

曲面の差分幾何

Discrete differential geometry of surfaces

山形大学理学部

井ノ口順一 (Jun-ichi Inoguchi)

Department of Mathematical Sciences,
Yamagata University

概要

This is a short survey on recent progress on discrete differential geometry of surfaces in 3-space via the theory of discrete integrable systems. Starting with prerequisite knowledges on differential geometry of surfaces, we give a short introduction for discrete surfaces in 3-space. In particular the following classes of surfaces are discussed. Discrete surfaces of constant negative curvature, discrete affine spheres, discrete affine minimal surfaces.

はじめに

本稿では [28] に引き続き, 3 次元空間内の差分曲面についての解説を行う. 曲面の差分幾何について, 現時点での全ての研究成果を網羅した解説は不可能なので, 本稿では, 差分幾何について学ぶ上でもっとも基本的と思われる例について焦点を絞って解説する. 本稿で触れられない話題については [6], [21], [27], [15], [34] を参照されたい^{*1}.

1 曲面の基礎事項

まず 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ 内の曲面の取り扱いを手短にまとめておく. 詳細については微分幾何の教科書, たとえば [20] を参照されたい^{*2}.

(x, y, z) を座標系とする 3 次元数空間 $\mathbb{R}^3$ に内積 $\cdot$ を与えたものを 3 次元ユークリッド空間とよび $\mathbb{E}^3$ と表記する.

(u, v) を座標系とする $\mathbb{R}^2$ 内の領域 $\mathcal{D}$ で定義されたベクトル値函数

$$p(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

^{*1} 講演では差分平均曲率一定曲面および離散正則函数についても述べたが紙数の都合により本稿では解説を割愛する. 差分平均曲率一定曲面については [6], [15], [19], [34] を, 離散正則函数については [1], [2], [22], [38] を参照されたい.

^{*2} 本稿で用いる記法・記号は極力 [20] のものに揃えてある.

が以下の条件をみたすとき, **曲面片** (surface piece) とよぶ.

- $x(u, v), y(u, v), z(u, v)$ は u, v について $\mathcal{D}$ 上で C^∞ 級.
- ヤコビ行列

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

が $\mathcal{D}$ 上でつねに階数 2.

とくに $\mathbf{p}$ が 1 対 1 のときは**埋め込まれた曲面片**という. 行列値関数

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_u \cdot \mathbf{p}_v \\ \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_u & \mathbf{p}_v \cdot \mathbf{p}_v \end{pmatrix}$$

を**第 1 基本行列**とよぶ. 曲面片の各点で $\mathbf{p}_u$ と $\mathbf{p}_v$ の双方に直交する単位ベクトル場をとれる. たとえば $\mathbf{n} = (\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v) / |\mathbf{p}_u \times \mathbf{p}_v|$ とすればよい. $\mathbf{n}$ を**単位法ベクトル場**とよぶ.

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{uu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{p}_{uv} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{p}_{vu} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{p}_{vv} \cdot \mathbf{n} \end{pmatrix}$$

を**第 2 基本行列**とよぶ. 関数 $K = \det(\mathbf{I}^{-1}\mathbf{II})$ を**ガウス曲率**とよぶ. ガウス曲率 K の定義においては, $\mathbf{I}$ と $\mathbf{II}$ の両方を用いたが, K は $\mathbf{I}$ のみで決まることが知られている (ガウスの驚愕定理 [20] 参照).

例 1.1 (球面) 原点を中心とする半径 $r > 0$ の球面 $\mathbb{S}^2(r)$ は緯度 u と経度 v を径数として曲面片

$$\mathbf{p}(u, v) = r(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$$

として表示できる. $\mathbf{p}$ が 1 対 1 であるようにするには

$$\mathcal{D} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid |u| < \pi/2, |v| < \pi\}$$

を $\mathbf{p}$ の定義域とすればよいが, 球面全体をカバーできない. この表示では

$$\mathbf{I} = r^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}, \quad \mathbf{II} = r \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos^2 u \end{pmatrix}$$

と計算され, $K = 1/r^2$ が得られる. この曲面片のほかに

$$\mathbf{p}(u, v) = (u, v, \sqrt{r^2 - u^2 - v^2}), \quad u^2 + v^2 < r^2$$

を用いると球面の上半分を覆うことができる.

球面全体をひとつの曲面片で覆うことはできないが, いくつかの曲面片を組み合わせれば球面全体を覆うことができる. そこで, いくつかの曲面片の集まりを**曲面** (surface) とよぶ^{*3}. ただし本稿では, 曲面片のみを扱うので, 以下曲面片を単に曲面とよんでしまう.

ここで一旦, $\mathbb{E}^3$ 内の曲面を忘れて次の定義を行う ([20, 3.1 節]).

^{*3} 「曲面」の正確な定義を与えるためには, 多様体の概念を導入する必要がある. 本稿では, 多様体の概念を導入せず
にすむので割愛する.

定義 1.1 平面内の領域 $\mathcal{D}$ に行列値函数

$$g = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

が与えられていて, $\det g > 0$, $E > 0$ をみたしているとき g を $\mathcal{D}$ 上の**リーマン計量**とよぶ. $\mathcal{D}$ にリーマン計量を指定したもの $S = (\mathcal{D}, g)$ を**2次元リーマン多様体**とよぶ^{*4}.

定義 1.2 リーマン計量が

$$g = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

と与えられているとき, (u, v) を**等温座標系**とよぶ. また

$$g = \begin{pmatrix} 1 & F \\ F & 1 \end{pmatrix}$$

と与えられているとき, (u, v) を**チェヴィシエフ網**とよぶ.

任意の (向き付け可能な) 2次元リーマン多様体には等温座標系およびチェヴィシエフ網が存在することが知られている. 2次元リーマン多様体にガウス曲率が定義される. 正確な定義はここでは省略し, 次の事実だけ挙げておく.

命題 1.1 等温座標系 (u, v) でリーマン計量 g が与えられたとき, ガウス曲率は

$$K = -\frac{1}{2E} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right) \log E$$

で求められる.

例 1.2 ($\mathbb{E}^3$ 内の曲面) $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ を曲面片とする. このとき $g = I$ はリーマン計量であり, g のガウス曲率は $\det(I^{-1}II)$ と一致する ([20, 3.2 節]).

例 1.3 (**双曲平面**) 上半平面 $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2 \mid \eta > 0\}$ にリーマン計量

$$g = \begin{pmatrix} 1/\eta^2 & 0 \\ 0 & 1/\eta^2 \end{pmatrix}$$

を与えたものを $\mathbb{H}^2$ と表し, **双曲平面**とよぶ. 上の命題 1.1 より $K = -1$ であることがわかる.

2次元リーマン多様体 $\Sigma = (\mathcal{D}, g)$ に対し曲面片 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が存在し, $g = I$ となるとき, p を Σ の**等長はめ込み**とよぶ. とくに p が 1 対 1 のときは**等長埋め込み**という. したがって「ガウス曲率が負で一定の曲面」は双曲幾何の $\mathbb{E}^3$ 内の模型ということができる.

註 1.1 双曲平面から $\mathbb{E}^3$ への等長はめ込みは存在しない (ヒルベルトの定理). 本稿に登場する負定曲率曲面は**常に特異点をもつ**.

