = 0$ , これを Fourier 変換して

$$\mathcal{F}(P_{\alpha, A}) \mathcal{F}(f^{\alpha}) = 0 \quad \text{であり,}$$

$$\mathcal{F}(P_{\alpha, A}) = \sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{\lambda\mu} \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial}{\partial y_{\mu}} \frac{1}{\sqrt{-1}} y_{\lambda} - \alpha \phi(A)$$

$$= - \sum_{\lambda, \mu=1}^n a_{\lambda\mu} y_{\lambda} \frac{\partial}{\partial y_{\mu}} - \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda\lambda} - \alpha \phi(A) \quad \text{と なる.}$$

ここで  $\phi_0(A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda=1}^n a_{\lambda\lambda} = \text{trace } P(A)$  とおく. これは

群の character  $\det P(g)$  の微分である. この記号を使うと,

$$\mathcal{F}(P, A) = \sum_{\lambda, \mu=1}^n (-a_{\mu\lambda}) y_{\mu} \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}} - (\phi_0 + \alpha \phi)(A) \quad \text{を得る.}$$

以上により,

$$\text{Lemma 8. } \left( \sum_{\lambda, \mu=1}^n (-a_{\mu\lambda}) y_{\mu} \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}} - (\phi_0 + \alpha \phi)(A) \right) \mathcal{F}(f^{\alpha}) = 0$$

$$\text{但し, } P(A) = (a_{\lambda\mu})_{1 \leq \lambda, \mu \leq n}, \quad \phi_0(A) = \text{trace } P(A)$$

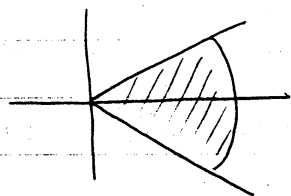
Lemma 7, Lemma 8 により  $f^{\alpha}$  の Fourier 変換  $\mathcal{F}(f^{\alpha})$  の性質が記述されている. しかし  $f^{\alpha}$  は関数でなく D-module のある抽象的な元で, Fourier 変換というのを抽象的に定義されたもので, 内実を伴わない. せめて内実を伴わせようということ, 次に hyperfunction を考える.

## hyperfunction (佐藤超関数)

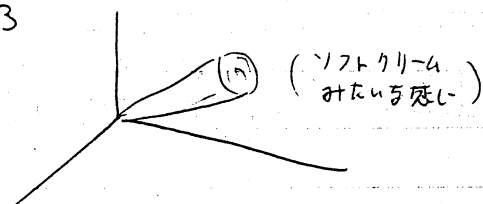
$\mathbb{R}^n$  の部分集合  $P$  を,  $0$  を頂点とする open convex cone と  $0$  を中心とする open ball の共通部分とする。

例えば,  $n=1$  のときは  $P = (-\varepsilon, 0), (0, \varepsilon), (-\varepsilon, \varepsilon)$  等であり

$n=2$

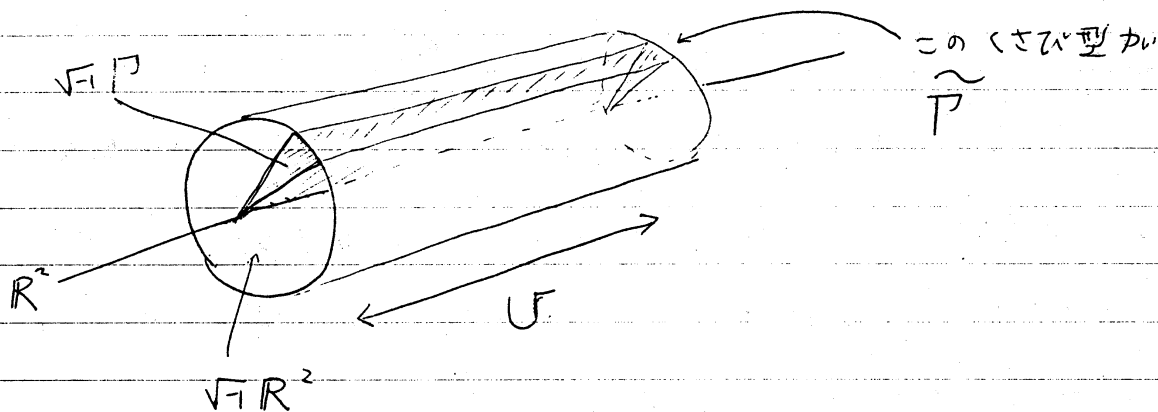


$n=3$



(ソフトクリーン  
みたいな感じ)

$U$  を  $\mathbb{R}^n$  の open set,  $\tilde{P} = U + \sqrt{-1}P$  とおく。



$\mathcal{O}(\tilde{P}) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{P}$  上の正則関数全体

$\tilde{\mathcal{B}}(U) = \bigoplus_P \mathcal{O}(\tilde{P})$  (このような  $P$  をすべて動かした直和)

$P_1 \cap P_2 \neq \emptyset, f_i \in \mathcal{O}(\tilde{P}_i) \ (i=1, 2)$  のとき,

$$\varphi_1 \sim \varphi_2 \stackrel{\text{def}}{\iff} \varphi_1|_{\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2} = \varphi_2|_{\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2} \quad \text{として,}$$

これから生成される同値関係を  $\sim$  と書き,

$$\mathcal{B}(U) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathcal{B}}(U)/\sim \quad \text{と置く. この元を,}$$

hyperfunction とよぶ。

何を考えているかという、くさび型  $\tilde{D} = U + \sqrt{-1}\rho$  上の正則関数が  $U$  の方へどんどん近付いていて boundary value (境界値) がでてくるが、これを定義したい。

この同値類は何を意味しているか、というと少し方向がまちがっても、共通部分があって、その上で同じ正則関数なら同じ boundary value を与えている筈だから同じとみなせば、その同値関係で割ったもの  $\tilde{\mathcal{B}}(U)/\sim$  の元は boundary value を抽象的にとらえたものと考えられる。

この元のことを hyperfunction とよぶわけ、

$\varphi \in \mathcal{O}(\tilde{D}) \subset \tilde{\mathcal{B}}(U)$  の同値類を  $b_D(\varphi)$  と書いて、

$\varphi$  の境界値 とよぶ。

Remark. 実はこの定義は少し不十分で、

$U \mapsto \mathcal{B}(U)$  は presheaf にしかならず、これから sheaf を作れば、本当の hyperfunction が得られる。

sheaf というのは, local に hyperfunctions が与えられていて, はりあわせられたら global な hyperfunction が得られる, という axiom を付け加えるということだが, ここでは省く.

例 1.  $C_c(\mathbb{R})$  で  $\mathbb{R}$  上の compact support をもつ 連続関数全体 とする.

$u \in C_c(\mathbb{R})$ ,  $z \in \mathbb{R} \pm \sqrt{-1}(0, \varepsilon)$  に対して

$$\varphi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{\mathbb{R}} \frac{u(t)}{t-z} dt \quad \text{と おく.}$$

$z \notin \mathbb{R}$  かつ  $t-z \neq 0$  で  $u$  は compact support をもつから 積分の収束に問題はない. 従って,  $z$  の正則関数を表わす.

$$\varphi_+(x+i0) - \varphi_-(x-i0)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\varphi_+(x+i\varepsilon) - \varphi_-(x-i\varepsilon))$$

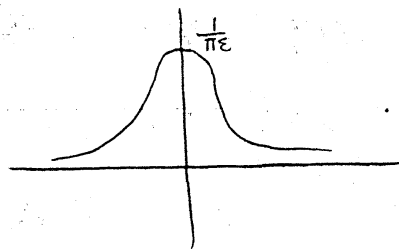
$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{u(t)}{t-x-i\varepsilon} - \frac{u(t)}{t-x+i\varepsilon} \right) dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} u(t) \frac{2i\varepsilon}{(x-t)^2 + \varepsilon^2} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} u(t) m_{\varepsilon}(x-t) dt, \quad \text{但し } m_{\varepsilon}(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{t^2 + \varepsilon^2}$$

となる。

$m_\varepsilon(t)$  は



というような左右対称な

関数で,  $\int_{\mathbb{R}} m_\varepsilon(t) dt = 1$  ( $t = \varepsilon \tan \theta$  により  $\theta$  へ変数変換

すれば容易に計算できる) が成り立つ. こういうのを *mollifier* といひ解析の方でよく知られている.

結局  $\varphi_+(x+i0) - \varphi_-(x-i0) = u(x)$  となる.

$$b_{(0,\varepsilon)}(\varphi_+) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_+(x+i0) \in \mathcal{B}$$

$$b_{(-\varepsilon,0)}(\varphi_-) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_-(x-i0) \in \mathcal{B} \quad \text{と hyperfunctions を}$$

定義すれば,  $u = \varphi_+(x+i0) - \varphi_-(x-i0) \in \mathcal{B}$

即ち, compact support をもつ連続関数は hyperfunction と

みよせる:  $C_c(\mathbb{R}) \subset \mathcal{B}$ .

他にも distribution 等も hyperfunction とみよせる.

(東大 lecture note, 小松彦三郎) を参照して下さい.

実質的には同じ idea ですが, 解析的に少し難しいところか できます.

例2) Dirac の  $\delta$ -関数  $\delta(x)$  を考える.

それは, どんな関数  $\varphi$  に対しても,

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0) \quad \text{となる関数である.}$$

例1で  $u(x) = \delta(x)$  として形式的に公式を使うと,

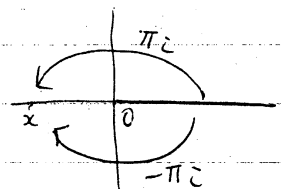
$$\varphi_{\pm}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(t)}{t-z} dt = -\frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z} \quad \text{となるから,}$$

$$\delta(x) \text{ を } \delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2\pi i} \left( \frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0} \right) \text{ と定義}$$

すればよい。他にも色々見方がある。

$$\log(x+i0) = \begin{cases} \log x & (x > 0) \\ \log|x| + \pi i & (x < 0) \end{cases}$$

$$\log(x-i0) = \begin{cases} \log x & (x > 0) \\ \log|x| - \pi i & (x < 0) \end{cases}$$



であるから,

$$\log(x+i0) - \log(x-i0) = \begin{cases} 0 & (x > 0) \\ 2\pi i & (x < 0) \end{cases}$$

$$\frac{1}{x+i0} - \frac{1}{x-i0} = -2\pi i \delta(x) \quad \text{ともみせるから,}$$

$\delta(x)$  の上の定義は reasonable である。

演算 を 一変数の場合に限って説明する。

$$u(x) = \varphi_+(x+i0) - \varphi_-(x-i0). \quad \text{とする.}$$

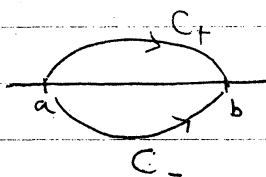
(i) 微分作用素  $P \in D$  の作用を,

$$(Pu)(x) = (P\varphi_+)(x+i0) - (P\varphi_-)(x-i0)$$

と定義する.  $P\varphi_+, P\varphi_-$  も正則関数である.

(ii).  $\varphi_{\pm}$  が  $a, b \in \mathbb{R}$  で正則とする.  $\varphi_{\pm}$  は  $\mathbb{R}$  上では定義されていないかもしれないが, このとき

$$\int_a^b u(t) dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_{C_+} \varphi_+(t) dt - \int_{C_-} \varphi_-(t) dt$$



と置く. Cauchy の積分定理により

$C_+, C_-$  も少々動かしても値は変らず,

well-defined である.

(iii)  $\varphi_j \in \mathcal{O}(\tilde{\Gamma}_j)$  ( $j=1,2$ ),  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$  とする.

このとき,  $\varphi_1 \cdot \varphi_2 \in \mathcal{O}(\tilde{\Gamma}_1 \cap \tilde{\Gamma}_2)$  により

境界値  $b_{\Gamma_1 \cap \Gamma_2}(\varphi_1 \cdot \varphi_2)$  が得られるが, これを 積

$b_{\Gamma_1}(\varphi_1) \cdot b_{\Gamma_2}(\varphi_2)$  と考える. 従って 積かいつても

定義されるわけではない。

多変数の  $\delta$ -関数  $\delta(x_1, \dots, x_n)$  を

$\delta(x_1, \dots, x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x_1) \cdots \delta(x_n)$  と定義する。(変数が独立の

ときは、積が定義される)

## §4 基本定理

定義  $(X, \mathbb{C}[X])$  を affine variety とする。

1.  $\mathbb{R}[X]$  を  $\mathbb{C}[X]$  の  $\mathbb{R}$ -subalgebra で 単位元 1 を含み,  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$  が  $\mathbb{C}$ -algebra として  $\mathbb{C}[X]$  と自然に同型になるものとする。このような  $\mathbb{R}[X]$  は色々あり得るが, この  $\mathbb{R}[X]$  を  $\mathbb{R}$ -structure とよび,  $\mathbb{R}$ -structure が与えられているとき,  $(X, \mathbb{C}[X])$  は  $\mathbb{R}$  上定義されている (defined over  $\mathbb{R}$ ) という。

2.  $(X, \mathbb{C}[X]), (Y, \mathbb{C}[Y])$  が affine varieties defined over  $\mathbb{R}$  で morphism  $f: X \rightarrow Y$  が

$\forall \varphi(Y) \in \mathbb{R}[Y]$  に対して,  $\varphi(f(x)) \in \mathbb{R}[X]$  となるとき, morphism  $f$  は  $\mathbb{R}$  上定義されている, という。

3.  $(X, \mathbb{C}[X])$  が defined over  $\mathbb{R}$  であるとして,  $Y \subseteq X$  の Zariski-closed subset とする。このとき,  $Y$  が  $\mathbb{R}$  上定義される。

$\Leftrightarrow J \stackrel{\text{def}}{=} \{ \varphi \in \mathbb{C}[X] \mid \varphi|_Y \equiv 0 \}$  は  $\mathbb{C}[X]$  の ideal だが,  $J \cap \mathbb{R}[X]$  が  $J$  を生成する。

4. 代数群  $G$  が  $\mathbb{R}$  上定義されているとは,  
 affine variety として  $\mathbb{R}$  上定義され, 群の演算を  
 与える morphism も  $\mathbb{R}$  上定義されていることである。

Exercise  $(X, \mathbb{C}[X])$  が  $\mathbb{R}$  上定義されているとする.

