

動的在庫過程

都立工業短大 小田中 敏 男

§1. 緒 言

納入と遅れを伴ふ場合の在庫管理問題は、既に S. Karlin, H. Scarf, R. Bellman 等によつて、費用関数に関する簡単な仮定のもとに、一費数の最適在庫方程式に歸着されること¹⁾が示されてゐる。²⁾ 又費用関数が不明の場合の在庫管理過程にある確率基準による制御過程の理論³⁾が適用されることを T. O'danaka が示した。⁴⁾

本研究に於てはこの確率基準による在庫管理過程の納入と遅れのある場合は、納入と遅れのない場合の数学的拡張として取扱われることを証明するものである。

この在庫過程のモデルとして次のように考えることにする。

離散的な時点 $0, 1, \dots, N$ に於て統計的需要を有する単一品目の在庫問題と考える。各時点に於ける初期在庫量がある特定の境界を越える確率を最小にする政策を決定することが問題である。

ここで発注と納入との間に α 単位の時間遅れが存在すると

決定する。多くの場合購入費用、在庫費用等が作られるが、この決定には困難なことがある。そこでここでは等々の費用は各段階に於て不明であるとし、各段階に於ける需要の合仲間数のみが決定せられているとする。又次の量を設定する。

x_n = n 段階に於ける初期在庫量。エブレ n 段階に於ける発注量、需要量と先立って知られるとする。($n = k, \dots, N-1$)。

y_n = n 段階に於ける発注量。($n = k, \dots, N-1$)。

z_n = n 段階に於ける需要量。($n = k, \dots, N-1$)

ここで y_n は x_n と既と発注せられて $y_{n-1}, \dots, y_{n-d}$ に依存するとする。又 z_n が観測せられる前に y_n は決定せられねばならぬとする。この場合 $y_n \geq 0$ の条件は当然決定せられる。

このときこの在庫系と関る二次の関係が成立する。

$$x_{n+1} = x_n + y_{n-d} - z_n, \quad x_k = x \quad (1)$$

更に次の仮定を置く。

a) 需要 $z_k, z_{k+1}, \dots, z_N$ は独立な同一分布をもつ独立確率変数

b) 次の条件が1の確率密度函数 $\varphi(z)$ に課せられている。

$$1) \quad \varphi(z) > 0, \quad z \geq 0, \quad \int_0^{\infty} \varphi(z) dz = 1$$

$$2) \int_{\gamma}^{\gamma+\Delta} \varphi(z) dz < \alpha < 1, \quad \gamma \geq 0, \quad \Delta = \alpha - \beta. \quad (2)$$

3) $\varphi'(z)$ が連続であって, $[0, \infty)$ で単峰である.

4) ある領域 $[\gamma, \gamma+\Delta]$ に於て $\varphi''(z) < 0$.

c) 過剰在庫は貯蔵される.

§ 2. 数學的定式化

2.1. 供給に於て一期の遅れがある場合

もし供給に於て一期間の遅れがある場合, 過程の状態を記述するのに二変数と要する. それは次の x と y とである.

x = k 段階に於ける需要を満ちるように貯蔵される在庫量.

y = $(k-1)$ 段階に於ける発注量.

この二変数の量を定義する.

$f_k(x, y)$ = 最適政策を用いて $(N-k)$ 期間に於て, 各段階に於ける在庫量がある境界 α, β ($\alpha > \beta$) を越える確率.

この定義より明らか

$$\begin{aligned} f_{N-2}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\ &= L(x+y), & (\alpha > x > \beta) \end{aligned} \quad (3)$$

したがって

$$\begin{aligned} L(x+y) &= \int_{x+y-\beta}^{\infty} \varphi(z) dz + \int_0^{x+y-\alpha} \varphi(z) dz, \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > x > \beta \\ x+y > \alpha \end{array} \right) \\ &= \int_{x+y-\beta}^{\infty} \varphi(z) dz \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > x > \beta \\ \alpha > x+y > \beta \end{array} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

$$L'(x+y) = \varphi(x+y-\alpha) - \varphi(x+y-\beta) \quad \left(\begin{array}{l} \alpha > x > \beta \\ x+y > \alpha \end{array} \right)$$

$N-2 > n$ に対応する微分方程式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= J \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\ &= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \right] \quad (5) \\ &\quad (\alpha > x > \beta) \end{aligned}$$

2.2. 供給に α 期間の遅れのある場合.