^{*4} もちろん, これは 2次元リーマン多様体の特別なものにすぎないが本稿を読むにあたってはこの定義で充分である.

2 ガウス曲率一定曲面と可積分系

ガウス曲率が $K = -1$ の曲面を構成してみよう. もっとも簡単な構成法は回転面の中で例を探すことである. xz 平面内の曲線 $(x, z) = (f(u), g(u))$, (ただし $f > 0$) を z 軸の周りに回転させて得られる曲面は

$$\mathbf{p}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$$

と表せる. u を弧長径数に選んでおくと

$$E = 1, F = 0, G = f^2, L = f'g - fg', M = 0, N = fg'$$

より $K = -f''/f$. $K = -1$ なので $f'' = f$ を解けばよい. たとえば $f(u) = e^{-u} > 0$ と選ぶと

$$g(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}} dt.$$

この曲線を $z \leq 0$ まで延長するには

$$(f(u), g(u)) = \begin{cases} (e^{-u}, \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2s}} ds), & u > 0, \\ (e^u, \int_0^u \sqrt{1 - e^{2s}} ds), & u \leq 0, \end{cases}$$

とすればよい. この曲線は**トラクトリクス**とよばれる. トラクトリクスを回転させて得られることからこの曲面は**トラクトロイド**という. トラクトロイドは**ベルトラミの擬球** (Beltrami's pseudosphere) という別名もある^{*5}.

註 2.1 後で使うため, トラクトリクスの別の表示を与えておく.

$$(2.1) \quad (x, z) = (\operatorname{sech} t, t - \tanh t).$$

この曲面 (トラクトロイド) を眺めていても可積分系との関係は見えてこない. 可積分系の構造を見出すには適切な座標系への変更が必要である.

定義 2.1 曲面 $\mathbf{p} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ において, 座標系 (u, v) が $L = N = 0$ をみたすとき, **漸近座標系**とよぶ.

ここで次の事実を使う.

命題 2.1 曲面 $\mathbf{p} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ において $K < 0$ ならば漸近座標系 (u, v) に取替えができる. 漸近座標系のもとでは

$$E = \rho^2 a^2, F = \rho^2 ab \cos \phi, G = \rho^2 b^2, L = N = 0, M = \rho ab \sin \phi$$

と表せる. ただし $K = -1/\rho^2$.

^{*5} この曲面はガウスが発見していた [17].

以下、漸近座標系で表示された負曲率曲面 ($K = -1/\rho^2$) を考える. また領域 $\mathcal{D}$ は単連結であるとする. このとき, 曲面の積分可能条件は

$$(2.2) \quad \phi_{uv} = ab \sin \phi + 2(\mathcal{P}_v - \mathcal{Q}_u),$$

$$(2.3) \quad a_v + \frac{\rho_v}{2\rho}a - \frac{\rho_u}{2\rho}b \cos \phi = 0, \quad b_u + \frac{\rho_v}{2\rho}b - \frac{\rho_u}{2\rho}a \cos \phi = 0$$

与えられる. 補助的に導入した関数 $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ は

$$\mathcal{P} = -\frac{p_v a}{4\rho b} \sin \phi, \quad \mathcal{Q} = -\frac{p_u b}{4\rho a} \sin \phi$$

で定義される. (2.2) を**ガウス方程式**, (2.3) を**コダッチ方程式**とよぶ. コダッチ方程式より

$$K \text{ が定数} \iff \mathcal{P} = \mathcal{Q} = 0 \iff a_v = b_u = 0$$

がわかる. $K = -1/\rho^2$ が定数のときは, ガウス・コダッチ方程式は

$$\phi_{uv} = ab \sin \phi, \quad a_v = b_u = 0$$

と簡単になる. 単に簡単な形になるというだけでなく, **可積分系の構造**をもつということが読み取れる. a, b をそれぞれ $a_\lambda := \lambda a, b_\lambda := \lambda^{-1}b (\lambda \neq 0)$ で置き換えてもガウス・コダッチ方程式が保たれる. ガウス・コダッチ方程式は曲面の積分可能条件であったから

$$I_\lambda := \begin{pmatrix} \rho^2 a_\lambda & \rho^2 a_\lambda b_\lambda \\ \rho^2 a_\lambda b_\lambda & \rho^2 b_\lambda \end{pmatrix}, \quad \Pi_\lambda := \begin{pmatrix} 0 & \rho a_\lambda b_\lambda \sin \phi \\ \rho a_\lambda b_\lambda \sin \phi & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと, これらを第 1, 第 2 基本行列にもつ曲面 $\mathbf{p}_\lambda : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が存在する. $\Pi_\lambda = \Pi$ であることに注意しよう. つまり負定曲率曲面がひとつあると, 第 2 基本行列とガウス曲率を保ったまま連続変形できることがわかった. ここで変形のパラメータ $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ が出てきたが, これは逆散乱法におけるスペクトル・パラメータと一致している. 一般の曲面はこのような変形を許容しない. 連続変形の存在は負定曲率曲面が可積分系であることの象徴である.

さらに, 漸近座標系の取替えて $a = b = 1$ とすることができる^{*6}. するとガウス・コダッチ方程式は**サイン・ゴールドン方程式** $\phi_{uv} = \sin \phi$ になる. 変形族 $\{\mathbf{p}_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}^\times}$ はもとの曲面の**同伴族**とよばれている.

ここで規格化 $a = b = 1$ の意味を考えよう. もともと (u, v) は漸近座標系であった. 漸近座標系は第 2 基本行列を標準化した座標系であった. 漸近 $a = b = 1$ と規格化すると第 1 基本行列が $E = G = 1$ となるから, (u, v) はチェヴィシエフ網でもある. 一般の負曲率曲面では, このように I と II を**同時標準化**することはできないが, 負定曲率曲面では漸近かつチェヴィシエフという座標系をとることができ, その座標系では積分可能条件が (可積分系の典型例である) サイン・ゴールドン方程式になった.

^{*6} 正確には, 曲面に弱正則性 ($a \neq 0, b \neq 0$) を仮定しておく.

例 2.1 (トラクトロイド) サイン・ゴールドン方程式の 1-ソリトン解

$$\phi(u, v) = 4 \tan^{-1} \exp(\lambda u + \lambda^{-1} v)$$

の定める曲面を求めよう. $\lambda = 1$ のときは定常キंक, $\lambda = -1$ のときは定常反キंकとよばれている. この解から定まる曲面は, $\lambda = \tan(\theta/2)$ とおくと

$$\mathbf{p}_\theta(u, v) = \sin \theta \begin{pmatrix} \operatorname{sech}(\lambda u + \lambda^{-1} v) \cos(u - v) \\ \operatorname{sech}(\lambda u + \lambda^{-1} v) \sin(u - v) \\ (\lambda u + \lambda^{-1} v) - \tanh(\lambda u + \lambda^{-1} v) + \cot \theta(u - v) \end{pmatrix}$$

で与えられる^{*7}. この曲面の性質を述べるために次の定義をしよう.

定義 2.2 h を定数とする. xz 平面内の曲線 $(x, z) = (f(u), g(u))$, ($f > 0$) に対し

$$\mathbf{p}(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u) + hv)$$

で定まる曲面を, この曲線を母線とする**螺旋面** (helicoidal surface) とよぶ. h をピッチという. $h = 0$ のときは回転面である.