$\mathbb{C}/\mathbb{R}$  の Galois 群は複素共役  $\sigma$  で生成される:  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \langle \sigma \rangle$ .

$\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  は  $\mathbb{C}$  に作用するから  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X] (= \mathbb{C}[X])$  にも作用する. このとき,

(i) 写像  $\sigma': X \rightarrow X$  で,  $\forall x \in X, \forall \varphi \in \mathbb{C}[X]$  に対して  $(\sigma\varphi)(x) = \overline{\varphi(\sigma'x)}$  をみたすものが  
 唯一つ存在する.

(ii)  $\sigma'^2 = 1$  とする. 従って  $\text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$  は  $X$  に  
 作用する.

定義  $X(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \sigma'x = x\}$  とおく.

これは  $X$  の  $\mathbb{R}$ -rational points 全体である.

以下 概均質ベクトル空間の話にもとづき,  $G, \rho, V, V^\vee, \dots$   
 等はすべて  $\mathbb{R}$  上定義されているものとする.

$\mathcal{B} = \mathcal{B}_V = \{ V(R) \text{ 上の hyperfunctions} \}$  とおくと,

これは  $D(V)$ -module になる。

$$N = D[S]f^\lambda \cong D[S]/J_\lambda \quad \text{で, } \alpha \in \mathbb{C} \text{ に}$$

$$\text{対し, } N_\alpha = N / (s - \alpha)N = Df^\alpha \quad \text{で あった.}$$

$f^\lambda$  は関数だが  $f^\alpha$  は  $f^\lambda$  の  $N \rightarrow N_\alpha$  の image で

抽象的な  $N_\alpha$  の元 である。

$$N_\alpha \cong D/J_\alpha, \quad J_\alpha = \{ P \in D \mid Pf^\alpha = 0 \} \quad \text{である.}$$

hyperfunction  $u \in \mathcal{B}$  で,  $f^\alpha$  のみたす微分方程式と全く同じ微分方程式をみたすもの  $\{ u \in \mathcal{B} \mid Pu = 0 \text{ for } P \in J_\alpha \}$

は  $\mathbb{C}$ -vector space になるが, 実は有限次元になることが

知られている (柏原正樹氏). 我々はここでは有限次元ということ

は必要はないが参考までに述べておく。

$$\{ u \in \mathcal{B} \mid Pu = 0 \text{ for } P \in J_\alpha \} = \sum_{1 \leq i \leq l} \mathbb{C} f_i^\alpha$$

$$\text{このとき, } D \xrightarrow{\text{onto}} Df_i^\alpha$$

$\downarrow$

$$N_\alpha = D/J_\alpha = Df^\alpha \quad \nearrow \exists \psi = \text{onto}$$

となる。

即ち  $Df^\lambda \xrightarrow{\psi} Df_i^\alpha$  なる onto map が得られる。

そこで hyperfunction  $f_i^\alpha$  の Fourier 変換を

$$\mathcal{F}(f_i^\alpha)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f_i^\alpha(x) e^{\sqrt{-1} x \cdot y} dx \quad \text{と定義する。}$$

この定義は解析的に言て、厳密さに欠ける。もし厳密に議論したいなら, tempered distribution の範囲に話を限ればよい。その場合には, 正当化は簡単にできる。しかしどの範囲で議論するのが良いのか または, きりと見極めがつかないので, あえて不正確なまゝで議論をすすめる。

$D\mathcal{F}(f^\alpha) \rightarrow D\mathcal{F}(f_i^\alpha)$  は onto であるから, 次の Lemma が成り立つ。

Lemma 1.  $u = \mathcal{F}(f_i^\alpha)$  は次の微分方程式をみたす。

1.  $a \in \mathbb{C}[\Omega^V]$  が  $a|_{\mathcal{O}_Y} \equiv 0$  をみたせば,  $au = 0$ .

$$2. \left( \sum_{\lambda, \mu=1}^n (-a_{\lambda\mu}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha\phi)(A) \right) u = 0$$

但し  $A \in \mathcal{O}_Y$ ,  $\rho(A) = (a_{\lambda\mu})_{1 \leq \lambda, \mu \leq n}$

$$\phi_0(A) = \text{trace } \rho(A)$$

$\therefore$  §3 の lemmas 7, 8 より得られる。 //

$\mathbb{R}$ 上定義された概均質ベクトル空間(P.V.)の構造

$$F = \text{grad } \log f : \Omega (= f^{-1}\mathbb{C}^*) \rightarrow \Omega^V (= f^{V-1}\mathbb{C}^*)$$

$$F^V = \text{grad } \log f^V : \Omega^V \rightarrow \Omega$$

で, あ, た, こ, と, を, 思, い, 出, せ, う。

これからすべて  $\mathbb{R}$  上定義されている場合を考えているから

$\Omega(\mathbb{R})$ ,  $\Omega^\vee(\mathbb{R})$  等考えられるが, これらの連結成分への分解を考える.

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\mathbb{R}) &= \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_{l'} \\ \Omega^\vee(\mathbb{R}) &= \Omega_1^\vee \cup \cdots \cup \Omega_{l''}^\vee \end{aligned} \right\} \text{連結成分への分解}$$

$\Omega$  や  $\Omega^\vee$  内の唯一の closed orbit  $O_1$ ,  $O_1^\vee$  に対して,

$O_1(\mathbb{R})$ ,  $O_1^\vee(\mathbb{R})$  を連結成分に分解しよう.

$$1. \quad O_1^\vee(\mathbb{R}) = F(O_1(\mathbb{R}))$$

$$O_1(\mathbb{R}) = F^\vee(O_1^\vee(\mathbb{R}))$$

$$\left( \begin{array}{l} \text{注) } O_1^\vee = F(O_1), O_1 = F^\vee(O_1^\vee) \text{ ではあるが 1. は明らかではない.} \\ \text{例えば } \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \end{array} \text{ は onto だが, } \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \end{array} \text{ は onto ではない.} \end{array} \right)$$

$\therefore$

$$O_1^\vee(\mathbb{R}) \supset F(O_1(\mathbb{R})) \supset F F^\vee(O_1^\vee(\mathbb{R})) = O_1^\vee(\mathbb{R})$$

$\uparrow$   
F は  $\mathbb{R}$  上 defined

$\uparrow$   
F $^\vee$  は  $\mathbb{R}$  上 defined

$\uparrow$   
F $^\vee$  は  $\mathbb{R}$  上 defined

より 明らか.

//

$$2. \quad O_1 \cap \Omega_j = F^\vee F \Omega_j$$

$\therefore$

$\supset$  を示す.  $\forall u \in \Omega_j$  に対し  $u^\vee = F(u)$  とおく.

$\Omega$   
 $\downarrow F$   
 $O_1^\vee$

は単に fibre bundle というだけでなく, vector bundle ( $\mathbb{R}P^1$  と  $O_1^\vee$  の conormal bundle と同型 ( $\mathbb{R}A$ )) である.

従って,  $F^{-1}(u^\vee) = \text{affine space}$  で  $u$  を含む.

故に  $F^{-1}(u^\vee) \cap V(\mathbb{R})$  は連結で  $u$  を含むから,  $u$  を

含む連結成分  $\Omega_j$  に含まれる:  $F^{-1}(u^\vee) \cap V(\mathbb{R}) \subset \Omega_j$ .

さて,  $F^\vee F(u) = F^\vee(u^\vee) \in F^{-1}(u^\vee) \cap V(\mathbb{R}) \subset \Omega_j$ .

( $FF^\vee(u^\vee) = u^\vee$ ,  $u \in \Omega(\mathbb{R})$  等より)

$u$  は  $\Omega_j$  の任意の元で,  $\text{Im } F^\vee \subset O_1$  であるから

結局  $F^\vee F(\Omega_j) \subset O_1 \cap \Omega_j$  を得る.

$\subset$  を示す.

$\mathbb{R}A$  により,  $O_1 \xrightleftharpoons[F^\vee]{F} O_1^\vee$  は逆対応であるから

$F^\vee F|_{O_1} = \text{id}|_{O_1}$  故に  $O_1 \cap \Omega_j = F^\vee F(O_1 \cap \Omega_j)$

$\subset F^\vee F \Omega_j$  //

3.  $O_1(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{\ell'} (O_1 \cap \Omega_j)$   
 $O_1^\vee(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{\ell''} (O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee)$  } は連結成分への分解を与える.

$\therefore \Omega_j \neq \emptyset$  より  $O_1 \cap \Omega_j \stackrel{2.}{=} F^\vee F \Omega_j \neq \emptyset$  かつ,

$\Omega_j$  は連結ゆえ,  $F\Omega_j$  も連結. 従って  $F^\vee F\Omega_j = O_1 \cap \Omega_j$  も連結である.  $\Omega_j$  は open set ゆえ  $O_1 \cap \Omega_j$  は open, 連結, て  $O_1(\mathbb{R})$  は それ等の disjoint union ゆえ,  $O_1 \cap \Omega_j$  は連結成分である. //

Lemma 2. (i) 次のものは すべて 連結成分への分解である.

$$\Omega(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} \Omega_j$$

$$\Omega^\vee(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} \Omega_j^\vee$$

$$O_1(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} (O_1 \cap \Omega_j), \quad O_1^\vee(\mathbb{R}) = \bigcup_{j=1}^{l'} (O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee)$$

更に  $F(O_1 \cap \Omega_j) = O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee$  ( $\forall j=1, \dots, l'$ ) とできて,

$$\text{このとき, } F(\Omega_j) = O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee, \quad F^\vee(\Omega_j^\vee) = O_1 \cap \Omega_j$$

となる.

(ii)  $G(\mathbb{R})$  の単位元を含む 連結成分を  $G(\mathbb{R})^+$  とすると,

$O_1 \cap \Omega_j, O_1^\vee \cap \Omega_j^\vee$  たちは  $G(\mathbb{R})^+$ -orbit である.

∴) (i)  $l' = l''$  のみを示せば十分であるが, それは

$$O_1(\mathbb{R}) \xrightleftharpoons[F^\vee]{F} O_1^\vee(\mathbb{R}) \text{ が 互いに 逆対応 になっていることから}$$

連結成分の個数も等しいことがわかる.

$$(ii) \quad \forall x \in O_1 \text{ に対して } \begin{array}{ccc} G & \rightarrow & O_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ g & \mapsto & gx \end{array} \text{ は submersion}$$

すなわち,  $g$  での Jacobi 行列の rank =  $\dim Tgx O_1$ .

(infinitesimal に考えると onto になっている, というのが submersion)

この式は,  $\mathbb{C}, \mathbb{R}$  どちらで考えても同じだから

$$\forall x \in O_1(\mathbb{R}) \text{ に対して, } \begin{array}{ccc} G(\mathbb{R}) & \rightarrow & O_1(\mathbb{R}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ g & \mapsto & gx \end{array} \text{ は submersion.}$$

$G(\mathbb{R})^+$  は  $G(\mathbb{R})$  の open set 中へ,  $G(\mathbb{R})^+$  へかえても submersion で, そのとき image は open set 中へ

$G(\mathbb{R})^+ x \underset{\text{open}}{\subset} O_1(\mathbb{R})$  である.  $G(\mathbb{R})^+ x$  は

連結, open で  $O_1(\mathbb{R})$  は それらの disjoint union (orbit 中へ disjoint) になるから,  $G(\mathbb{R})^+ x$  は  $O_1(\mathbb{R})$  の 連結成分 たち である. // Lem 2

### Lemma 3

(i)  $|f^v|^\alpha$  は  $\Omega_j^v$  上の real analytic function である.

(ii)  $\forall g \in G(\mathbb{R})^+, \forall v^v \in \Omega_j^v$  に対して

$$|f^v(gv^v)|^\alpha = \phi(g)^{-\alpha} |f^v(v^v)|^\alpha$$

$\therefore$ )  $G(\mathbb{R})^+$  は連結で  $\phi$  は連続ゆえ,  $\phi(G(\mathbb{R})^+) \subset \mathbb{R}^*$

は連結, しかも 1 を含むから  $\phi(G(\mathbb{R})^+) \subset \mathbb{R}_{>0}$ , これより

(ii) は明らかである. (i) は  $f^\vee$  が  $\Omega_j^\vee$  上 符号が一定で

あればよいが,  $\Omega_j^\vee$  が 1 つの orbit ではないから, その分 証明は

難しい.  $O_1 \cap \Omega_j = G(\mathbb{R})^+ x$ ,  $f(gx) = \phi(g)f(x)$ ,  $\phi(g) > 0$

より  $\text{sgn}(f)|_{O_1 \cap \Omega_j} = -$  一定である. ( $\text{sgn}(f)$  は  $f$  の符号)

一方,  $F^\vee(\Omega_j^\vee) = O_1 \cap \Omega_j$  であるから

$\forall y \in \Omega_j^\vee$  に対して,  $\text{sgn } f(F^\vee(y)) = -$  一定.

ところが,  $f(F^\vee(y)) = f((\text{grad } \log f^\vee)(y)) = b \cdot f^\vee(y)^{-1}$

であるから,  $f^\vee(y)$  ( $y \in \Omega_j^\vee$ ) の符号は一定である.  $\text{Lem 3.}$

**Lemma 4.**  $O_1 \cap \Omega_j$  上には,  $G(\mathbb{R})^+$ -不変な測度

$\omega_j = \omega_{O_1 \cap \Omega_j}$  が存在して, 定数倍を除いて unique.

$\therefore$ )  $\Omega = f^{-1}(\mathbb{C}^*)$  は affine variety で  $O_1 \subset \Omega$  は

closed ゆえ  $O_1$  も affine variety である.

$v_1 \in O_1$ ,  $G_{v_1} = \{g \in G \mid gv_1 = v_1\}$  とおくと  $O_1 = G/G_{v_1}$ .