J を最小にする政策関数 $\{y_n\}$ は決定する。こゝに

$$J = \text{Prob.} \left\{ \left(\max_{k \leq n \leq N} x_n \geq \alpha \right) \text{ or } \left(\min_{k \leq n \leq N} x_n \leq \beta \right) \right\} \quad (6)$$

$x_k = x$

このとき

$$f_n(x, y_{n-\alpha}, y_{n-\alpha+1}, \dots, y_{n-1}) = \min J \quad (7)$$

によつて定義される関数列を定義しよう。記号 $\min$ は α, β の政策関数上 f_n の最小を意味する。

このとき, $N-d \leq n \leq N-1$ に対して

$$\begin{aligned} f_n(x, y_{n-d}, \dots, y_{n-1}) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, y_{n-d+1}, \dots, y_{n-1}) \varphi(z) dz, & (\alpha > x > \beta). \end{aligned} \quad (8)$$

この関数は

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x, y_{n-d+1}, \dots, y_{n-1}) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= L(x+y), & (\alpha > x > \beta), \end{aligned} \quad (9)$$

更に一般には $k \leq n < N-d$ に対して

$$\begin{aligned} f_n(x, y_{n-d}, \dots, y_{n-1}) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n+1}(x+y-z, y_{n-d+1}, \dots, y_{n-1}, w) \varphi(z) dz \right], & (\alpha > x > \beta) \end{aligned} \quad (10)$$

が成立する。

§ 3. 最適政策

最適政策の構造は次の定理によって示される。

定理 最適政策 $w_n^* = w_n^*(x, y_{n-d}, \dots, y_{n-1}) =$

$$w_n^* = \max(0, \bar{x}_n - (x + y_{n-d} + \dots + y_{n-1})) \quad (11)$$

の形である。

(証明) 方法を説明するために、一期間の遅れのある問題の解から始める。一期間の遅れのある函数方程式は

$$\begin{aligned} f_{n-1}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= L(x+y), & (\alpha > x > \beta), \end{aligned} \quad (12)$$

より始まり、

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{n-1}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \right] & (\alpha > x > \beta), \end{aligned} \quad (13)$$

で示される。 $n=N-1$ の場合は

$$\begin{aligned} f_{N-1}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= \min_{w \geq 0} \left[L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-2}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \right], & (\alpha > x > \beta). \end{aligned} \quad (14)$$

となり、括弧内の w に関する微分は

$$\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-2}(x+y-z, w)}{\partial w} \varphi(z) dz$$

となる。これを零と置いて

$$F_{N-2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} m_{N-2}(u-z) \varphi(z) dz = 0 \quad (15)$$

が得られる。こゝに

$$u = x + y + w$$

$$\begin{aligned} m_{N-2}(u-z) &= L'(x+y+w-z), & (\alpha > x+y+w-z > \beta), \\ &= 0 & (\text{otherwise}) \end{aligned} \quad (15)$$

である。

函数 $F_{N-2}(u)$ は導関数

$$F'_{N-2}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} m'_{N-2}(u-z) \varphi(z) dz \quad (16)$$

を有する。 $[\alpha > x+y+w-z > \beta]$ に於て $m'_{N-2}(u-z) < 0$ であるから、

$F_{N-2}(u)$ は単調減少函数で、又 $F_{N-2}(\infty) < 0$, $F_{N-2}(-\infty) > 0$ から、

$F_{N-2}(u) = 0$ は根が存在してゐるに疑いない。この根を $\bar{x}_{N-2}$ と呼ぼう。

そのとき最適金融政策は次の形となる。

$$\begin{aligned} w_{N-2}^* &= \bar{x}_{N-2} - x - y, & (\bar{x}_{N-2} \geq x+y), \\ &= 0, & (\bar{x}_{N-2} < x+y). \end{aligned} \quad (17)$$