トラクトロイドに戻ろう. トラクトリクス $(x, z) = (f(u), g(u))$ に対しピッチ h の螺旋面を作るとガウス曲率が負の一定値 $-1/(1+h^2)$ であることが確かめられる. この曲面は**ディニの擬球**とよばれている. $h = \cot \theta$ とおき, 相似変形 (scaling) をしてガウス曲率が -1 となるようにする:

$$\sin \theta (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u) + \cot \theta v).$$

ここでトラクトリクスの径数表示を (2.1) に変更してみれば, 1-ソリトン解の定める曲面がディニの擬球であることがわかる. とくに定常キंक ($\theta = \pi/2$) の定める曲面はトラクトロイドである.

3 ラックス形式

$K = -1$ の曲面の同伴族 $\{\mathbf{p}_\lambda\}$ を考えよう. 行列値関数 $\mathcal{F}_\lambda: \mathcal{D} \times \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathrm{GL}_3 \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}_\lambda = ((\mathbf{p}_\lambda)_u, (\mathbf{p}_\lambda)_v, \mathbf{n}_\lambda)$$

と定める. $\mathcal{F}_\lambda$ は次をみたす.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{F}_\lambda &= \mathcal{F}_\lambda \mathcal{U}_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{F}_\lambda = \mathcal{F}_\lambda \mathcal{V}_\lambda, \\ \mathcal{U}_\lambda &= \begin{pmatrix} (\log |a \sin \phi|)_u & 0 & \rho^{-1} \cot \phi \\ -\lambda^2 a \phi_u / (b \sin \phi) & 0 & -\lambda^2 a / (\rho b \sin \phi) \\ 0 & \rho a b \sin \phi & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathcal{V}_\lambda &= \begin{pmatrix} 0 & -\lambda^{-2} b \phi_v / (a \sin \phi) & -\lambda^{-2} b / (\rho a \sin \phi) \\ 0 & (\log |b \sin \phi|)_v & \rho^{-1} \cot \phi \\ \rho a b \sin \phi & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

^{*7} 詳細な計算は [19] 参照.

この線型方程式系の積分可能条件 $(\mathcal{V}_\lambda)_u - (\mathcal{U}_\lambda)_v + [\mathcal{U}_\lambda, \mathcal{V}_\lambda] = 0$ を計算すればガウス・コダッチ方程式が得られる.

2×2 行列によるラックス表示を求めよう. そのために 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{E}^3$ を特殊ユニタリー群 $SU(2)$ のリー環 $\mathfrak{su}(2)$ と同一視する. $\mathbb{E}^3$ の標準基底を次のように対応させる. $i = \sqrt{-1}$ として

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

すなわち

$$(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow \begin{pmatrix} -x_3 i & -x_2 - x_1 i \\ x_2 - x_1 i & x_3 i \end{pmatrix}$$

と対応させる. この同一視で内積と外積は

$$X \cdot Y = -\frac{1}{2} \text{tr}(XY), \quad X \times Y = \frac{1}{2}[X, Y]$$

と対応する. ここで $\Phi_\lambda : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^\times \rightarrow SU(2)$ を

$$\begin{aligned} \lambda \rho a \Phi_\lambda \left(\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_1 - \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \right) \Phi_\lambda^{-1} &= (\mathbf{p}_\lambda)_u, \\ \lambda^{-1} \rho b \Phi_\lambda \left(\cos \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_1 + \sin \frac{\phi}{2} \mathbf{e}_2 \right) \Phi_\lambda^{-1} &= (\mathbf{p}_\lambda)_v, \\ \Phi_\lambda (\mathbf{e}_3) \Phi_\lambda^{-1} &= \mathbf{n}_\lambda \end{aligned}$$

で定めることができる^{*8}. ガウス・ワインガルテンの公式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \Phi_\lambda &= \Phi_\lambda U_\lambda, \quad \frac{\partial}{\partial v} \Phi_\lambda = \Phi_\lambda V_\lambda, \\ U_\lambda &= \begin{pmatrix} \phi_u/2 & -\lambda a \exp(i\phi/2) \\ -\lambda a \exp(-i\phi/2) & -\phi_u/2 \end{pmatrix}, \quad V_\lambda = \begin{pmatrix} -\phi_v/2 & \lambda^{-1} b \exp(-i\phi/2) \\ \lambda^{-1} b \exp(i\phi/2) & \phi_v/2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書き換えられる. これを負定曲率曲面の**ラックス表示**とよぼう. Φ_λ を**行列値波動函数**または**extended frame**とよぶ. Φ_λ から各曲面は次の公式で復元される.

命題 3.1 (Sym の公式)

$$\mathbf{p}_\lambda = -2\rho\lambda \frac{\partial \Phi_\lambda}{\partial \lambda} \Phi_\lambda^{-1} : \mathcal{D} \times \mathbb{R}^\times \rightarrow \mathfrak{su}(2) = \mathbb{E}^3$$

はガウス曲率が負の一定値 $-1/\rho^2$ の曲面で (u, v) は漸近座標系である.

$$\mathbf{n}_\lambda := \Phi_\lambda \mathbf{e}_3 \Phi_\lambda^{-1}$$

が $\mathbf{p}_\lambda$ の単位法ベクトル場を与える.

^{*8} $SU(2)$ は $SO(3)$ の二重被覆であるという事実を使っている.

4 ベックルンド変換

19 世紀の幾何学においては、負定曲率曲面から別の負定曲率曲面を構成する方法が研究された。

定義 4.1 曲面 $p: \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{E}^3$ と $\mathcal{D}$ 上の単位ベクトル場 v に対し

$$\tilde{p}(u, v) := p(u, v) + rv(u, v)$$

とおく ($r > 0$ は定数). $\tilde{p}$ が曲面を定め、さらに次の条件をみたすとき、 p のベックルンド変換とよぶ。

- (1) v は両方の曲面に接する.
- (2) $\tilde{p}$ の単位法ベクトル場 $\tilde{n}$ と、もとの曲面の単位法ベクトル場は定角をなす. すなわち $\cos \theta := n \cdot \tilde{n}$ は定数.

負定曲率曲面はベックルンド変換をもつ曲面として特徴づけられる。

定理 4.1 (Bäcklund(1875)) 曲面 p がベックルンド変換をもてば、 p のガウス曲率は負の一定値 $K = -(\sin \theta / r)^2$.

ベックルンド変換は漸近座標系を保つ. したがってサイン・ゴールドン方程式の与えられた解から新しい解を導く.

簡単のため $K = -1$ としよう (したがって $r = \sin \theta$). このときベックルンド変換は次のように具体的に表示される.

$$\tilde{p} = p + \frac{\sin \theta}{2} \left\{ \frac{\cos(\tilde{\phi}/2)}{\cos \phi/2} (p_u + p_v) + \frac{\sin(\tilde{\phi}/2)}{\sin \phi/2} (p_u - p_v) \right\}.$$

$\tilde{\phi}$ はサイン・ゴールドン方程式の新しい解であり

$$(4.1) \quad \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\tilde{\phi} + \phi}{2} \right) = \lambda \sin \left(\frac{\tilde{\phi} - \phi}{2} \right), \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\tilde{\phi} - \phi}{2} \right) = \lambda^{-1} \sin \left(\frac{\tilde{\phi} + \phi}{2} \right)$$

にしたがう. ただし $\lambda = \tan(\theta/2)$. (4.1) は今日、サイン・ゴールドン方程式のベックルンド変換として知られているものである. (4.1) をトラクトロイドに施して得られる曲面 (2-ソリトン曲面) については [16, 展望 A.2], [19] を参照されたい.