さて  $G = \text{reductive}$ ,  $G/G_{v_1} = \text{affine variety}$ , であるから,

松島の定理により  $G_{U_1} = \text{reductive}$ , となる。

更に  $U_1 \in O_1 \cap \Omega_j$  にとると,

$$O_1 \cap \Omega_j = G(\mathbb{R})^+ U_1 = G(\mathbb{R})^+ / G(\mathbb{R})^+ \cap G_{U_1}(\mathbb{R})$$

で,  $G(\mathbb{R})^+$ ,  $G(\mathbb{R})^+ \cap G_{U_1}(\mathbb{R})$  たちは real reductive

group 中え, その上に両側不変測度がある. quotient

measure をとて,  $O_1 \cap \Omega_j$  上に  $G(\mathbb{R})^+$ -不変測度か

あることがわかる. 不変測度については, Bourbaki

の積分 chapter 7, §2, n°6 に詳しい説明がある.

// Lem 4

今は基本定理を述べる為の記号などの準備をしている

ところである. real analytic manifold  $M$  上の

微分形式  $\omega_1, \omega_2$  に対して

$\omega_1 \sim \omega_2$  とは, real analytic function  $\varphi$  で

$\forall x \in M$  に対し  $|\varphi(x)| = 1$  かつ  $\omega_1 = \varphi \omega_2$  となるものが

存在すること, とする. 微分形式というのは難しく思う

人もいるかもしれないが, 座標で表わすと  $\sum_{i_1 < \dots < i_p} \varphi_{i_1 \dots i_p}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$

( $\varphi_{i_1 \dots i_p}(x)$  は real analytic function,  $x_{i_1}, \dots, x_{i_p}$  たちは座標関数,

それら形式的に  $dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  としたものを) というものである.

$\omega$  の同値類を  $|\omega|$  と書く.

例えば  $\varphi_{i_1, \dots, i_p} dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$  は  $p$ -form であるが, とくに  $p=0$

なる, これは関数 そのものである.

だから, 微分形式は関数の一般化であると考えられる.

0-form のとき,  $|\omega|$  は関数の絶対値を考えるのと同じである.

Lemma 5  $M$  を  $N$  の (regular) submanifold,  $P \in M$

とする.  $P$  に於ける局所座標  $(x_1, \dots, x_n)$  で,  $P$  の近傍で

(\*)  $M = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 = \dots = x_k = 0\}$  とするものを

とる (このような局所座標がとれるというのが regular submanifold )

$\delta$ -関数  $\delta(x_1, \dots, x_k) = \delta(x_1) \cdots \delta(x_k)$  に対して

$\delta_{\text{MIN}}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \delta(x_1, \dots, x_k) |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_k|$  とおくと

これは 座標のとり方によらずに (これは  $M$  以外では  
零になっている)

(\*)  $(y_1, \dots, y_n)$  を別の局所座標で (\*) をみなすものとする.

$y_1 \equiv 0, \dots, y_k \equiv 0$  on  $M$  であるから

$y_1, \dots, y_k \in (x_1, \dots, x_k) = \text{ideal gen. by } x_1, \dots, x_k.$

従って,

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + \cdots + a_{1k}x_k \\ \vdots \\ y_k = a_{k1}x_1 + \cdots + a_{kk}x_k \\ y_{k+1} = a_{k+1,1}x_1 + \cdots + a_{k+1,n}x_n \\ \vdots \\ y_n = a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

従て、変換の Jacobian を考えれば

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}(P) & \cdots & a_{1k}(P) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1}(P) & \cdots & a_{kk}(P) \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\text{これより } f(x_1, \dots, x_k) |dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_k| = f(y_1, \dots, y_k) |dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_k|$$

が得られる。定義に従て計算していいか、詳しくは

柏原-河合-木村, 代数学の基礎, 紀伊国屋書店 P.90. Prop. 2.4.1

( $k \times k$   $k$ )

を参照のこと.

// Lemma 5.

ベクトル空間  $V$ ,  $V^\vee$  の座標をそれぞれ  $x_1, \dots, x_n$  及び  $y_1, \dots, y_n$

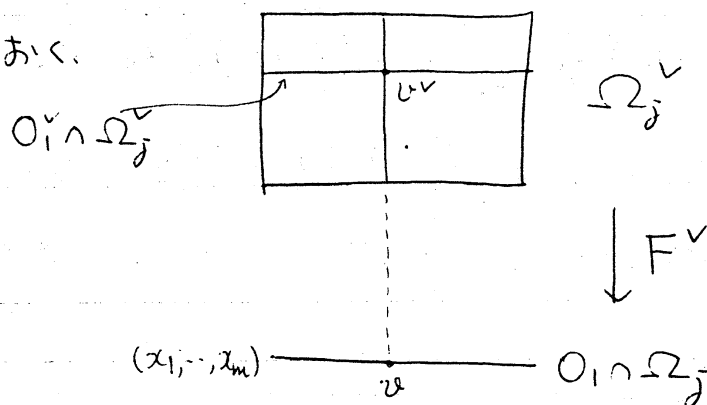
とする。即ち,  $\mathbb{C}[V] = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ ,  $\mathbb{C}[V^\vee] = \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n]$

そして  $\dim O_1 = \dim O_1^\vee = m$  とする。

$v \in O_1 \cap \Omega_j$  をとり,  $F(v) = v^\vee$  とおく。

$x_1, \dots, x_n$  の一部  $(x_1, \dots, x_m)$  が local coordinate of  $O_1 \cap \Omega_j$  at  $v$

と なるようにしておく.



このとき,

$O_1 \cap \Omega_j$  上の不変測度  $\omega_j = \omega_{O_1 \cap \Omega_j}$  は  $h(x) |dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m|$  と表わせる.

$(z_1, \dots, z_n)$ : local coordinate of  $\Omega_j^v$  at  $v^v$  と次のようにとる.

$$(z_1, \dots, z_m) = (F^{v*}x_1, \dots, F^{v*}x_m) \quad (x_1, \dots, x_m \in F^v \text{ で 1 対 1 の})$$

$(z_{m+1}, \dots, z_n)$  を fibre 方向の座標, とする. 但し,

$$O_1^v \cap \Omega_j^v = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_{m+1} = \dots = z_n = 0\} \text{ と なるように 選ぶ.}$$

更に Lemma 5 で定義した  $\delta_{O_1^v \cap \Omega_j^v} | \Omega_j^v (= \delta_{O_1^v} | \Omega_j^v \text{ と 略記})$  を考える.

$$\text{然るに, } \delta_{O_1^v} | \Omega_j^v = \delta(z_{m+1}, \dots, z_n) | dz_{m+1} \wedge \dots \wedge dz_n | \text{ と なる.}$$

$\omega_j$  を  $F^v$  で ひきもとすと

$$\begin{aligned} F^{v*}\omega_j &= h(F^v(z)) | d(F^{v*}x_1) \wedge \dots \wedge d(F^{v*}x_m) | \\ &= h(F^v(z)) | dz_1 \wedge \dots \wedge dz_m | \quad \text{と 得る.} \end{aligned}$$

この二つの外積を考えると,

$$F^v{}^* \omega_j \wedge \delta_{01} \Omega_j^v = h(F^v(z)) \delta(z_{m+1}, \dots, z_n) |dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n|$$

が得られる。左辺は global な表示, 右辺は local な表示で,

この式を使うわけではあるが, 左辺が どんなものか だいたいわかる  
だろう。

Lemma 6.  $F^v{}^* \omega_j \wedge \delta_{01} \Omega_j^v$  は  $G(\mathbb{R})^+$ -不変.

∵)  $F^v$  は  $G(\mathbb{R})^+$  の作用 と 可換 で  $\omega_j$  は  $G(\mathbb{R})^+$ -不変,

そして  $\delta_{01} \Omega_j^v$  も  $G_{\mathbb{R}}^+$  で 不変 であるから. //

定理 B  $\Omega^v(\mathbb{R})$  上で

$$\mathcal{F}(f_i^\alpha) = \sum_{j=1}^{l'} c_{ij}(\alpha) |f^v|_j^{-\alpha} \frac{F^v{}^* \omega_j \wedge \delta_{01} \Omega_j^v}{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|} \quad (1 \leq i \leq l)$$

但し  $c_{ij}(\alpha)$  は,  $f_i^\alpha$  と  $j$  で 定まる 定数.

$$|f^v|_j^{-\alpha}(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} |f^v(y)|^{-\alpha} & \text{on } \Omega_j^v \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

これは  $\Omega^v(\mathbb{R})$  上の real analytic function である.

[注]

$$\frac{F^v{}^* \omega_j \wedge \delta_{01} \Omega_j^v}{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|} = h(F^v(z)) \delta(z_{m+1}, \dots, z_n) \cdot \frac{|dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n|}{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|}$$

$$\underbrace{\left| \frac{\partial(z_1, \dots, z_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} \right|}_{\text{Jacobian の絶対値}}$$

ii)  $\alpha$  を固定して,  $\Omega_j^\vee$  上で

$$\mathcal{F}(f_i^\alpha) = |f^\vee|^{-\alpha} \cdot \frac{F^* \omega_j \wedge \delta 0_i | \Omega_j^\vee}{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|} \times \text{const.}$$

を示せばよい.

$G(\mathbb{R})^+$  に関する相対不変性をみよう.

$$|f^\vee|^{-\alpha} \longleftrightarrow \phi^\alpha \quad (\text{Lemma 3})$$

$$F^* \omega_j \wedge \delta 0_i | \Omega_j^\vee \longleftrightarrow 1 \quad (\text{Lemma 6})$$

$$|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n| \longleftrightarrow \phi_0^{-1}$$

$$\text{従って, 右辺} \longleftrightarrow \phi_0 \phi^\alpha$$

故に, 右辺は微分方程式

$$(\#) \begin{cases} 1. a \in \mathbb{C}[\Omega_j^\vee] \text{ で } a|_{0_i^\vee} \equiv 0 \text{ ならば, } au = 0 \\ 2. A \in \mathcal{A} \text{ に対して,} \\ \left( \sum_{\lambda, \mu=1}^n (-a_{\lambda\mu}) y_\mu \frac{\partial}{\partial y_\lambda} - (\phi_0 + \alpha\phi)(A) \right) u = 0 \end{cases}$$

$$\text{但し } P(A) = (a_{\lambda, \mu}), \quad \phi_0(A) = \text{trace } P(A)$$

を満たす。一方 Lemma 1 により 左辺も (＃) を満たす。

$$\text{しかも } (*) \dim \{ u \in \mathcal{B}(\Omega_j^\vee) \mid (\#) \text{ の解} \} = 1$$

が解析的に証明され, よって 右辺と左辺は定数倍を

除いて一致する。(\*) は簡単に証明できることで, ~~証明略~~

1. から local には, unique に  $\varphi_1$  が存在して

$u = \delta(z_{m+1}, \dots, z_n) \varphi_1(z_1, \dots, z_m)$  と表わせる。故に

$$u = |f^\vee|^{-\alpha} \frac{F^{\vee*} \omega_{\mathfrak{g}} \wedge \delta O_1^\vee | \Omega_{\mathfrak{g}}^\vee}{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|} \varphi_2(z_1, \dots, z_m) \text{ とある } \varphi_2 \text{ が}$$

存在する。後半 2. により,  $u$  は  $G(R)^\vee$  に関して

$$u_0 = |f^\vee|^{-\alpha} \frac{F^{\vee*} \omega_{\mathfrak{g}} \wedge \delta O_1^\vee | \Omega_{\mathfrak{g}}^\vee}{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|} \text{ と同じ 相対不変性 を}$$

もつから  $\varphi_2$  は  $G(R)^\vee$ -不変.  $\varphi_2 = c$  の  $O_1^\vee \cap \Omega_{\mathfrak{g}}^\vee$  とすると

$$u = c u_0 \text{ とある } \quad \text{ (★) の証明. (代数解析の基礎 p. 189 命題 3.8.1) }$$

注) 定理 B に於て, 群  $G$  が reductive であることは

仮定しているが,  $(G, \rho, V)$  の正則性は仮定していない

ことに注意。また 相対不変式が定数 ( $\neq 0$ ) の場合

でもよい。このとき,  $\Omega = V$ ,  $O_1 = \{0\}$ ,  $O_0 = V - \{0\}$  と

なり 定理 B は「Fourier 変換で  $1$  と  $\delta$ -関数が対応する」

という事実を主張するだけになる。

## Appendix (§4)

M. Sato-M. Kashiwara-T. Kimura-T. Oshima, Inv. Math. 1980

の結果は すべて 既約とか 正則とかいう仮定をはずして 読み  
変えられる。

(I)  $I = \{a \in \mathbb{C}[\Omega^\vee] \mid a|_{O_Y} \equiv 0\}$  として,

$\Omega^\vee$  上の D-module  $Du_\alpha$  を次で定める。

$$(\#) \begin{cases} a u_\alpha = 0 \quad (a \in I) & \dots \textcircled{1} \\ \langle Ay, \text{grad}_y \rangle u_\alpha = (\phi_0 + \alpha \phi)(A) u_\alpha \quad (A \in \mathcal{O}_Y) & \dots \textcircled{2} \\ \text{但し } \phi_0 = \text{trace } \rho \end{cases}$$

そうすると  $Du_\alpha$  の solution が 1 つ わかっている。即ち

$$|f^\vee|^{-\alpha} \frac{F^{\vee*} \omega_Y \wedge \delta_{O_Y} | \Omega_Y}{|dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n|} \quad (\text{cf. §4})$$

今  $\mathcal{E}$  を microdifferential operators の sheaf として

$$\mathcal{E} u_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{E} \otimes_D Du_\alpha \quad \text{と置く。}$$

そして  $\Lambda = (T O_Y)^\perp$  を  $O_Y$  の conormal bundle とする。

そうすると generic point で  $\mathcal{E} u_\alpha|_\Lambda \neq 0$  である。

実質的に  $\delta$  関数  $\times$  holomorphic function だから その singular

spectrum が  $\Lambda$  の中で Zariski-dense だから characteristic

variety は  $\Lambda$  の方へ入っている。

同様に  $\Sigma \mathcal{F}(f^d) = \Sigma \otimes_D D\mathcal{F}(f^d)$  についても

$\Sigma \mathcal{F}(f^d)|_\Lambda \neq 0$  である。

$D\mathcal{F}(f^d)$  については characteristic variety はわかっている。

(II) SKKO, §4 の読みかえ

既約 (irreducible), 正則 (regular)  $\rightarrow$  削除

$\{0\}$  の conormal  $\rightarrow O_Y^\vee$  の conormal  $\Lambda = (TO_Y^\vee)^\perp$  とする。

$u_\alpha$  も  $\mathcal{F}(f^d)$  も ② を満たすから  $\Lambda$  上での principal symbol が SKKO, §4 と同様にして計算できる。結果は,

$$\sigma_\Lambda(u_\alpha) = \sigma_\Lambda(\mathcal{F}(f^d)) = f^\vee(y)^{-d} \sqrt{\mathbb{E}^* dx} / \sqrt{dy}$$

$$\text{但し } \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] = \mathbb{C}[V], \mathbb{C}[y_1, \dots, y_n] = \mathbb{C}[V^\vee]$$

$\mathbb{E}$  は  $\mathrm{Tr} A$  にてできた map  $\mathbb{E}: \Lambda \xrightarrow{\sim} \Omega$  である。

$$m = \dim O_Y^\vee \text{ とおくと order は } \mathrm{ord}_\Lambda = \frac{n-m}{2} \text{ で}$$

与えられる。故に (order が一致しているから)  $\Lambda$  の

generic point の近くで,  $\Sigma \mathcal{F}(f^d) \cong \Sigma u_\alpha$ .