更に

$$\begin{aligned} f_{N-2}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\ &= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-1}(x+y-z, w_{N-2}^*) \varphi(z) dz, & (\alpha > x > \beta). \end{aligned} \quad (18)$$

2"

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{N-2}(x, y)}{\partial y} &= 0 & (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\ &= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-1}(x+y-z, w_{N-2}^*)}{\partial y} \varphi(z) dz & (19) \\ & & (\alpha > x > \beta) \end{aligned}$$

となる。

そこで数値的帰納法を用いるために、 f_{N-n} は次の性質を持つと仮定すると便宜しよう。

$$\begin{aligned} i) \quad f_{N-n}(x, y) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\ &= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-n+1}(x+y-z, w_{N-n}^*) \varphi(z) dz & (20) \\ & & (\alpha > x > \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad w_{N-n}^* &= \bar{x}_{N-n} - x - y, & (x+y < \bar{x}_{N-n}), \\ &= 0, & (\text{otherwise}). \end{aligned}$$

$\bar{x}_{N-n}$ は次の方程式の単一解である。

$$\int_{-\infty}^{\infty} m_{N-n}(u-z) \varphi(z) dz = 0,$$

$$m_{N-n}(u-z) = \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y-z, w_{N-n}^*)}{\partial y}, \quad (\alpha > x+y-z > \beta) \quad (21)$$

$$= 0, \quad (\text{otherwise})$$

$$\begin{aligned}
 \text{iii)} \quad \frac{\partial f_{N-n}(x, y)}{\partial y} &= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y-z, w_{N-n}^*)}{\partial y} \varphi(z) dz, (\alpha \geq \beta) \\
 &= 0 \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta)
 \end{aligned}$$

え等の性質が" (N-n) から (N-n-1) へと移るときも保持されることを証明しよう。

$$\begin{aligned}
 f_{N-n-1}(x, y) &= 1, \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta), \\
 &= L(x+y) + \min \left[\int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-n}(x+y-z, w) \varphi(z) dz \right] \quad (22) \\
 &\quad (\alpha > x > \beta).
 \end{aligned}$$

w に関する微分を計算する

$$\begin{aligned}
 F_{N-n-1}(u) &= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-n}(x+y-z, w)}{\partial w} \varphi(z) dz \\
 &= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \dots \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} L'(u-z-z_1-\dots-z_{n-1}+w_1^*+w_2^*+\dots) \varphi(z) \varphi(z_1) \dots dz dz_1 \dots \quad (23)
 \end{aligned}$$

ここで $L'(x+y)$ は高々一根を有しているので F_{N-n-1} によって記述される単一根を $F_{N-n-1}(u)=0$ があることが証明される。
 よって最適政策は

$$\begin{aligned}
 w_{N-n-1}^* &= \bar{x}_{N-n-1} - x - y, \quad (x+y < \bar{x}_{N-n-1}) \\
 &= 0, \quad (\text{この場合})
 \end{aligned} \quad (24)$$

で、

$$\begin{aligned}
 f_{N-n-1}(x, y) &= 1 & (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\
 &= L(x+y) + \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} f_{N-n}(x+y-z, w_{N-n-1}^*) \varphi(z) dz & (25) \\
 & & (\alpha > x > \beta)
 \end{aligned}$$

が得られ、更に

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial f_{N-n-1}(x, y)}{\partial y} &= 0 & (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\
 &= \int_{x+y-\alpha}^{x+y-\beta} \frac{\partial f_{N-n}(x+y-z, w_{N-n-1}^*)}{\partial y} \varphi(z) dz & (26) \\
 & & (\alpha > x > \beta)
 \end{aligned}$$