例 4.1 (アムズラー曲面) 漸近座標系で表示された $K = -1$ の曲面に対し、ビアンキは「座標曲線が直線」という条件を課したクラスを考察した. この条件はサイン・ゴールドン方程式に対し、 ϕ は $r = \sqrt{-uv}$ のみに依存するという相似簡約を課すことに対応する. サイン・ゴールドン方程式は

$$\phi_{rr} + \frac{1}{r} \phi_r + \sin \phi = 0$$

という常微分方程式に簡約されるが,

$$y(t) := \exp(i\phi(r)), \quad t = r^2$$

と変数変換すると $P_{\text{III}}^{D_8^{(1)}}$ 型パンルヴェ方程式

$$y_{tt} = \frac{y_t^2}{y} - \frac{y_t}{t} + \frac{i}{8t}(y^2 - 1)$$

に帰着する^{*9}. このクラスの曲面は**アムズラー曲面**とよばれる.

5 負定曲率曲面の差分化

負定曲率曲面のもつ可積分系の構造に着目して, 曲面の差分化を考える. 曲面の差分化については離散可積分系理論とは独立に 1950 年代の Sauer による研究 [36] がある. 広田による差分サイン・ゴールドン方程式が発表されたのが 1977 年刊行の論文である. 差分サイン・ゴールドン方程式と差分曲面の関係がつくのは 1990 年代になってからである.

差分間隔 ε, δ をもつ整数格子を $\mathbb{L}$ としよう. すなわち

$$\mathbb{L} = \{(n\varepsilon, m\delta) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}.$$

$\mathbb{R}^2$ 内の領域を $\mathbb{L}$ に置き換え, $\mathbb{L}$ 上で定義されたベクトル値関数

$$\mathbf{p} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3; (n\varepsilon, m\delta) \mapsto \mathbf{p}_m^n$$

に対し, 差分曲面の概念を導入する. まず着目するのは漸近座標系である. 漸近座標系の条件 $L = N = 0$ を見直す. これは $\mathbf{p}_{uu}$ と $\mathbf{p}_{vv}$ が曲面に接するということに他ならない. そこでこの**純幾何学的説明**を利用する.

定義 5.1 $\mathbf{p} : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が条件

$$\boxed{\text{各 } (n\varepsilon, m\delta) \in \mathbb{L} \text{ に対し 5 点 } \mathbf{p}_m^n, \mathbf{p}_m^{n\pm 1}, \mathbf{p}_{m\pm 1}^n \text{ は同一平面 } P_m^n \text{ 上にある}}$$

をみたすとき $\mathbf{p}$ を**差分漸近網** (discrete asymptotic net) とよぶ.

負定曲率曲面においては漸近かつチェヴィシエフ網である座標系がとれた. この性質に着目し, Bobenko と Pinkall[3] は次の定義を与えた.

^{*9} III 型パンルヴェ方程式 (P_{III}) の標準形は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ をパラメータとして

$$y_{tt} = \frac{y_t^2}{y} - \frac{y_t}{t} + \frac{1}{t}(\alpha y^2 + \beta) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

で与えられる. アムズラー曲面の構造方程式は $\gamma = \delta = 0, \alpha\beta \neq 0$ をみたしている. この条件をみたす III 型パンルヴェ方程式は $D_8^{(1)}$ 型とよばれている ([35], [32]). アムズラー曲面の構造方程式は $P_{\text{III}}^{D_8^{(1)}}$ 型パンルヴェ方程式で, さらに $\alpha = -\beta = i/8, (i = \sqrt{-1})$ と特殊化したものである.

定義 5.2 差分漸近網 $p: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{E}^3$ が条件をみたすとき**差分負定曲率曲面** (差分 K 曲面と略称). とよぶ.

基本四角形 (四角形 $p_m^n p_m^{n+1} p_{m+1}^{n+1} p_{m+1}^n$ のこと) の対辺の長さは等しい

$$|p_m^{n+1} - p_m^n| = |p_{m+1}^{n+1} - p_{m+1}^n|, \quad |p_{m+1}^n - p_m^n| = |p_{m+1}^{n+1} - p_m^{n+1}|.$$

差分 K 曲面は漸近チェヴィシェフ網を差分化したものに他ならない.

平面 P_m^n の単位法ベクトル n_m^n を p_m^n の単位法ベクトルと定めよう.

$$n_m^n = \frac{(p_m^{n+1} - p_m^n) \times (p_{m+1}^n - p_m^n)}{|(p_m^{n+1} - p_m^n) \times (p_{m+1}^n - p_m^n)|}$$

と計算できる. p_m^n のまわりの角関数 $\kappa^1, \kappa^2, \kappa^3, \kappa^4$ を

$$\begin{aligned} \kappa_{n,m}^1 &= \angle(p_m^{n+1} - p_m^n, p_{m+1}^n - p_m^n), \\ \kappa_{n,m}^2 &= \angle(p_{m+1}^n - p_m^n, p_{m+1}^{n-1} - p_m^n), \\ \kappa_{n,m}^3 &= \angle(p_m^{n-1} - p_m^n, p_{m-1}^n - p_m^n), \\ \kappa_{n,m}^4 &= \angle(p_{m-1}^n - p_m^n, p_m^{n+1} - p_m^n) \end{aligned}$$

で定める. 基本四角形の対辺の長さが等しいので

$$\kappa_{n,m}^1 = \kappa_{n+1,m+1}^3, \quad \kappa_{n+1,m}^2 = \kappa_{n,m+1}^4$$

が成立している.

n_m^{n+1} と n_m^n のなす角を $p_m^n \in (0, \pi)$, n_{m+1}^n と n_m^n のなす角を $q_m^n \in (0, \pi)$ としよう. すると

$$n_m^{n+1} \cdot n_m^n = n_{m+1}^{n+1} \cdot n_{m+1}^n, \quad n_{m+1}^n \cdot n_m^n = n_{m+1}^{n+1} \cdot n_m^{n+1}$$

であることがわかる^{*10}. この関係式から**差分コダッチ方程式** (discrete Codazzi equation)

$$p_{m+1}^n - p_m^n = 0, \quad q_m^{n+1} - q_m^n = 0$$

が得られる.

ラックス表示の差分化を次のように与えることができる.

$$\Phi_m^{n+1}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det U_m^n(\lambda)}} \Phi_m^n(\lambda) U_m^n(\lambda), \quad \Phi_{m+1}^n(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\det V_m^n(\lambda)}} \Phi_m^n(\lambda) V_m^n(\lambda),$$

$$\begin{aligned} U_m^n(\lambda) &= \begin{pmatrix} \exp \frac{i(\phi_m^{n+1} - \phi_m^n)}{2} & -\lambda i \tan \frac{p_m^n}{2} \\ -\lambda i \tan \frac{p_m^n}{2} & \exp \frac{-i(\phi_m^{n+1} - \phi_m^n)}{2} \end{pmatrix}, \\ V_m^n(\lambda) &= \begin{pmatrix} 1 & i\lambda^{-1} \tan \frac{q_m^n}{2} \exp \frac{-i(\phi_{m+1}^n - \phi_m^n)}{2} \\ i\lambda^{-1} \tan \frac{q_m^n}{2} \exp \frac{i(\phi_{m+1}^n - \phi_m^n)}{2} & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

^{*10} 正確な議論は [19, 第 3 部] を参照.