しかも principal symbol が一致しているから,

microlocal な operator  $P \in E$  があって

$$\begin{cases} P = c + P_{-1} + P_{-2} + \dots & (P_{-j} \text{ の order} = -j, c \neq 0) \\ P \chi(f^\alpha) = u_\alpha \end{cases}$$

となる。

(III)  $N \gg 0$  (i.e.  $N$  十分大) とすると,  $I^N \chi(f^\alpha) = 0$

これは  $\chi(f^\alpha)$  が  $O_1^\vee$  上に support をもっていたので

Hilbert 零点定理より得られる。

仮に  $I \chi(f^\alpha) \neq 0$  とする。 ( $= 0$  を示したい)

$\left( \begin{array}{l} \chi(f^\alpha) \text{ は (井) の ② は 満たすか, ① を 満たすか} \\ \text{どうかは わかっているか, たのである。} \end{array} \right)$

$I \ni a$  で  $a \chi(f^\alpha) \neq 0$  かつ  $I(a \chi(f^\alpha)) = 0$

となるものをもってくる。 然るば、

$O_1^\vee$  の generic point の近くで non-zero な holomorphic function  $\varphi$  で  $\varphi a \chi(f^\alpha) = u_\alpha$  となるものがある。

これは  $I(a \chi(f^\alpha)) = 0$  だから  $\delta$ -関数みたいなもので

orbit の方向には 定いた holomorphic, 散逸は

いえる,  $O_1^\vee$  に  $D(a \chi(f^\alpha))$  を ひきもとすと

characteristic variety が計算できて, characteristic variety が zero section になる。あとは Kashiwara equivalence を使う。これについては,

Hotta : Lecture Notes, The Institute of Math.,  
Madras, Indias (1986)

の chapter 1, §5 をみて下さい。

さて (II) より  $P \circ (f^\alpha) = u_\alpha$  という関係式があった。

そこで  $(P - \varphi a) \circ (f^\alpha) = 0$  となる。しかし

$P - \varphi a = (C - \varphi a) + P_{-1} + P_{-2} + \dots$  であるから

その principal symbol は  $C - \varphi a$  である。

$$\text{ところが } C - \varphi a|_{\Lambda} = C \neq 0$$

よって  $(P - \varphi a)$  は  $\Lambda$  で invertible になり

$\circ (f^\alpha) = 0$  on  $\Lambda$ , これは矛盾である。

## §5. 実例

Exercise 1.  $G = GL_n(\mathbb{C})$ ,  $V = M_n(\mathbb{C})$ ,

$$g: v \mapsto gv \quad (g \in G, v \in V) \quad \text{及 } 21^{\circ}$$

Exercise 2.  $G = GL_1(\mathbb{C}) \times SO_n(\mathbb{C})$ ,  $V = \mathbb{C}^n$

$$(t, g): v \mapsto t(gv) \quad (t \in GL_1(\mathbb{C}), g \in SO_n(\mathbb{C}), v \in V)$$

が 概均質ベクトル空間になることを示せ.

概均質ベクトル空間の概念が全く初めての人には、これらの例について、今まで出てきた一般論を適用して色々調べてみるとよい。

ここでは 余りみられない例について詳しく調べる.

$$J \stackrel{\text{def}}{=} \left( \begin{array}{c|c} 0 & I_n \\ \hline -I_n & 0 \end{array} \right), \quad I_n = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{と おいて}$$

$$Sp_{2n}(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ g_1 \in GL_{2n}(\mathbb{C}) \mid g_1' J g_1 = J \} \text{ を}$$

symplectic group とする. (t は スカラー倍で 使うので

転置  ${}^t g$  を  $g'$  と書くことにしよう)

$$SO_3(\mathbb{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ g_2 \in GL_3(\mathbb{C}) \mid g_2' g_2 = 1, \det g_2 = 1 \}$$

$$G \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}^\times \times Sp_{2n}(\mathbb{C}) \times SO_3(\mathbb{C}) \ni g = (t, g_1, g_2)$$

の  $V = M_{2n,3}(\mathbb{C})$  への作用を

$$v \mapsto t(g, v g'_2) \quad (v \in V, g = (t, g_1, g_2) \in G)$$

によって定める。

そうすると  $(G, V)$  が P.V. になることが知られている。

佐藤-木村の分類理論で、既約で非正則だが相対不変式をもつ例として知られているものです。

$V^\vee = M_{2n,3}(\mathbb{C})$  とし、 $V$  と  $V^\vee$  の pairing を

$$\langle X, Y \rangle = \text{tr}(X'Y)$$
 とする。 (これにより  $M_{2n,3}(\mathbb{C})$

を  $V^\vee$  と考える。)

$$\langle gX, Y \rangle = \text{tr}((gX)'Y) = \text{tr}(t(g_1 X g'_2)'Y)$$

$$= \text{tr}(t g_2 X' g'_1 Y) = \text{tr}(t X' g'_1 Y g_2)$$

$$= \text{tr}(X'(t g'_1 Y g_2)) = \langle X, t g'_1 Y g_2 \rangle$$

従って  $G$  の  $V^\vee$  への作用は、 $Y \mapsto t^{-1} g'_1{}^{-1} Y g_2^{-1}$

で与えられ、 $(G, V^\vee)$  は  $(G, V)$  の dual P.V.

になる。

$u_1, u_2 \in \mathbb{C}^{2n}$  に対して、 $(u_1, u_2) = u_1' J u_2$  とおくと

$$\begin{cases} (u_1, u_2) + (u_2, u_1) = 0 \\ (u, u) = 0 \end{cases}$$

をみたす。

$M_{2n,3}(\mathbb{C}) \ni X = (v_1 \ v_2 \ v_3)$  と表わしたとき,  
 $f(X) = (v_1, v_2)^2 + (v_2, v_3)^2 + (v_3, v_1)^2$

とあると,  $f$  は 4 次同次多項式で, 既約であることが知られている. (§7 参照)

$g = (t, g_1, g_2) \in G$  に對して,  $\phi(g) = t^4$  とある.

そして  $f = f^\vee$  とある. このとき

$$\boxed{f(gv) = \phi(g)f(v), \quad f^\vee(gv^\vee) = \phi(g)^{-1}f^\vee(v^\vee)} \\ (v \in V, v^\vee \in V^\vee, g \in G)$$

∴)  $X = (v_1, v_2, v_3)$  とおけば

$$X' J X = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ v_3' \end{pmatrix} J (v_1 \ v_2 \ v_3) = \begin{pmatrix} v_1' J v_1, v_1' J v_2, v_1' J v_3 \\ v_2' J v_1, v_2' J v_2, v_2' J v_3 \\ v_3' J v_1, v_3' J v_2, v_3' J v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & (v_1, v_2) & (v_1, v_3) \\ (v_2, v_1) & 0 & (v_2, v_3) \\ (v_3, v_1) & (v_3, v_2) & 0 \end{pmatrix} \text{ は交代行列である。}$$

$$\text{従つて } (X' J X)^2 = \begin{pmatrix} -(v_1, v_2)^2 - (v_3, v_1)^2 & * & * \\ * & -(v_1, v_2)^2 - (v_2, v_3)^2 & * \\ * & * & -(v_2, v_3)^2 - (v_3, v_1)^2 \end{pmatrix}$$

となり  $\text{tr}(X' J X)^2 = -2((v_1, v_2)^2 + (v_2, v_3)^2 + (v_3, v_1)^2) = -2f(X)$  を得る。

$t \in \mathbb{C}^\times$  に対しては,  $f(tX) = t^4 f(X)$  は明らかである.

$g_1 \in Sp_{2n}(\mathbb{C})$  に対しては

$$\begin{aligned} -2f(g_1 X) &= \text{tr}((g_1 X)' J (g_1 X))^2 = \text{tr}(X' \underbrace{(g_1' J g_1)}_J X)^2 \\ &= \text{tr}(X' J X)^2 = -2f(X) \end{aligned}$$

即ち  $f(g_1 X) = f(X)$  が成り立つ.

$g_2 \in SO_3(\mathbb{C})$  に対しては,

$$\begin{aligned} -2f(g_2 X) &= -2f(X g_2') = \text{tr}((X g_2')' J X g_2')^2 \\ &= \text{tr}(g_2 X' J X g_2')^2 = \text{tr} g_2 (X' J X)^2 g_2^{-1} \\ &= \text{tr}(X' J X)^2 = -2f(X) \end{aligned} \quad \text{以上よりまとめ}$$

$$f(gX) = f(t(g_1 X g_2')) = t^4 f(X)$$

即ち  $f(gv) = \phi(g)f(v)$  が得られた.  $f^V$  についても

同様である. //

以上より 次の事じわが, 左.

$$f(X) = -\frac{1}{2} \text{tr}((X' J X)^2)$$

### orbit 分解

orbit 分解は以下の表で与えられる. (0) が  $O_0$ , (1) が

$O_1$  で  $\Omega = O_0 \cup O_1$  である.

|     | $X$                                                                 | $X'JX$                                                            | $XX'$                                                                          | rank $X$ | isotropy                           | orbit dim. |
|-----|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|----------|------------------------------------|------------|
| (0) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$                      | $\begin{pmatrix} & & \\ & 0 & \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}$          | $\begin{pmatrix} 1 &   & \\ \hline & & 1 \end{pmatrix}$                        | 3        | $(C_{n-2} T_1) \sqcup_{2n-3}$      | $6n$       |
| (1) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$              |                                                                   | $\begin{pmatrix} 1 &   & \\ \hline & & 1 \end{pmatrix}$                        | 2        | $(C_{n-1} T_1)$                    | $4n+2$     |
| (2) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ -1 & 0 & -i \\ & i & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{pmatrix} &   & 0 & i \\ \hline 0 & & 1 & 0 \\ & 0 & 1 & \end{pmatrix}$ | 3        | $(C_{n-2} T_1) \sqcup_{2n-2}$      | $6n-1$     |
| (3) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$              |                                                                   | $\begin{pmatrix} &   & \\ \hline & & 1 \end{pmatrix}$                          | 2        | $(C_{n-1} T_1) \sqcup_1$           | $4n+1$     |
| (4) | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \\ \hline \end{pmatrix}$                   | $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$                            | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \hline \end{pmatrix}$                                | 3        | $(C_{n-3} A_1 T_1) \sqcup_{6n-12}$ | $6n-3$     |
| (5) | $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{pmatrix}$                 |                                                                   | $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \hline \end{pmatrix}$                                | 2        | $(C_{n-2} T_2) \sqcup_{4n-5}$      | $4n+1$     |
| (6) | $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ \hline \end{pmatrix}$                 |                                                                   | $\begin{pmatrix} 0 \\ \hline \end{pmatrix}$                                    | 1        | $(C_{n-1} T_2) \sqcup_{2n}$        | $2n+1$     |
| (7) | $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 & \\ \hline & & 1 \end{pmatrix}$         |                                                                   | $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \hline \end{pmatrix}$                                | 2        | $(C_{n-2} T_2) \sqcup_{4n-4}$      | $4n$       |
| (8) | $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{pmatrix}$                 |                                                                   | $\begin{pmatrix} 1 \\ \hline \end{pmatrix}$                                    | 1        | $(C_{n-1} T_2) \sqcup_{2n-1}$      | $2n+2$     |
| (9) | $\begin{pmatrix} 0 \\ \hline \end{pmatrix}$                         |                                                                   | $\begin{pmatrix} 0 \\ \hline \end{pmatrix}$                                    | 0        | $(C_n A_1 T_1)$                    | 0          |

$( ) = \text{Levi part}$

$\sqcup_k = (\dim = k \text{ or nilpotent Lie algebra})$

$T_k = (\dim = k \text{ or torus})$

以下  $O_i$  を表の  $i$  番目の orbit とする ( $i=0, 1, \dots, 9$ ).