となる。よって、次のことが言える。

定理 2 (2) の仮定が満足せられ、選べの長さが $d=1$ の場合、最適政策は (2)(ii) で示された形となる。

これで $d=1$ の場合の完全証明が示された。更に一般に d が選べのある場合を考察しよう。この場合に帰納法が用いられる。

(10) 式に於て、 $n=N-d-1$ と置けば

$$\begin{aligned}
 f_{N-d-1}(x, y_{N-2d-1}, \dots, y_{N-d}) &= 1, & (x \geq \alpha, x \leq \beta) \\
 &= L(x+y_{N-2d-1}) + \min_{w \geq 0} \left\{ \int_{x+y_{N-2d-1}-\alpha}^{x+y_{N-2d-1}-\beta} f_{N-d}(x+y_{N-2d-1}-z, y_{N-2d}, \dots, w) \varphi(z) dz \right\} & (27) \\
 & & (\alpha > x > \beta)
 \end{aligned}$$

(27) の右辺は $\underbrace{N}_{n+1}$ の微分

$$\int_{x+y_{N-2d-1}-\alpha}^{x+y_{N-2d-1}-\beta} \frac{\partial f_{N-d}(x+y_{N-2d-1}-z, y_{N-2d}, \dots, w)}{\partial w} \varphi(z) dz$$

となり、これを零と置いて

$$F_{N-d-1}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} m_{N-d-1}(w, z) \varphi(z) dz = 0$$

$$m_{N-d-1}(w, z) = \frac{\partial f_{N-d}(x+y_{N-2d-1}-z, y_{N-2d}, \dots, w)}{\partial w} \quad (28)$$

$$= 0 \quad \begin{array}{l} (x+y_{N-2d-1}-\alpha > z > x+y_{N-2d-1}-\beta) \\ (\text{otherwise}) \end{array}$$

$m_{N-d-1}(w, z) \neq 0$ は高々一根を有しているのて、 $F_{N-d-1}(w) = 0$ は単一根を有することが証明出来る。従ってその最適政策は

$$w_{N-d-1}^*(x, y_{N-2d-1}, \dots, y_{N-d}) = \bar{x}_{N-d-1} - (x + y_{N-2d-1} + \dots + y_{N-d}) \quad (29)$$

$$(x + y_{N-2d-1} + \dots + y_{N-d} < \bar{x}_{N-d-1})$$

$$= 0 \quad (\text{otherwise})$$

の形を有することがわかる。そこで一般の n ($N-d \geq n \geq d+1$)

に対しては次の結論が得られる。

$$i) \quad f_{N-n}(x, y_{N-n-d}, \dots, y_{N-n-1}) = 1, \quad (x \geq \alpha, x \leq \beta)$$

$$= L(x + y_{N-n-d}) + \int_{x+y_{N-n-d}-\alpha}^{x+y_{N-n-d}-\beta} f_{N-n+1}(x+y_{N-n-d}-z, y_{N-n}, \dots, w) \varphi(z) dz \quad (30)$$

$$(x > x > \beta)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ii)} \quad w_{N-n}^* &= \bar{x}_{N-n} - x - y_{N-n-\alpha} - \dots - y_{N-n}, \\
 &\quad (x + y_{N-n-\alpha} + \dots + y_{N-n} < \bar{x}_{N-n}) \quad (31) \\
 &= 0, \quad (\text{otherwise})
 \end{aligned}$$

$$\text{iii)} \quad \frac{\partial f_{N-n}(x, y_{N-n-\alpha}, \dots, y_{N-n})}{\partial y_{N-n}} = \int_{x+y_{N-n-\alpha}}^{x+y_{N-n-\alpha}+\beta} \frac{\partial f_{N-n+1}(x+y_{N-n-\alpha}z, \dots, y_{N-n}, y)}{\partial y_{N-n}} dz \quad (32)$$

これから次の重要な定理が得られる。

定理 6 (2) の仮定が満足せられ、 β の値が β_0 より大きいとき、最適政策の形は (31)(ii) で示される。

参考文献

- 1) Arrow, K. J., S. Karlin and H. Scarf; *Studies in the Mathematical Theory of Inventory and Production*, Stanford, Calif., Stanford Univ. Pr., (1958).
- 2) Bellman, R., I. Glicksberg and O. Gross
On the optimal inventory equation; *Management Sci.*, (1955).
- 3) Odanaka, T., Control Processes with certain probability criterion. *Journal*
- 4) Odanaka, T., Some inventory control processes