このラックス表示の和分条件は**差分ガウス方程式** (discrete Gauss equation)

$$\sin \frac{\phi_{m+1}^{n+1} - \phi_m^{n+1} - \phi_{m+1}^n + \phi_m^n}{4} - \tan \frac{p_m^n}{2} \tan \frac{q_m^n}{2} \sin \frac{\phi_{m+1}^{n+1} + \phi_m^{n+1} + \phi_{m+1}^n + \phi_m^n}{4} = 0,$$

と差分コダッチ方程式

$$p_{m+1}^n - p_m^n = 0, \quad q_{m+1}^n - q_m^n = 0$$

である. 差分ガウス・コダッチ方程式は広田 [10] により提出された差分サイン・ゴルドン方程式 (の係数を一般化したもの) である.

差分版のラックス表示から差分 K 曲面を復元する Sym の公式は次で与えられる.

命題 5.1 (Bobenko-Pinkall [3])

$$\mathbf{p}_m^n(\lambda) := -2\lambda \frac{\partial \Phi_m^n(\lambda)}{\partial \lambda} \Phi_m^n(\lambda)^{-1}$$

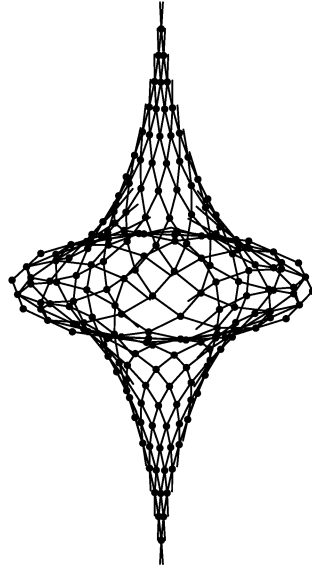
例 5.1 (差分トラクトロイド) 簡単のため差分間隔を $\varepsilon = \delta = 1$ とする.

$$\mathbf{p}_m^n(\lambda) = -2\lambda \begin{pmatrix} -\frac{2c}{1+c^2}(m+n) \cos \omega_m^n \\ -\cos\{2(m-n)\arg(1+ic)\} \sin \omega_m^n \\ -\sin\{2(m-n)\arg(1+ic)\} \sin \omega_m^n \end{pmatrix},$$

ただし

$$\omega_m^n = 2\arg \left(1 + i \left(\frac{1-c}{1+c} \right)^{m+n} \right), \quad c > 0, \quad i = \sqrt{-1}$$

がトラクトロイドの差分化である.



差分トラクトロイド

差分サイン・ゴールドン方程式の有限隙型解 (finite gap solution, ϑ 函数解) で定まる差分 K 曲面については Bobenko-Pinkall [3] で詳しく調べられている. またアムズラー曲面の差分化を Hoffmann[14] が提案している.

6 等積アフィン幾何

漸近座標系は次の不変性をもつ.

命題 6.1 漸近座標系 (u, v) で表示された曲面 $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ に $\mathbb{R}^3$ のアフィン変換 ϕ を施して得られる曲面 $\tilde{\mathbf{p}}(u, v) = \phi(\mathbf{p}(u, v))$ に対し (u, v) は, やはり漸近座標系である.

この不変性に着目しよう. 漸近座標系がアフィン変換で不変ならば, アフィン変換の下での「曲面の微分幾何」を考え, そして差分化を考察しよう. そこで等積アフィン変換群 $SA(3)$ の定める幾何 (**等積アフィン幾何**) をこの節で扱う. 等積アフィン幾何における曲線・曲面の微分幾何 (等積アフィン幾何) については, 野水・佐々木による教科書 [31] を参照されたい.

等積アフィン変換とは

$$\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \mathbf{b}, \quad A \in SL_3\mathbb{R}$$

という変換のことである. この群を用いるのであるから, $\mathbb{R}^3$ に距離構造 (ユークリッド空間の構造) を与えるのではなく, **等積構造**を与えた空間 $\mathbb{A}^3$ を用意しておく必要がある.

定義 6.1 D を $\mathbb{R}^3$ の標準的な (共変) 微分作用素, $dv = \det$ を体積要素とする. $\mathbb{A}^3 = (\mathbb{R}^3, D, dv)$ を 3次元標準的等積アフィン空間とよぶ.

この空間 $\mathbb{A}^3$ 内の曲面 $\mathbf{p} : D \rightarrow \mathbb{A}^3$ を考える. 曲面の座標系を (u_1, u_2) とする. いま $\mathbb{A}^3$ には内積が与えられていないので (向きを除き) 一意的に法ベクトルを定める方法がない. そこで何でもよいから接平面に横断的なベクトル場 ξ をひとつ取り,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{p}}{\partial u_i \partial u_j} = \sum_{k=1}^2 \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_k} + h_{ij} \xi$$

と分解する. さらに

$$\frac{\partial \xi}{\partial u_i} = - \sum_{j=1}^2 S_{ji} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial u_j} + \tau_i \xi$$

と分解しよう. 行列値関数 $h = (h_{ij})$ を**等積アフィン計量**とよぼう. また行列値関数 $S = (S_{ij})$ を**等積アフィン形状作用素**とよぶ.

補題 6.1 $\det h \neq 0$ という性質は ξ の選び方に依存しない. このとき $\mathbf{p}$ は**非退化**であるという.

以下 $\mathbf{p}$ は非退化であると仮定しよう. このとき h を**等積アフィン計量**とよぶ. すると, ある意味で**標準的な横断的ベクトル場**がとれることが知られている ([31, p. 63]).

命題 6.2 p が非退化ならば, 以下の条件をみたす横断的ベクトル場 ξ が向きを除いて一意に存在する.

- $\vartheta := \det(\cdot, \cdot, \xi)$ が h の面積要素と一致する.
- ϑ は $\{I_{ij}^k\}$ の定める線型接続に関し平行.

このとき $\tau_i = 0$ である. この ξ を**ブラシュケ・ベクトル場**とよぶ.

ブラシュケ・ベクトル場を指定した非退化な曲面を**ブラシュケ曲面**とよぶ. ブラシュケ曲面の等積アフィン計量はブラシュケ計量ともよばれる.

補題 6.2 ブラシュケ曲面 (p, ξ) において

- 等積アフィン形状作用素 $S = (S_{ij})$ が単位行列の (0 ではない) 定数倍である $\iff$ すべてのブラシュケ法線 $\mathbb{R}\xi$ がある 1 点に集まる.
- $S = 0 \iff$ すべてのブラシュケ法線 $\mathbb{R}\xi$ が平行.

この補題に基づき次の定義を与える.

定義 6.2 ブラシュケ曲面が

- $S = kE$, $k \neq 0$ のとき **(固有) アフィン球面**という.
- $S = 0$ のとき**非固有アフィン球面**という.