そして  $\Lambda_i$  を Zariski closure of  $\{(v, v^*) \in V \times V^* ;$

$v \in O_i, v^* \in (T_v^* O_i)^+ \}$  ( $= O_i$  の conormal bundle)

とすると,

$\dim \Lambda_i = \dim V = 6n$  である。

### Holonomy diagram (ホロミー図形)

$\Lambda_i$  を  $(\bar{i})$  で表わすことにして,

(i)  $\dim(\Lambda_i \cap \Lambda_j) = \dim V - 1$  のとき,

(1)  $\Lambda_i \cap \Lambda_j$  のなかに  $\dim V - 1$  とする  $G$ -orbit  
(次元が...) が含まれているとき,

$(\bar{i}) - (\bar{j})$  とかく。

(2)  $\Lambda_i \cap \Lambda_j$  の中に次元が  $\dim V - 1$  とする  $G$ -orbit

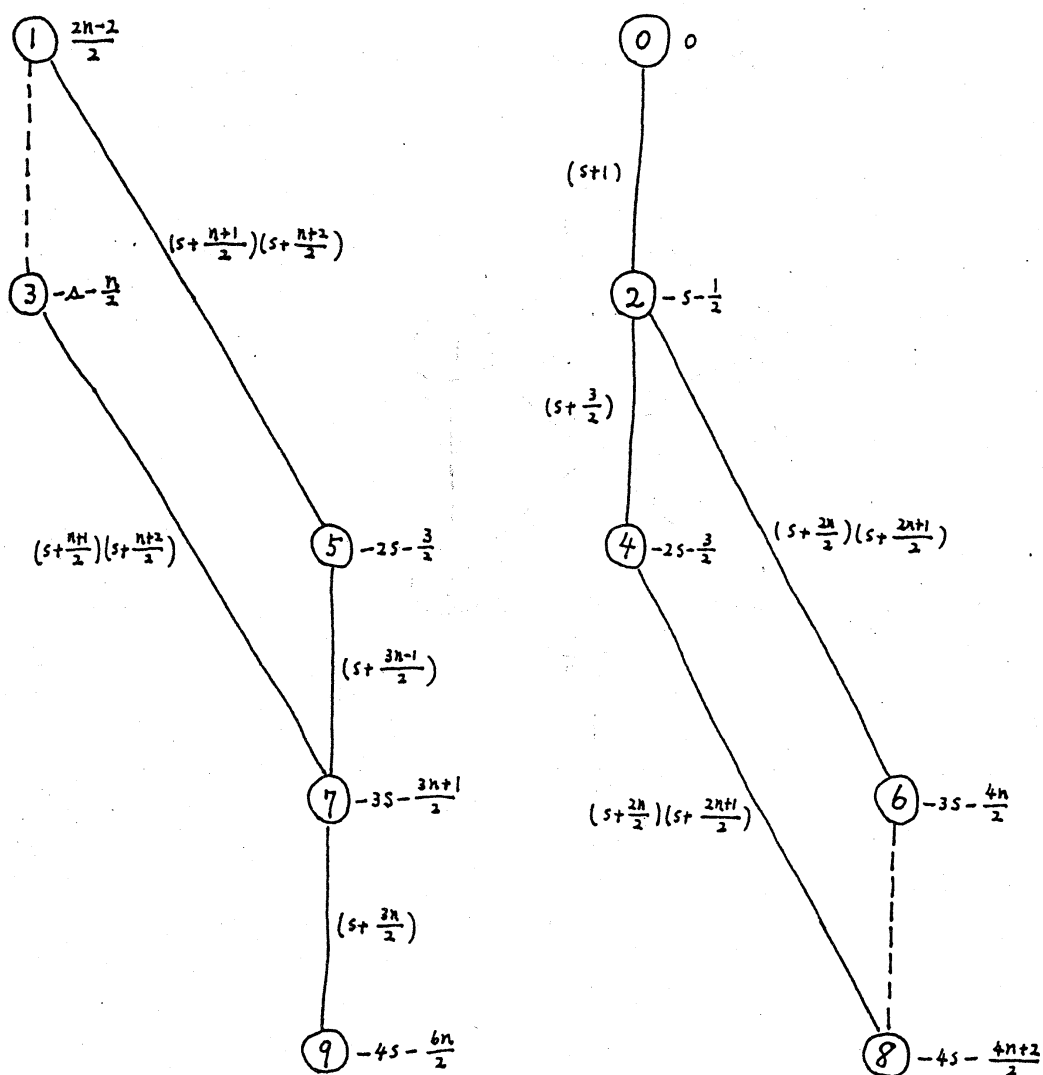
が含まれていないとき,  $(\bar{i}) - (\bar{j})$  と書く。

(ii)  $\dim(\Lambda_i \cap \Lambda_j) < \dim V - 1$  のときは,

$(\bar{i})$  と  $(\bar{j})$  は線で結ばない。

この規則のもとに得られる図形が holonomy diagram である。

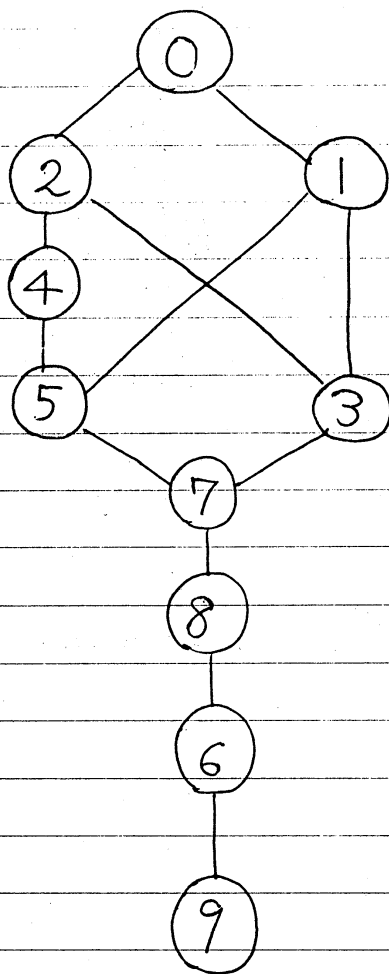
今の場合は次のようになる。



Closure relation

$\overline{O_i} \supset O_j$  のとき  $(i)$  よりも  $(j)$  の方が下にある,

という条件で 図 を書くと 次のようになる.



さて  $X = (v_1, v_2, v_3) \in M_{2n,3}(\mathbb{C})$  とし

$$v_j = \begin{pmatrix} v_j' \\ v_j'' \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow n \\ \uparrow n \end{matrix} = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \\ x_{n+1,j} \\ \vdots \\ x_{2n,j} \end{pmatrix} \quad \text{とおく.}$$

$j \neq k$  のとき

$$\frac{\partial(v_j, v_k)}{\partial x_{ij}} = \begin{cases} x_{i+n,j} & (1 \leq i \leq n) \\ -x_{i-n,j} & (n+1 \leq i \leq 2n) \end{cases}$$

で あることを使うと

$$(\text{grad } f)(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_{11}} & \frac{\partial f}{\partial x_{12}} & \frac{\partial f}{\partial x_{13}} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f}{\partial x_{2n,1}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n,2}} & \frac{\partial f}{\partial x_{2n,3}} \end{pmatrix} = -2JXX'JX$$

が得られ、従って

$$(\text{grad } \log f)(X) = \frac{(\text{grad } f)(X)}{f(X)} = \frac{4JXX'JX}{\text{tr}((X'JX)^2)}$$

となる。

$$O_1 \ni \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & & & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \uparrow n \\ \downarrow n \end{array} \quad \text{を 通る } \text{grad log } f \text{ の fibre}$$

$$= \left\{ \left( \begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 0 & & & \\ & x_2 & & & & \\ & \vdots & & & & \\ 0 & & 0 & & & \\ & x_n & & & & \\ \hline 0 & 0 & 0 & & & \\ & y_2 & & & & \\ 0 & & 0 & & & \\ & y_n & & & & \end{array} \right) \right\} + \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & & & \\ & 0 & & & & \\ \hline & 0 & 0 & 1 & & \\ & & & & & \\ & & & & 0 & \end{array} \right) \quad \text{である.}$$

•  $b$ -関数は次のように与えられる。

$$b(s) = 2^4 (s+1) \left(s + \frac{3}{2}\right) \left(s + \frac{2n}{2}\right) \left(s + \frac{2n+1}{2}\right)$$

でこれは右側の holonomy diagram に対応している。

$$\text{一方 } \frac{\dim V}{\deg f} = \frac{6n}{4} = \frac{3n}{2} \quad \text{で}$$

$$b\left(-s + \frac{3n}{2} - 1\right) = 2^4 \left(s + \frac{3n}{2}\right) \left(s + \frac{3n-1}{2}\right) \left(s + \frac{n+2}{2}\right) \left(s + \frac{n+1}{2}\right)$$

は左側の holonomy diagram に対応する。

★  $f$  が non-degenerate (i.e.  $F = \text{grad log } f$  が dominant) のときは  
 holonomy diagram は 1つ (この例のように 2つに分解しない) で  
 $b(s) = b\left(-s - \frac{\dim V}{\deg f} - 1\right)$  なる対称性が成り立つ。

次に  $\mathcal{F}(f^\alpha)$  の具体的な様子をみたいが,  $\mathbb{R}$  上でやると解析的に面倒なところがあるので有限体上で様子をみてみよう.

$\mathbb{F}_q$  =  $q$  個の元をもつ有限体, 標数  $\neq 2$  とする.

$$G(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q^\times \times \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{F}_q) \times \mathrm{SO}_3(\mathbb{F}_q)$$

$$V(\mathbb{F}_q) = M_{2n,3}(\mathbb{F}_q) \quad \text{と する.}$$

$\mathbb{R}, \mathbb{C}, p$ -進体, 有限体, などを全部 みわたしなからやるということは非常に大切なことである. 今,  $\mathbb{R}$  上と  $\mathbb{F}_q$  上の概念を比べてみよう.

| $\mathbb{R}$                                                                                                                  | $\mathbb{F}_q$                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $x \mapsto x^\alpha$<br>これは $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha$ (乗法的)                                                           | $\chi: \mathbb{F}_q^\times \rightarrow \mathbb{C}^\times, \chi(xy) = \chi(x)\chi(y)$<br>但し $\chi(0) = 0$ . multiplicative character                                                                  |
| $x \mapsto e^{\sqrt{-1}x}$<br>$e^{\sqrt{-1}(x+y)} = e^{\sqrt{-1}x} e^{\sqrt{-1}y}$                                            | $\psi: \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times, \psi(x+y) = \psi(x)\psi(y)$<br>$\psi \neq 1$ , additive character                                                                                 |
| $f^\alpha$<br>これは $x^\alpha = f$ を代入したもの.                                                                                     | $(\chi \circ f)(v) = \chi(f(w))$                                                                                                                                                                     |
| $\mathcal{F}(\varphi)(y) = \int_{V(\mathbb{R})} \varphi(x) e^{\sqrt{-1}\langle x, y \rangle} dx$<br>$(\varphi: \text{急減少関数})$ | $\mathcal{F}(\varphi)(w) = q^{-\frac{1}{2} \dim V} \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \varphi(v) \psi(\langle v, w \rangle)$<br>$(\varphi: V(\mathbb{F}_q) \text{ 上の } \mathbb{C}\text{-valued function})$ |

|                                  |                                                                                                            |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathcal{F}$ は $L^2$ -norm を保つ. | $\sum_{u \in V(\mathbb{F}_q)}  \varphi(u) ^2 = \sum_{u' \in V(\mathbb{F}_q)}  \mathcal{F}(\varphi)(u') ^2$ |
| $\mathcal{F}(f^\alpha)$          | $\mathcal{F}(\chi \circ f)$                                                                                |

以上により  $f^\alpha$  の Fourier 変換 に対応する 有限体上の  
概念は  $\mathcal{F}(\chi \circ f)$  であることがわかった。

$$\text{今, } \tilde{\mathcal{F}} = \left( \begin{array}{c|c} 0 & I_{n-1} \\ \hline -I_{n-1} & 0 \end{array} \right) \text{ と おき}$$

$$\varphi: M_{2n-2,3}(\mathbb{F}_q) \longrightarrow \{(\alpha_{ij}) \in M_3(\mathbb{F}_q) \mid \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0\}$$

$$\underset{\sim}{\tilde{X}} \longmapsto \tilde{X}' \tilde{\mathcal{F}} \tilde{X}$$

なる map を考えると, 計算により

$$\# \varphi^{-1} \left( \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) & \left( \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \right) \\ q^{4n-7}(q^{2n-2}-1) + q^{4n-4} & \left( \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ -\alpha & 0 & \gamma \\ -\beta & -\gamma & 0 \end{pmatrix} = 0 \right) \end{cases}$$

が 得られる。

$$v^v = \left( \begin{array}{ccc|ccc} a_1 & a_2 & a_3 & & & \\ & 0 & & & & \\ \hline b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & 0 & & & & \end{array} \right) \begin{matrix} \uparrow n \\ \downarrow n \end{matrix}, \quad v = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n,1} & x_{2n,2} & x_{2n,3} \end{pmatrix} = (v_1, v_2, v_3) \in M_{2n,3}(\mathbb{F}_q)$$

と おき, 更に  $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{n+1,1} & x_{n+1,2} & x_{n+1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$  と おく.

$$v = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \\ 0 & 0 & 0 \\ x_{n+2,1} & x_{n+2,2} & x_{n+2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n,1} & x_{2n,2} & x_{2n,3} \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{同一視}} \begin{pmatrix} x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} \\ x_{n+2,1} & x_{n+2,2} & x_{n+2,3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{2n,1} & x_{2n,2} & x_{2n,3} \end{pmatrix} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3) \in M_{2n-2, 3}$$

と 考える.