つまり「ユークリッド幾何における球面」の等積幾何学的な類似が固有アフィン球面である. 以下, 固有・非固有アフィン球面でアフィン計量が $\det(h_{ij}) < 0$ をみたすものを扱うことにしよう. このようなアフィン球面は**不定値アフィン球面** (indefinite affine sphere) とよばれている.

不定値アフィン球面では, **漸近座標系** (u, v) がとれる. すなわち

$$\begin{aligned} p_{uu} &= (\log \omega)_u p_u + a\omega^{-1}p_v, \\ p_{uv} &= \omega\xi, \\ p_{vv} &= b\omega^{-1}p_u + (\log \omega)_v p_v, \end{aligned}$$

をみたす座標系である. ただし

$$\xi = -Hp + (1 + H)\xi_0.$$

ここで H は定数で, p が固有のとき -1 , 非固有のとき 0 とする. $\xi_0 \neq 0$ は $\mathbb{A}^3$ の定ベクトルである. ブラシュケ計量は

$$h = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられる. アフィン球面の積分可能条件は $\omega = e^\phi$ とおくと

$$\phi_{uv} + He^\phi + abe^{-2\phi} = 0, \quad a_v = b_u = 0$$

で与えられる。ユークリッド幾何の負定曲率曲面のときと同様に $a \neq 0, b \neq 0$ という仮定を課そう。すると $a = b = 1$ と規格化できるので積分可能条件は

- 固有アフィン球面のときは**ツイツェイカ方程式** $\phi_{uv} = e^\phi - e^{-2\phi}$.
- 非固有アフィン球面のときは**リウヴィル方程式** $\phi_{uv} = -e^{-2\phi}$.

となる。したがってアフィン球面も可積分系を積分可能条件にもつ曲面であることがわかった。固有アフィン球面は**ツイツェイカ変換**とよばれるベックルンド変換をもつ。ツイツェイカ変換については [4], [25] を参照。

7 差分アフィン球面

アフィン球面の差分化は、固有の場合を Bobenko と Schief が提出し、松浦が修士論文で非固有の場合を提出した。ここでは両者を統合した差分化を述べる ([19, 第 3 部]).

まず記号を準備する。函数 $f = f_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し前進差分 $\Delta_{+n}f$, 後退差分 $\Delta_{-n}f$ を次で定める。

$$\Delta_{+n}f_m^n := \frac{f_m^{n+1} - f_m^n}{\varepsilon}, \quad \Delta_{-n}f_m^n := \frac{f_m^n - f_m^{n-1}}{\varepsilon}.$$

$\Delta_{+m}f_m^n, \Delta_{-m}f_m^n$ も同様に定める。

定義 7.1 ([4],[23]) $p_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ が、次の 2 条件をみたすとき**差分アフィン球面** (discrete affine sphere) という^{*11}。

- p_m^n は差分漸近網。
- 各 $(n\varepsilon, m\delta) \in \mathbb{L}$ に対し $p_{m+1}^{n+1} - p_m^{n+1} - p_{m+1}^n + p_m^n$ はベクトル

$$\xi_m^n := -H \frac{p_m^{n+1} - p_{m+1}^n}{2} + (1 + H)\xi_0$$

に平行。ただし $\xi_0 \neq 0$ は定ベクトルで、 $H = 0$ または $H = -1$ 。 $H = -1$ のとき**差分不定値固有アフィン球面**, $H = 0$ のとき**差分不定値非固有アフィン球面**という。

定理 7.1 差分アフィン球面 p_m^n に対し、以下をみたす $\mathbb{L}$ 上の函数 ω, a, b が存在する。

$$\begin{aligned} \Delta_{+n}\Delta_{-n}p_m^n &= \left(\frac{\Delta_{-n}\omega_m^n}{\omega_m^n} + \frac{\delta H}{2}\omega_m^{n-1} \right) \Delta_{+n}p_m^n + \frac{a_m^n}{\omega_m^n} \Delta_{+m}p_m^n, \\ \Delta_{+n}\Delta_{+m}p_m^n &= \omega_m^n \xi_m^n, \\ \Delta_{+m}\Delta_{-m}p_m^n &= \frac{b_m^n}{\omega_m^n} \Delta_{+n}p_m^n + \left(\frac{\Delta_{-m}\omega_m^n}{\omega_m^n} + \frac{\varepsilon H}{2}\omega_{m-1}^n \right) \Delta_{+m}p_m^n. \end{aligned}$$

^{*11} 正確には差分不定値アフィン球面という。

これらの両立条件は

$$\begin{aligned} & \frac{\omega_m^n \Delta_{-n} \Delta_{-m} \omega_m^n - \Delta_{-n} \omega_m^n \Delta_{-m} \omega_m^n}{\omega_{m-1}^n \omega_m^{n-1}} + H \left(\frac{\omega_m^n + \omega_{m-1}^{n-1}}{2} - \varepsilon \delta \frac{H}{4} \omega_m^n \omega_{m-1}^{n-1} \right) \\ & + \frac{2 - \varepsilon \delta H \omega_{m-1}^{n-1}}{2 - \varepsilon \delta H \omega_m^n} \frac{a_m^n b_m^n}{\omega_{m-1}^n \omega_m^{n-1}} = 0, \\ & a_m^n (2 - \varepsilon \delta H \omega_{m-1}^{n-1}) - a_{m-1}^n (2 - \varepsilon \delta H \omega_m^n) = 0, \\ & b_m^n (2 - \varepsilon \delta H \omega_{m-1}^{n-1}) - b_{m-1}^{n-1} (2 - \varepsilon \delta H \omega_m^n) = 0 \end{aligned}$$

で与えられる.

$H = 0$ の場合, 両立条件は

$$\begin{aligned} & \omega_m^n \omega_{m-1}^{n-1} - \omega_{m-1}^n \omega_m^{n-1} + \varepsilon \delta a_m^n b_m^n = 0, \\ & a_m^n - a_{m-1}^n = 0, \quad b_m^n - b_{m-1}^{n-1} = 0 \end{aligned}$$

となる. とくに $\varepsilon = \delta = 1$, $a_m^n = b_m^n = 1$ とし, $\omega_m^n := \pm \exp W_m^n$ とおけば広田 [11] によって提出された**差分リウヴィル方程式**

$$2 \sinh(W_{m+1}^{n+1} - W_m^{n+1} - W_{m+1}^n + W_m^n) + \exp(-W_{m+1}^{n+1} - W_m^{n+1} - W_{m+1}^n - W_m^n) = 0$$

となる. $H = -1$ のとき, 両立条件は Bobenko と Schief [4] によって提出された**差分ツイツェイカ系**である.

$$\frac{2a_m^n}{2 + \varepsilon \delta \omega_m^n} = \frac{(\tau_m^n)^2}{\tau_{m-1}^{n-1} \tau_m^{n+1}}, \quad \frac{2b_m^n}{2 + \varepsilon \delta \omega_m^n} = \frac{(\tau_m^n)^2}{\tau_{m-1}^n \tau_{m+1}^n}, \quad \frac{2 + \varepsilon \delta \omega_m^n}{2} = \frac{\tau_m^{n+1} \tau_{m+1}^n}{\tau_m^n \tau_{m+1}^{n+1}}$$

で函数 τ_m^n を定義すれば差分ツイツェイカ系は次の 3 重線型形式 (trilinear form) に書き直せることが [4] で示された.

$$\frac{1}{\varepsilon^3 \delta^3} \det \begin{pmatrix} \tau_m^n & \tau_m^{n+1} & \tau_m^{n+2} \\ \tau_{m+1}^n & \tau_{m+1}^{n+1} & \tau_{m+1}^{n+2} \\ \tau_{m+2}^n & \tau_{m+2}^{n+1} & \tau_{m+2}^{n+2} \end{pmatrix} + \frac{1}{4} (\tau_{m+1}^{n+1})^3 = 0.$$

広田と高橋の論文 [13] では差分ツイツェイカ系の双線型形式が与えられ, さらに差分ツイツェイカ系の超離散化も与えられた. [25] では差分ツイツェイカ系の自明解が定める不定値差分固有アフィン球面に対する超離散極限が計算されている. なおトラクトロイドの超離散極限が [30] で計算されている. [8] では差分不定値非固有アフィン球面と等積アフィン距離函数 (area distance) との関係が議論されている. 差分不定値非固有アフィン球面の例を挙げておく.