同一視

$$\mathcal{F}(\chi \circ f)(v) = q^{-3n} \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} \psi(\text{tr}(v'v)) \chi((v_1, v_2)^2 + (v_2, v_3)^2 + (v_3, v_1)^2) \quad (*)$$

ここで,

$$(v_i, v_j) = v_i' \mathcal{J} v_j = (x_i \boxed{\phantom{x}} \mid y_i \boxed{\phantom{x}}) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} = (x_i, y_i) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} + \tilde{v}_i' \mathcal{J} \tilde{v}_j$$

$$= (x_i, y_i) \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_j \\ y_j \end{pmatrix} + \tilde{v}_i' \mathcal{J} \tilde{v}_j$$

$$= \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + (\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \quad \text{となるから}$$

$$(v_1, v_2)^2 + (v_2, v_3)^2 + (v_3, v_1)^2 = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left( \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} + (\tilde{v}_i, \tilde{v}_j) \right)^2$$

$$\text{よって, } \text{tr}(v'v) = \sum_{i=1}^3 (a_i x_i + b_i y_i) \quad \text{であるから,}$$

$$(*) = q^{-3n} \sum_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \\ (y_1, y_2, y_3) \\ \hat{v} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \tilde{v}_3)}} \psi\left(\sum_{i=1}^3 (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\left|\frac{x_i y_i}{x_j y_j}\right| + (\tilde{v}_i \tilde{v}_j)\right)^2\right)$$

従って  $q^{3n} \mathcal{F}(\chi \circ f)(v^v)$

$$= \sum_{(\alpha_{ij})} \sum_{\substack{\tilde{v} \in \varphi^{-1}(\alpha_{ij}) \\ (\frac{x}{y})}} \psi\left(\sum_{i=1}^3 (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left(\left|\frac{x_i y_i}{x_j y_j}\right| + \alpha_{ij}\right)^2\right)$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij}) \neq 0} + \sum_{(\alpha_{ij}) = 0}$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij}) \neq 0} q^{4n-7} (q^{2n-2} - 1) \sum_{(\frac{x}{y})} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i < j} \left(\left|\frac{x_i y_i}{x_j y_j}\right| + \alpha_{ij}\right)^2\right)$$

$$+ (q^{4n-7} (q^{2n-2} - 1) + q^{4n-4}) \sum_{(\frac{x}{y})} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i < j} \left|\frac{x_i y_i}{x_j y_j}\right|^2\right)$$

$$= \sum_{(\alpha_{ij})} q^{4n-7} (q^{2n-2} - 1) \sum_{(\frac{x}{y})} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i < j} \left(\left|\frac{x_i y_i}{x_j y_j}\right| + \alpha_{ij}\right)^2\right)$$

$$+ q^{4n-4} \sum_{(\frac{x}{y})} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i < j} \left|\frac{x_i y_i}{x_j y_j}\right|^2\right) \quad (**)$$

ここで 和の順番を変える.

$$\{ |x_i y_i| + \alpha_{ij} ; \alpha_{ij} \} = \{ \alpha_{ij} \} \quad \forall i, j$$

$$\sum_{(\alpha_{ij})} \chi \left( \sum_{i < j} (|x_i y_i| + \alpha_{ij})^2 \right) = \sum_{(\alpha_{ij})} \chi \left( \sum_{i < j} \alpha_{ij}^2 \right)$$

とあるから,

$$(**) = q^{4n-7} (q^{2n-2} - 1) \sum_{\substack{(x) \\ (y)}} \psi \left( \sum_i (a_i x_i + b_i y_i) \right) \sum_{(\alpha_{ij})} \chi \left( \sum_{i < j} \alpha_{ij}^2 \right)$$

$$+ q^{4n-4} \sum_{\substack{(x) \\ (y)}} \psi \left( \sum_i (a_i x_i + b_i y_i) \right) \chi \left( \sum_{i < j} |x_i y_i|^2 \right)$$

$$\text{さて } \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ならば}$$

$$\sum_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \\ (y_1, y_2, y_3)}} \psi \left( \sum_{i=1}^3 (a_i x_i + b_i y_i) \right) = 0 \quad (\text{演習問題!})$$

$$\text{以下 } v^\vee = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0 \quad \text{とすると,}$$

$$q^{3n} \mathcal{F}(\chi \circ f)(v^\vee) = q^{4n-4} \sum_{\substack{(x) \\ (y)}} \psi \left( \sum_i (a_i x_i + b_i y_i) \right) \chi \left( \sum_{i < j} |x_i y_i|^2 \right)$$

即ち

$$\mathcal{F}(\chi \circ f)(v^\vee) = q^{n-4} \sum_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \\ (y_1, y_2, y_3)}} \psi \left( \sum_i (a_i x_i + b_i y_i) \right) \chi \left( \sum_{i < j} |x_i y_i|^2 \right)$$

さて 新しい記号として

$$G_1(\mathbb{F}_q) = \mathbb{F}_q^\times \times Sp_2(\mathbb{F}_q) \times SO_3(\mathbb{F}_q)$$

$$V_1(\mathbb{F}_q) = M_{2,3}(\mathbb{F}_q)$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \quad v_1^\vee = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}$$

$$f_1(v_1) = \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left| \frac{x_i y_i}{x_j y_j} \right|^2, \quad f_1^\vee = f_1$$

とあくと,  $\mathcal{F}_1$  を  $V_1$  上の Fourier 変換 とするとき, 定義から

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(\chi \circ f_1)(v_1^\vee) &= q^{-3} \sum_{v_1 \in V_1(\mathbb{F}_q)} \psi(\langle v_1, v_1^\vee \rangle) \chi(f_1(v_1)) \\ &= q^{-3} \sum_{\substack{(x_1, x_2, x_3) \\ (y_1, y_2, y_3)}} \psi\left(\sum_i (a_i x_i + b_i y_i)\right) \chi\left(\sum_{i < j} \left| \frac{x_i y_i}{x_j y_j} \right|^2\right) \end{aligned}$$

となるから, 結局

$$v_1^\vee = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0, \quad (\Leftrightarrow v_1^\vee = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0) \text{ のとき,}$$

$$\boxed{\mathcal{F}(\chi \circ f)(v^\vee) = q^{n-1} \mathcal{F}_1(\chi \circ f_1)(v_1^\vee) \quad (v_1^\vee \neq 0)}$$

を得る.

即ち Fourier 変換 (の一部) の計算は,  $n=1$  の  
場合に帰着した.

$f_1^v(u_1^v) \neq 0$  のときは  $\mathcal{F}_1(\chi \circ f_1)(u_1^v)$  は Z. Chen により  
計算されているので、その結果を借用すると、  
 $O_1^v(\mathbb{F}_q)$  上で、

$$\mathcal{F}(\chi \circ f)(u^v) = q^{n-1} \theta(-1) \left( \frac{G(\chi^2, \psi)}{\sqrt{q}} \right)^2 (\theta \chi^{-1})(f^v(u^v))$$

$$\text{但し, } \theta(x) = \begin{cases} 1 & (x \in \mathbb{F}_q^{\times 2}) \text{ 平方剰余} \\ -1 & (x \in \mathbb{F}_q^{\times} - \mathbb{F}_q^{\times 2}) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

$$G(\chi^2, \psi) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in \mathbb{F}_q^{\times}} \chi^2(x) \psi(x) : \text{ガウス和}$$

$$\chi^{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \chi(x)^{-1} & (x \neq 0) \\ 0 & (x=0) \end{cases}$$

が 成り立つ。

Remark.  $q^{n-1} = q^{\frac{1}{2}(\dim V - \dim O_1)}$

実際  $\dim V = 6n$ ,  $\dim O_1 = 4n+2$  である。

$u^v \in O_1^v(\mathbb{F}_q)$  のとき  $\mathcal{F}(\chi \circ f)(u^v)$  が得られたが、

$u^v \notin O_1^v(\mathbb{F}_q)$  も計算できる。ここでは、簡単にする為

$\chi^2 \neq 1$  を仮定して  $u^v \notin O_1^v(\mathbb{F}_q)$  の場合を考える。

$$\chi^2 \neq 1, v \notin O_1^V(\mathbb{F}_q) \text{ ならば, } \mathcal{F}(\chi \circ f)(v) = 0$$

$\therefore$

$$f(v) \neq 0 \text{ なら } |\chi(f(v))| = 1, f(v) = 0 \text{ なら } |\chi(f(v))| = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} |(\chi \circ f)(v)|^2 = \sum_{v \in \Omega(\mathbb{F}_q)} 1 = \#\Omega(\mathbb{F}_q)$$

$\Omega \xrightarrow{\text{grad log } f} O_1^V$  の fibre は  $(2n-2)$  次元 affine space

$$\text{であるから, } \#\Omega(\mathbb{F}_q) = \#O_1^V(\mathbb{F}_q) \cdot q^{2n-2}$$

$$\text{従って, } \#O_1^V(\mathbb{F}_q) \cdot q^{2n-2} = \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} |(\chi \circ f)(v)|^2$$

$$= \sum_{v \in V(\mathbb{F}_q)} |\mathcal{F}(\chi \circ f)(v)|^2 \quad (L^2\text{-norm を保つことには注意})$$

$$= \sum_{v \in O_1^V(\mathbb{F}_q)} + \sum_{v \notin O_1^V(\mathbb{F}_q)}$$

ここで  $v \in O_1^V(\mathbb{F}_q)$  のとき

$$\mathcal{F}(\chi \circ f)(v) = q^{n-1} \theta(-1) \left( \frac{G(\chi^2, \psi)}{\sqrt{q}} \right)^2 (\theta \chi^{-1})(f^v(v))$$

$$\text{で } |\theta(-1)| = 1, \left| \frac{G(\chi^2, \psi)}{\sqrt{q}} \right| = 1, |(\theta \chi^{-1})(f^v(v))| = 1$$

$$\text{より } |\mathcal{F}(\chi \circ f)(v)| = q^{n-1} \quad \therefore |\mathcal{F}(\chi \circ f)(v)|^2 = q^{2n-2}$$

$$\text{即ち } \sum_{v \in O_1^*(F_q)} |\tilde{\chi}(\chi \circ f)(v)|^2 = \# O_1^*(F_q) \cdot q^{2n-2}$$

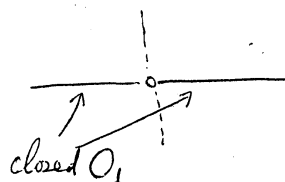
$$\text{従て, } \sum_{v \in O_1^*(F_q)} |\tilde{\chi}(\chi \circ f)(v)|^2 = 0 \quad \text{即ち } \tilde{\chi}(\chi \circ f)(v) = 0 //$$

結語

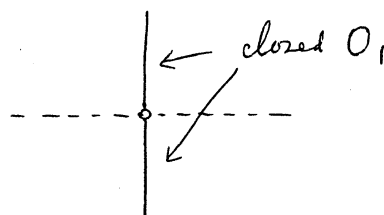
$O_1$  は  $f^{-1}\mathbb{C}^\times$  内の唯一の closed orbit であたが、  
これは  $f$  のとり方に依存する。例えば、

$G = \mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}^\times \ni g = (\alpha, \beta)$  が  $\mathbb{C}^2$  に  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha x \\ \beta y \end{pmatrix}$  と  
作用している場合を考えよう。

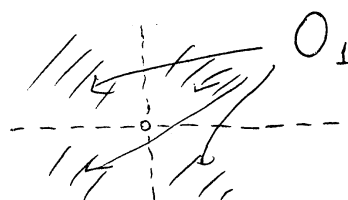
i)  $f(x, y) = x$  のとき



ii)  $f(x, y) = y$  のとき



iii)  $f(x, y) = xy$  のとき



定義:  $\dim O_1 = \dim V$  (即ち  $O_1 = O_0$ ) と

ある 相対不変式  $f$  が存在するとき,  $(G, V)$  を

正則 (regular) という。

これは  $F = \text{grad log } f$  が dominant, という従来の  
定義と一致する。

従来, 正則 という概念は, 概均質ベクトル空間の理論  
では重要と考えられてきたが

1.  $\zeta$ -関数 等への応用の為には, その条件は不要

この場合  $\sum_{v \in \Omega(\mathbb{Z})} \frac{1}{f(v)^s}$  と  $\sum_{v \in O_1(\mathbb{Z})} \frac{1}{f(v)^s}$  の間に

関数等式が成立するはず。 (Th A, Th B)

2. 分類理論を考えるためには「正則」は仮定しない

方がよい (Th C)

## §6 Kac-Moody Lie algebra

(Kac, Moody, Lie と人の名前が 3 つ並んでいる. weight が 5 かう.)

定義  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{Z})$  が  
generalized Cartan matrix (略して GCM) とは,

$$(C1) \quad a_{ii} = 2$$

$$(C2) \quad a_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j)$$

$$(C3) \quad a_{ij} = 0 \iff a_{ji} = 0$$

この辺に関する一般論については V.G. Kac: Infinite dimensional Lie algebras をみて下さい.

$A$  の Dynkin diagram を定義しよう.

1.  $n$  個の頂点を まず用意する.

2.  $(a_{ij}, a_{ji}) = (0, 0)$  (約束により 一方が 0 なら  
他方も 0) のとき, 二つの頂点  $i$  と  $j$  は  
結ばない.

3.  $(a_{ij}, a_{ji}) = (-1, -1)$  のとき  $\overset{i}{\circ} \text{---} \overset{j}{\circ}$   
       "  $(-2, -1)$  "  $\overset{i}{\circ} \text{---} \text{---} \overset{j}{\circ}$   
       "  $(-3, -1)$  "  $\overset{i}{\circ} \text{---} \text{---} \text{---} \overset{j}{\circ}$

$(a_{ij}, a_{ji}) = (-4, -1)$  のとき  $\circ \Leftarrow \equiv \circ$

一般に  $\circ \xrightleftharpoons[|a_{ji}|]{|a_{ij}|} \circ$  ( $\circ$  から  $\circ$  へ  $|a_{ji}|$  個の線,  $\circ$  から  $\circ$  へ  $|a_{ij}|$  個の線を引く)

定義  $A$  が indecomposable とは,  $A$  の Dynkin diagram が 連結であること.

定義  $A = \text{indecomposable GCM}$  のとき

(i)  $Ax > 0$  なる  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$  が あるとき

$A$  を finite type とする.

(ii)  $Ax = 0$  なる  $x > 0$  が あるとき

$A$  を affine type とする.

(iii)  $Ax < 0$  なる  $x > 0$  が あるとき

$A$  を indefinite type とする.

但し  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$  とは  $\forall x_i > 0 (i=1, \dots, n)$  を意味する.

命題  $\{ \text{indecomposable GCM's} \}$

$= \{ \text{finite type} \} \sqcup \{ \text{affine type} \} \sqcup \{ \text{indefinite type} \}$

(disjoint union) とする.

定理 (1) finite type の  $A$  は分類されていて Table Fin で与えられる.

(2) affine type の  $A$  は分類されていて Table Aff 1~3 で与えられる.

(3) 他の GCM はすべて indefinite. (無限個ある)

Table Fin

$$A_l: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \cdots - \bullet_{l-1} - \bullet_l \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \quad \quad \bullet_{l-1} \quad \bullet_l \end{array}$$

$$B_l: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \cdots - \bullet_{l-1} - \bullet_l \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \quad \quad \bullet_{l-1} \quad \bullet_l \end{array}$$

$$C_l: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \cdots - \bullet_{l-1} - \bullet_l \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \quad \quad \bullet_{l-1} \quad \bullet_l \end{array}$$

$$D_l: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \cdots - \bullet_{l-2} - \bullet_{l-1} \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \quad \quad \bullet_{l-2} \quad \bullet_{l-1} \end{array}$$

$$E_6: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \bullet_5 \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \bullet_3 \quad \bullet_4 \quad \bullet_5 \end{array}$$

$$E_7: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \bullet_5 - \bullet_6 \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \bullet_3 \quad \bullet_4 \quad \bullet_5 \quad \bullet_6 \end{array}$$

$$E_8: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 - \bullet_5 - \bullet_6 - \bullet_7 \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \bullet_3 \quad \bullet_4 \quad \bullet_5 \quad \bullet_6 \quad \bullet_7 \end{array}$$

$$F_4: \begin{array}{c} \bullet_1 - \bullet_2 - \bullet_3 - \bullet_4 \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \quad \bullet_3 \quad \bullet_4 \end{array}$$

$$G_2: \begin{array}{c} \bullet_1 \Rightarrow \bullet_2 \\ \bullet_1 \quad \bullet_2 \end{array}$$

Table Aff 1

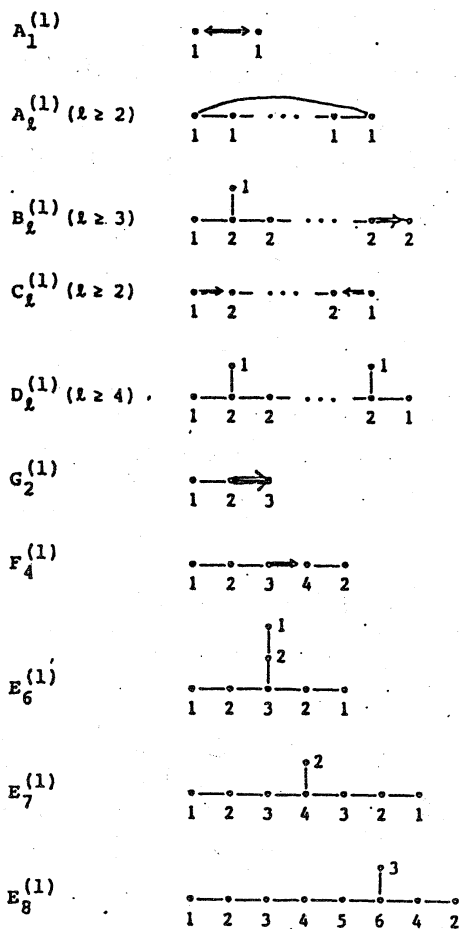


Table Aff 2

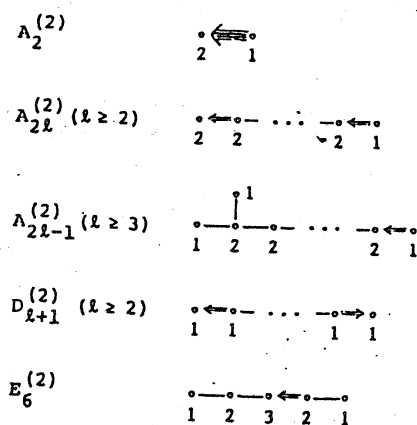


Table Aff 3



$A$  が affine type のとき,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} > 0$  かつ  $Ax = 0$

となる  $x$  は  $\text{GCD}(x_1, \dots, x_n) = 1$  (即ち  $x_1, \dots, x_n$  の最大公約因子 = 1, 各  $x_i$  は自然数) という条件では 唯一つ定まる。

そこで Table Aff 1 ~ 3 では 各  $i$  に対応する頂点  $0$  の下に  $x_i$  を書いてある。

例えば, Table Aff 3 で  $\begin{array}{ccc} 0 & -0 & \leftarrow 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}$

は  $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  で対応する Cartan 行列  $A$  は

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ となる。 実際 } \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

以上で表の見方の説明を終える。

$f, f^\vee$  を  $\mathbb{C}$ -vector spaces として,

$\langle, \rangle : f \times f^\vee \rightarrow \mathbb{C}$  を非退化な双 1 次形式とする。

これによつて,  $f^\vee$  を  $f$  の dual space とみなす。

$$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\} \subset f^\vee$$

$$\Pi^\vee = \{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_n^\vee\} \subset f$$

( $\vee$  のつき方が奇妙だが  
歴史的な事情でこう  
なっている。

定義  $(f, f^\vee, \langle, \rangle, \Pi, \Pi^\vee)$  が  $A$  の realization であるとは,

(R1)  $\Pi, \Pi^\vee$  がともに 1 次独立

(R2)  $\langle \alpha_i^\vee, \alpha_j \rangle = a_{ij}$  (但し  $A = (a_{ij})$ )

これは V.G. Kac の定義と少し違う。Kac の場合, 例えは finite type のとき semisimple な Lie 環しか, 考えないように調節してあるが, ここでは reductive な Lie 環も含むように 少したけ axiom を落としている。

定義 (1)  $\mathbb{C}$  上の Lie algebra  $\tilde{\mathfrak{g}}(A)$  を次のように定義する。

生成系:  $\{e_i, f_i \mid 1 \leq i \leq n\} \cup f$

関係式:  $[e_i, f_j] = \delta_{ij} \alpha_i^\vee$  ( $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ )

$$[h, h'] = 0$$

$$[h, e_i] = \langle h, \alpha_i \rangle e_i$$

$$[h, f_i] = -\langle h, \alpha_i \rangle f_i$$

$$(1 \leq i \leq n, h, h' \in f)$$

Lie 環の Chevalley base を御存知の方は何を念頭にかいているかわかると思います。

(2)  $\hat{\mathfrak{g}}(A)$  の (Lie 環としての) ideal  $\mathfrak{r}'$  で  $\mathfrak{r}' \cap \mathfrak{f} = 0$

となるもののうちで最大のものが存在する.

$$\mathfrak{r} = \max(\mathfrak{r}') \quad \text{として} \quad \mathfrak{g}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{\mathfrak{g}}(A)/\mathfrak{r}$$

とおく.

(3)  $\mathfrak{g}'(A)$  を  $\{e_i, f_i \mid 1 \leq i \leq n\}$  から生成される

$\mathfrak{g}(A)$  の subalgebra とする.

$\mathfrak{g}(A)$  が reductive のとき  $\mathfrak{g}'(A)$  が semisimple part に相当する.

$\mathfrak{g}(A)$  (あるいは  $\mathfrak{g}'(A)$ ) を Kac-Moody Lie algebra という.

注)  $e_i$  どうしや  $f_i$  どうしの relation は,  $\mathfrak{r}$  で割るから不要.

定理 (Killing, Cartan)

$$A \text{ が finite type なら } \mathfrak{f} = \sum_{i=1}^n \mathbb{C} \alpha_i^\vee, \mathfrak{f}^\vee = \sum_{i=1}^n \mathbb{C} \alpha_i$$

となる realization がとれて (一般には  $\mathfrak{f} \supset \sum_{i=1}^n \mathbb{C} \alpha_i^\vee$  etc. しか

いえない), このとき  $\mathfrak{g}(A)$  は  $\mathbb{C}$  上有限次 simple Lie algebra.

逆に  $\mathbb{C}$  上有限次 simple Lie algebra はすべてこうして得られる。



表現の diagram

$\rho: \mathfrak{g}(A) \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  表現, を考える.  $A$  は finite type<sup>(\*)</sup>

として,  $V = V_1 \oplus \dots \oplus V_s$  を既約表現への分解とする.

(1)  $A$  の Dynkin diagram (頂点は白丸にしておく)

と  $s$  個の黒丸 ( $\leftrightarrow \{V_1, \dots, V_s\}$ ) を用意する.

(2)  $V_i$  の highest weight を  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots)$  とする.

$\lambda_j = 0$  のとき,  $V_i$  に対応する  $\bullet$  と  $j$  に対応する  $\circ$

は結ばない.  $\lambda_j = 1$  のとき  $\bullet \xrightarrow{V_i} \circ$ ,  $\lambda_j \geq 2$  のとき

$\bullet \xRightarrow[\lambda_j \text{ 本}]{\quad} \circ$  とする. こうしてできたのが表現の

diagram である.

例) <sup>(\*)</sup> Dynkin diagram が連結であっても, 連結成分が finite type のときは finite type という

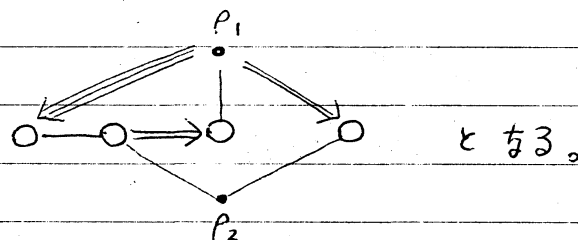
$$A = \left( \begin{array}{c} \alpha_1^\vee \quad \alpha_2^\vee \quad \alpha_3^\vee \quad \alpha_4^\vee \\ \circ \xrightarrow{\quad} \circ \Rightarrow \circ, \quad \circ \end{array} \right)$$

$$\rho_1 \leftrightarrow (\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4) = (3 \ 0 \ 1 \ 2)$$

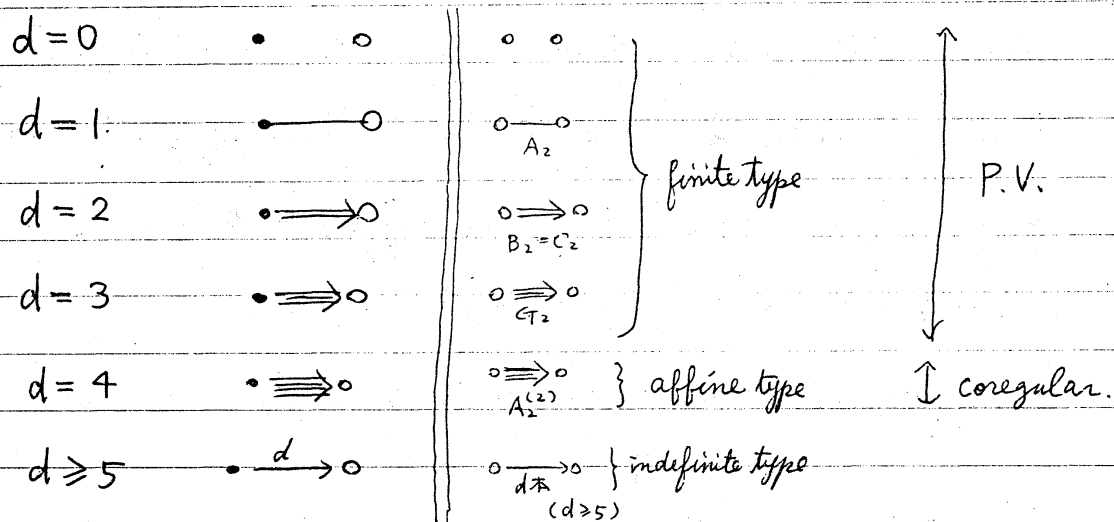
$$\rho_2 \leftrightarrow \quad \quad \quad = (0 \ 1 \ 0 \ 1)$$

このとき  $\rho = \rho_1 \oplus \rho_2$  に

対応する diagram は,



例)  $\mathbb{C}[x, y]_d$  で  $\mathbb{C}[x, y]$  の  $d$  次 homogeneous な部分とすると,  $SL_2(\mathbb{C})$  が  $\mathbb{C}[x, y]_d$  に作用する. 表現の diagram を考えるときに,  $SL_2(\mathbb{C})$  でも  $GL_2(\mathbb{C})$  でも変わらないことに注意する.



説明:  $SL_2(\mathbb{C})$  の  $\mathbb{C}[x, y]_d$  への既約表現の diagram

はこれで与えられるが, 黒丸を白丸でおきかえて Dynkin 図形

とみると  $d=0, 1, 2, 3$  が finite type,  $d=4$  が affine type,

$d \geq 5$  が indefinite type になっている. 一方,  $d$  度

$d=0, 1, 2, 3$  が  $(GL_2(\mathbb{C})$  のとき) 概均質ベクトル空間 (P.V.) に

なっている. そうすると,  $d=4$  が affine type にひとつだけ対応

しているから,  $d=4$  のとき P.V. にはななくても何か良い性質が

期待されるが, 実際 coregular という性質をもつ.

定義  $G =$  代数群,  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  表現.

このとき  $(G, \rho, V)$  が coregular であるとは,

$$\mathbb{C}[V]^G \stackrel{\text{def}}{=} \{ f \in \mathbb{C}[V] \mid f(gv) = f(v), \forall g \in G, \forall v \in V \}$$

が 多項式環 になること.

一般に, 環に対して homology 次元 というのは 定義

されて, 多項式環になるというのは homology 次元 が

零になる ということである. homology 次元 が 1 とか 2 とか

小さいうちが 不変式論も展開しやすい.

先ほどの例  $(\underset{\parallel}{G} SL_2(\mathbb{C}), \underset{\parallel}{V} \mathbb{C}[x, y]_d)$  における

$\mathbb{C}[V]^G$  の homology 次元 は 次のようになっている.

| $d$         | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8 | 9以上  |
|-------------|---|---|---|---|---|---|---|----|---|------|
| homology 次元 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 25 | 3 | 25以上 |

$\begin{array}{c} \curvearrowright \\ 19\text{世紀} \end{array}$ 
 $\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{最近} \end{array}$ 
 $\begin{array}{c} \uparrow \end{array}$

最近 Popov が色々調べ, 更に最近 Dixmier により  
 $d=7$  のとき 25 ということ等がわかった.

(塩田氏により  
 1960年代後半  
 にやっと得られた)

なぜ homology 次元 が 大事かというと, いわゆる Hilbert の

syzygy (シジギ) 列 というのはあって, その syzygy 列 の長さ

が まさに homology 次元 である.