例 7.1 (差分双曲放物面) $p(u, v) = (u + v, u - v, 2uv)$ で定まる $\mathbb{A}^3$ 内の曲面 (双曲放物面) は $\xi = (0, 0, 1)$ をブラシュケ法ベクトル場にもつ非固有アフィン球面である. $p_m^n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$ を $p_m^n = (n + m, n - m, 2nm)$ と定義すれば, これは差分非固有アフィン球面である. 実際

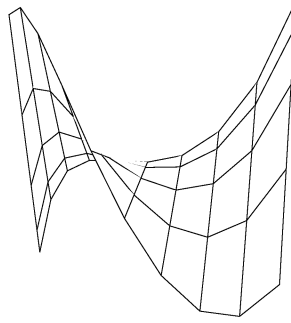
$$\begin{aligned} & (p_m^{n+1} - p_m^n) - (p_m^n - p_m^{n-1}) = \mathbf{0}, \\ & p_{m+1}^{n+1} + p_m^n - p_m^{n+1} - p_{m+1}^n = 2\xi = (0, 0, 1), \\ & (p_{m+1}^n - p_m^n) - (p_m^n - p_{m-1}^n) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

をみたしている.

例 7.2 (ケーリー曲面) $p(u, v) = (u, (u^2 - v^2)/2, u^3/6 - uv^2/2)$ を**ケーリー曲面** (Cayley surface) とよぶ. この曲面の差分化として, $p_m^n : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{A}^3$ を

$$p_m^n = (n, (n^2 - m^2)/2, n^3/6 - nm^2/2)$$

と定義し, **差分ケーリー曲面**とよぶ.



差分ケーリー曲面

8 アフィン極小曲面

差分 K 曲面, 差分固有アフィン球面, 差分非固有アフィン球面はそれぞれ差分サイン・ゴールドン方程式, 差分ツイツェイカ系, 差分リウヴィル方程式の差分幾何学的モデルであった. この節では, 差分曲面から離散可積分系を発見するという考察をしてみよう. 差分リウヴィル方程式の一般化を差分幾何学を用いて発見してみる. 非固有アフィン球面を含むクラスにアフィン極小曲面がある. そこでアフィン極小曲面を差分化してみる.

漸近座標系 (u, v) で径数表示された不定値ブラシュケ曲面 $p(u, v) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{A}^3$ のブラシュケ法ベクトル場を ξ とする. $\mathbb{A}^3$ の双対空間を $\mathbb{A}_3$ で表す^{*12}. このとき

$$\nu(p_u) = \nu(p_v) = 0, \quad \nu(\xi) = 1$$

で $\nu : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{A}_3$ が定まる. ν を (p, ξ) の**余法ベクトル場** (conormal vector field) とよぶ. 等積アフィン形状作用素は

$$\Delta_h \nu + (\text{tr } S) \nu = 0$$

をみたす. ここで Δ_h はブラシュケ計量の定めるラプラス作用素である. $\mathbb{A}^3$ の双対空間 $\mathbb{A}_3$ 上の体積要素 $d^*v = \det^*$ を

$$|\det^*(\nu_u, \nu_v, -\nu)| = \det(p_u, p_v, \xi)$$

^{*12} $\mathbb{A}_3$ は $\mathbb{A}^3$ から $\mathbb{R}$ への線型写像の全体.

で定義する. またベクトル積 $\times : \mathbb{A}_3 \times \mathbb{A}_3 \rightarrow \mathbb{A}^3$ を

$$\nu(\mu_1 \times \mu_2) = \det^*(\nu, \mu_1, \mu_2), \quad \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{A}_3$$

で定義する.

定義 8.1 ブラシュケ曲面 (p, ξ) が $\text{tr } S = 0$ をみたすとき**アフィン極小曲面** (affine minimal surface) とよぶ.

非固有アフィン球面はアフィン極小曲面の例であることを注意しておく. 漸近座標系 (u, v) で径数表示されたアフィン極小曲面^{*13}の積分可能条件を求めよう. アフィン球面のときと同様にガウスの公式が

$$\begin{aligned} p_{uu} &= (\log \omega)_u p_u + a\omega^{-1}p_v, \\ p_{uv} &= \omega\xi, \\ p_{vv} &= b\omega^{-1}p_u + (\log \omega)_v p_v, \end{aligned}$$

で与えられる. ワインガルテンの公式は

$$\xi_u = -sp_v, \xi_v = -tp_u$$

となる. 積分可能条件は

$$\begin{aligned} (\log \omega)_{uv} + ab\omega^{-2} &= 0, \quad a_v + \omega^2 s = 0, \quad b_u + \omega^2 t = 0, \\ (\omega t)_u - bs &= 0, \quad (\omega s)_v - at = 0 \end{aligned}$$

で与えられる. 余法ベクトル場 ν は

$$\nu_{uu} = \frac{\omega_u}{\omega}\nu_u - \frac{a}{\omega}\nu_v + \omega s(-\nu), \quad \nu_{uv} = 0, \quad \nu_{vv} = -\frac{b}{\omega}\nu_u + \frac{\omega_v}{\omega}\nu_v + \omega t(-\nu)$$

をみたす. 余法ベクトル場 ν は $\nu_{uv} = 0$ をみたすので $\nu(u, v) = X(u) + Y(v)$ と変数分離される.

すると, アフィン極小曲面 $p(u, v)$ は

$$p(u, v) = \int_{(0,0)}^{(u,v)} \nu \times \nu_u du - \int_{(0,0)}^{(u,v)} \nu \times \nu_v dv + p_0$$

と積分表示で復元できる. この積分表示式を**ルリウヴルの公式** (Lelievre formula) とよぶ. ここで

$$\hat{p}(u, v) := p(u, v) - 2Y(v) \times X(u)$$

と定めると $\hat{p}$ もアフィン極小曲面であり

- (1) $\hat{p} - p$ は p と $\hat{p}$ の双方に接する.
- (2) 両者のブラシュケ法ベクトル場は平行, $(\xi//\hat{\xi})$

^{*13} 正確には不定値アフィン極小曲面

という性質をもっている. この $\hat{p}$ を p の **アフィン・ベックルンド変換** とよぶ. 松浦は学位論文において, アフィン極小曲面の差分化を次のように定義した.