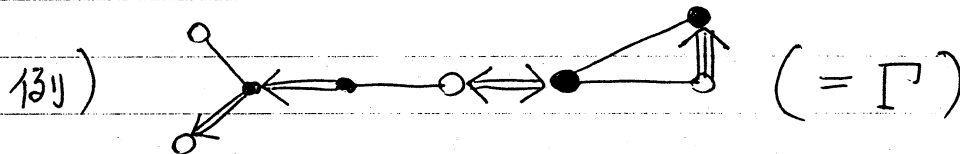
$xyzyzy$ 列は何かというと、不変式のなす環の生成系をもってくる。その生成系の間には何か関係があるかもしれないが、生成系の関係も求めないと不変式論ができたことにならない。しかし関係式も求めても関係式の間には関係があるかもしれない。そこまでわかると不変式論ができたといえる。ところが関係式の間に関係に更に関係があるかもしれない。その関係式の間に関係の関係も求めるければならない。例えば  
 $xyzyzy$ 列の長さから 3 という関係式の間に関係の関係という3段階までやるとだめということであり、homology次元が25というのは、それを25段階やらなければだめということになり  
 $d=7$ の場合など素朴な問題意識ではどうにもならない。だから  $d \leq 6$  (あるいは  $d=8$ ) しか不変式論ができるかな というのも それなりに理由があるのです。

coregular というのは homology次元が0、即ち生成系の間に関係がないという一番きれいな場合なのです。

そして  $d \geq 5$  では homology 次元  $\geq 1$  となり やっかいになる。

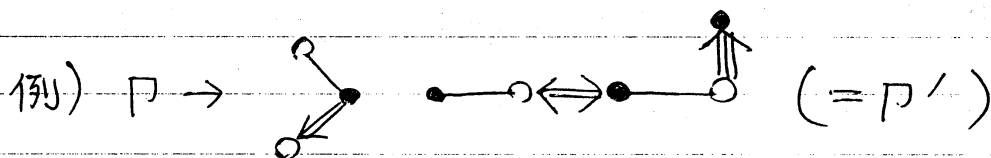
このようなことが もっと一般に 成り立つ という話をする。  
(やってみたら そうなっていた ということである。だから  
その本質的な関係を みつけよう というのは 今後の  
課題です )

Dynkin diagram の頂点を 黒 または 白 にぬったものを  
weighted Dynkin diagram という。

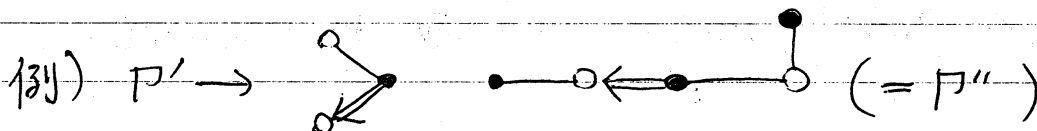


さて weighted Dynkin diagram について 2 種類の  
reduction を定義します。

Reduction I) 黒と黒をつなぐ辺を除く。



Reduction II) 白から黒へ向う n 重の矢を一重にする



この2つの reduction を可能な限り実行して得られる diagram  $\overline{\Gamma}$  を, reduced weighted Dynkin diagram と呼ぶ.

$G = \text{connected reductive 代数群}$ ,  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  に  
 対する  $(G, \rho, V)$  について, 次の条件を考える.

$$(A) \quad G = (\mathbb{C}^\times \times \cdots \times \mathbb{C}^\times) \times (\text{単純群}) / \{\text{中心に含まれる有限群}\}$$

$$(B) \quad \rho = \text{既約表現}$$

即ち, 表現の diagram の言葉でいうと

(A)' 白丸の部分は連結, finite type

(B)' 黒丸はひとつだけ

(注:  $\rho$  が effective とは限っていない)

### 定理 C

$$(1) \quad \{ (G, \rho, V) \text{ の diagram ; } (G, \rho, V) \text{ は P.V. かつ (A), (B) } \}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{reduced weighted Dynkin diagram} \\ \text{of finite type} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \circ \circ \circ \Rightarrow \circ \bullet \\ \circ \circ \circ \Rightarrow \circ \bullet \\ \circ \Rightarrow \circ \bullet \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad \{ (G, \rho, V) \text{ の diagram ; } ([G, G], \rho, V) \text{ は coregular かつ (A), (B) } \}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{reduced weighted Dynkin diagram} \\ \text{of affine type} \end{array} \right\} \cup \left\{ \begin{array}{c} \circ \circ \circ \circ \Rightarrow \circ \bullet \\ \circ \circ \circ \circ \Rightarrow \circ \bullet \end{array} \right\}$$

実は この分類は 昔から知られていて

(1) の方は Sato-Shintani, Ann. of Math. 1974 及び

Sato-Kimura, Nagoya Math. J. 1977 に,

(2) の方は Kac-Popov-Vinberg, C.R. 283 (1976), 875-

に 載っている。

このような表現の diagram を使うと みやすくなって 例えは

Sato-Shintani の表に 1ヶ所 ミスプリントがある, というようなことが  
すぐわかる。

証明の概略をやっておく。これだけだと P.V. と Kac-Moody Lie algebra と たまたま分類したところと同じだった というだけで関係ないように  
みえるけれども, reduced weighted Dynkin diagram of finite type なる P.V. が 得られる という片方側の  $\supset$  については ある程度のこと  
がわかる。

$\supset$  について: exceptional なものについては 直接計算して  
得られる。残りの無限個ある部分について説明する。

$A = \text{GCM}$  (一般化されたカルタン行列),

$\mathcal{G} = \mathcal{G}(A)$  を対応する Kac-Moody Lie algebra とする。

$\alpha \in \mathcal{F}^\vee$  に対し  $\{X \in \mathcal{G} \mid \forall H \in \mathcal{F} \text{ に対し } [H, X] = \langle H, \alpha \rangle X\}$   
を  $\mathcal{G}_\alpha$  とおく。

$$\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{ \alpha \in f^\vee; \alpha \neq 0 \text{ かつ } \sigma_\alpha \neq 0 \}$$

$$\Pi = \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}, \quad \Delta \subset \sum_{i=1}^n \mathbb{Z} \alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q} \text{ であつた。}$$

$$\text{今, } \Phi = \{ \varphi: \Pi \rightarrow \mathbb{Z} \mid \varphi(\alpha) \geq 0, \varphi \neq 0 \}$$

$$= \{ \varphi: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Z} \mid \mathbb{Z}\text{-linear} \mid \varphi(\alpha) \geq 0 (\alpha \in \Pi), \varphi \neq 0 \}$$

↑

$$\text{同一視 } ( \varphi ( \sum_i n_i \alpha_i ) = \sum_i n_i \varphi(\alpha_i) \text{ による} )$$

とあつた。

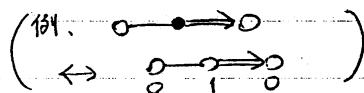
weighted Dynkin diagram にあつて

$$\varphi(\text{黒丸}) = 1, \quad \varphi(\text{白丸}) = 0 \quad \text{とすれば } \Phi \text{ の元が}$$

得られる。即ち

$$\{ \text{weighted Dynkin diagram} \mid \begin{array}{l} \text{underlying Dynkin diagram} \\ \text{は } A \text{ の Dynkin diagram} \end{array} \} \subset \Phi$$

そこで,  $\varphi \in \Phi$  にあつて



$$\mathcal{J}(\bar{i}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\substack{\alpha \in \Delta \cup \{0\} \\ \varphi(\alpha) = \bar{i}}} \sigma_\alpha, \quad \mathcal{J}'(\bar{i}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{J}'(A) \cap \mathcal{J}(\bar{i}) \text{ とあつた。}$$

そうすると,

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}(\bar{i})$$

$$\mathcal{J}' = \mathcal{J}'(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathcal{J}'(\bar{i})$$

しかも

$[\mathfrak{g}'(i), \mathfrak{g}'(j)] \subset \mathfrak{g}'(i+j)$  となる。

このようなを一般に *graded Lie algebra* という。

即ち *weighted Dynkin diagram* から *graded Lie algebra* が得られる。

この場合  $[\mathfrak{g}'(0), \mathfrak{g}'(1)] \subset \mathfrak{g}'(0+1) = \mathfrak{g}'(1)$

ゆえ  $\mathfrak{g}'(0)$  は  $\mathfrak{g}'(1)$  に作用することには注意する。

以下  $A$  を *finite type* または *affine type* とする。

$\mathfrak{g}'(0)$  は *weight* が 0 の部分で、これは まさに白丸の部分である。しかも  $\varphi \neq 0$  を仮定しているが、これは黒丸が少なくとも1個はある、ということである。

表をみればわかるように *finite type* や *affine type* から ひとつでも丸を除けば、すべて *finite type* になる。従って、白丸の部分は *finite type* になる。

従って ある *connected reductive group*  $G'(0)$  で、  
 $\text{Lie } G'(0) = \mathfrak{g}'(0)$ ,

$G'(0)$  が  $\mathfrak{g}'(1)$  に作用し、その微分が、もとの  $\mathfrak{g}'(0)$  の  $\mathfrak{g}'(1)$  への (adjoint の) 作用 に ちるものが存在する。

定理 (Vinberg, Math. USSR Izv. 10 (1976))

- (1)  $A = \text{finite type}$  ならば,  $(G'(0), \mathfrak{g}'(1))$  は有限個の orbits をもたない。とくに P.V. である。
- (2)  $A = \text{affine type}$  ならば,  $(G'(0), \mathfrak{g}'(1))$  は coregular である。

注) (1) 代数群が代数多様体に作用し orbits が有限個ある少なくとも一つは open である。

(2) coregular を cofree という人もある。

(1) の証明

1.  $X \in \mathfrak{g}'(1)$  ならば  $X$  は nilpotent, 即ち

$\text{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g}') \ni \text{ad}(X)$  を  $Y \mapsto [X, Y]$  で定義する

とき,  $\text{ad}(X)^N = 0$  とする  $N$  が存在する。

$$\therefore) \quad \text{ad}(X)\mathfrak{g}'(i) = [X, \mathfrak{g}'(i)] \subset \mathfrak{g}'(i+1)$$

$$\text{つまり, } \text{ad}(X)^m \mathfrak{g}'(i) \subset \mathfrak{g}'(i+m)$$

しかし finite type ゆえ  $\mathfrak{g}'$  は有限次元, 従って

$\mathfrak{g}'(i)$  たちは有限個しかあるから, 十分大きな  $m$  に

対して  $\mathfrak{g}'(i+m) = 0$  とする。 //

2.  $G'$  を単純群で  $\text{Lie}(G') = \mathfrak{g}'$  とするものを

考えると  $G'$  は  $\mathfrak{g}'$  に  $g: \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$  と作用する  

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{g}' & \xrightarrow{\psi} & \mathfrak{g}' \\ X & \mapsto & gXg^{-1} \end{array}$$

(すべて行列と思てよい)。そのとき

$\{\text{nilpotent element of } \mathfrak{g}'\} / G'$  は有限集合。

これを  $\{O_1, O_2, \dots, O_n\}$  とおく。

これは Dynkin-Kostant 理論 といわれるもので、

Springer-Stenberg (Springer Lecture Note 131) に その  
理論が書いてある。

実は  $\mathfrak{g}'$  の nilpotent elements の  $G'$ -共役類 は  
分類されている。分類結果は、

A.P. Элашвили, Труды Тбилисского Мам 46 (1975)  
109 ~ (英訳されているが表はわかる)

分類されてるくらいだから、有限個 というのは勿論わかる。

3.  $O_j \cap \mathfrak{g}'(1) = O'_1 \cup \dots \cup O'_l$  と連結成分へ

分解すると、各  $O'_i$  が  $G'(0)$ -orbit になっている。

$\therefore O_j$  は  $G'$ -orbit で  $G' \supset G'(0)$  ゆえ  $G'(0)O_j \subset O_j$ ,

よって  $G'(0)\mathfrak{g}'(1) \subset \mathfrak{g}'(1)$  ゆえ  $O_j \cap \mathfrak{g}'(1)$  は  $G'(0)$ -orbits

に分解する。  $G'(0)$  は連結ゆえ,  $G'(0)$ -orbit は各連結成分に含まれるから,  $O'_i = \bigsqcup_P G'(0) \cdot P$  と表わせる。

ここで  $G'(0) \cdot P$  が open subset であることか いえれば

$O'_i$  が それらの disjoint union であつて連結だから

$O'_i = G'(0) \cdot P$  を得る。  $G'(0) \cdot P$  が open であること

をいうのは, 
$$\begin{array}{ccc} G'(0) & \longrightarrow & O'_i \\ \cup & & \cup \\ g & \longmapsto & g \cdot P \end{array}$$
 の Jacobian の計算に

帰着する。これは Springer Lecture Note 131 で計算が書いてある。

4. 以上で準備が終わり, (1) の証明に入る。

1. より  $\mathfrak{g}'(1)$  の元はすべて nilpotent であつたから, 2. より

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}'(1) &\subset \bigcup_{j=1}^n O_j, \quad \text{故に } \mathfrak{g}'(1) = \mathfrak{g}'(1) \cap \left( \bigcup_{j=1}^n O_j \right) \\ &= \bigcup_{j=1}^n (\mathfrak{g}'(1) \cap O_j) \stackrel{3.}{=} \bigcup_{j=1}^n (O'_1 \cup \dots \cup O'_{k_j}) \end{aligned}$$

ここで各  $O'_i$  は,  $G'(0)$ -orbit である。

即ち  $\mathfrak{g}'(1)$  は有限個の  $G'(0)$ -orbits に分解する。 // (1) の証明。

Remark.  $G = \text{reductive 代数群}$ ,  $\rho$

表現  $\rho: G \rightarrow GL(V)$  により,  $V$  に作用しているとする。

このとき,  $(G, V)$  が stable

$\stackrel{\text{def}}{\iff} V$  に  $G$ -stable open dense subset  $V_0$  が

あり,  $\forall x \in V_0$  に対し  $Gx$  は  $V$  の中で closed

となる. 但し すべて Zariski-topology で考える.

次の条件を考える.

(\*)  $V$  のある open dense subset  $U$  があって

$\forall x \in U$  に対して  $G_x \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gx = x\}$  が

reductive になる。

(1)  $(G, \rho, V)$  が P.V. のとき

(\*)  $\iff (G, \rho, V)$  は regular P.V.

(2)  $(G, \rho, V)$  が一般のとき

(\*)  $\iff ([G, G], \rho, V)$  stable

が知られている (V.L. Popov, Math. USSR Izv. 1970 学位論文)

\* 定理 C で (\*) を仮定すると 分類結果は きれくなる.

分類するとき 正則を仮定しない方が きれいになる.