定義 8.2 ([24], [26]) $p_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ に対し以下をみたす $\xi_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ と $\mathbb{L}$ 上の関数 a, b, ω, s, t が存在するとき, p_m^n を **(不定値) 差分アフィン極小曲面** とよぶ.

$$\begin{aligned}\Delta_{+n}\Delta_{+n}p_m^n &= \frac{\Delta_{-n}\omega_m^n}{\omega_m^n} + \Delta_{+n}p_m^n + \frac{a_m^n}{\omega_m^n}\Delta_{+m}p_m^n, \\ \Delta_{+n}\Delta_{+m}p_m^n &= \omega_m^n\xi_m^n, \\ \Delta_{+m}\Delta_{+m}p_m^n &= \frac{b_m^n}{\omega_m^n}\Delta_{+n}p_m^n + \frac{\Delta_{-m}\omega_m^n}{\omega_m^n}\Delta_{+m}p_m^n, \\ \Delta_{-n}\xi_m^n &= -s_m^n\Delta_{+m}p_m^n, \\ \Delta_{-m}\xi_m^n &= -t_m^n\Delta_{+n}p_m^n, \\ \omega_m^n &= \det(\Delta_{+n}p_m^n, \Delta_{+m}p_m^n, \xi_m^n).\end{aligned}$$

ξ が定ベクトルならば, 非固有アフィン球面であることに注意しよう.

定理 8.1 差分アフィン極小曲面の両立条件は以下で与えられる.

$$\begin{aligned}\omega_m^n\omega_{m-1}^{n-1} - \omega_m^{n-1}\omega_{m-1}^n + \varepsilon\delta a_m^n b_m^n &= 0, \\ \Delta_{+m}a_m^n + \omega_m^{n-1}\omega_m^n s_m^n &= 0, \\ \Delta_{+n}b_m^n + \omega_{m-1}^n\omega_m^n t_m^n &= 0, \\ \Delta_{-n}(\omega_m^n t_m^n) - b_m^n s_{m-1}^n &= 0, \\ \Delta_{-m}(\omega_m^n s_m^n) - a_m^n s_{m-1}^{n-1} &= 0.\end{aligned}$$

両立条件として導かれた, この連立差分方程式系 (coupled system) が差分リウヴィル方程式の**差分幾何学的な一般化**のひとつである.

差分アフィン極小曲面の余法ベクトル場は

$$\nu_m^n := \frac{1}{\omega_m^n} \Delta_{+n}p_m^n \times \Delta_{+m}p_m^n$$

で定義される. リウヴィルの公式の差分版は

$$\Delta_{+n}p_m^n = \nu \times \Delta_{+n}\nu, \quad \Delta_{+m}p_m^n = \Delta_{+m}\nu \times \nu_m^n$$

で与えられる. アフィン・ベックルンド変換は余法ベクトル場を用いて, 滑らかな曲面のときと同様に定義される. Craizer, Anciaux, Lewiner [7] は松浦と独立に差分アフィン極小曲面を提案した. 彼らの提案した差分アフィン極小曲面は松浦の定義したものと一致している. ただし松浦は定値の場合 ($\det(h_{ij}) > 0$) も扱っていることを注意しておく. 一方, [7] では次のような変分学的な解積が与えられている. 曲面 p_m^n に対し

$$\det(p_m^{n+1} - p_m^n, p_{m+1}^n - p_m^n, p_{m+1}^{n+1} - p_m^n) > 0$$

と仮定し, この量の正の平方根を F_m^n とする. **差分表面積汎関数** $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A}(\mathbf{p}_m^n) := \sum_{n,m} F_m^n$$

で定義する. 次に $\mathbf{V}_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ を有限個の点を除き, 値 0 をとる差分ベクトル場とする. $\mathbf{V}_m^n$ を変分ベクトル場にもつ $\mathbf{p}_m^n$ の変分を

$$\mathbf{p}_m^n(t) := \mathbf{p}_m^n + t\mathbf{V}_m^n$$

で定める.

命題 8.1 $\mathbf{p}_m^n : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ が差分アフィン極小曲面ならば,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathcal{A}(\mathbf{p}_m^n(t)) = 0.$$

差分アフィン極小曲面の例を挙げて本稿を終えよう. まず中心冪函数, 上昇冪函数, 下降冪函数を復習しておく ([9], [12] 参照).

定義 8.3 整数 k に対し x の中心 k 乗 $x^{(k)}$ を次で定める.

- $k = 0$ のとき, $x^{(0)} = 1$.
- $k > 0$ のとき

$$x^{(k)} := \prod_{j=1}^k \left(x + \left(\frac{k+1}{2} - j \right) \varepsilon \right),$$

- $k < 0$ のとき,

$$x^{(k)} = \frac{1}{x^{(-k)}}.$$

定義 8.4 整数 k に対し x の上昇 k 乗 $x^{\bar{k}}$ を次で定める.

- $k = 0$ のとき, $x^{\bar{0}} = 1$.
- $k > 0$ のとき

$$x^{\bar{k}} := \prod_{j=1}^k (x + (j-1)\varepsilon),$$

- $k < 0$ のとき,

$$x^{\bar{k}} = \prod_{j=1}^{-k} \frac{1}{x - j\varepsilon}$$

定義 8.5 整数 k に対し x の下降 k 乗 $x^{\underline{k}}$ を次で定める.

- $k = 0$ のとき, $x^{\underline{0}} = 1$.

- $k > 0$ のとき

$$x^k := \prod_{j=1}^k (x - (j-1)\varepsilon),$$

- $k < 0$ のとき,

$$x^k = \prod_{j=1}^{-k} \frac{1}{x + j\varepsilon}$$

x, y を不定元とする多項式 $P(x, y)$ が中心差分作用素 Δ_x, Δ_y に対し^{*14} $(\Delta_x \Delta_x + \Delta_y \Delta_y)P(x, y) = 0$ をみたすとき, $P(x, y)$ を**差分調和多項式**とよぶ.

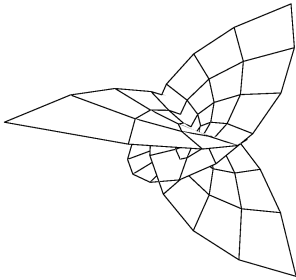
定理 8.2 ([26]) $\psi_d(x, y)$ を次数 $d > 0$ の差分調和多項式とすると, ψ_d は次に挙げる差分調和多項式の線型結合である.

$$\varphi_d(x, y) = \sum_{j=0}^{[d/2]} (-1)^j \binom{d}{2j} x^{(d-2j)} y^{(2j)}, \quad \phi_d(x, y) = \sum_{j=0}^{[(d-1)/2]} (-1)^j \binom{d}{2j+1} x^{(d-2j-1)} y^{(2j+1)}.$$

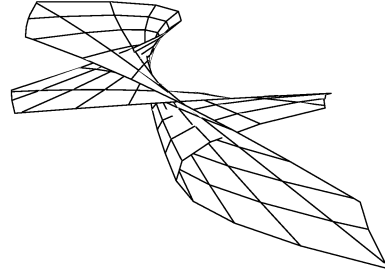
例 8.1 (差分エネパー曲面) α, β, γ を定数とする. $(x, y) = (n\varepsilon, m\delta) \in \mathbb{L}$ に対し

$$\mathbf{p}(x, y) := (y^3 - 3x^2(y - \delta) + 3(y - \delta), x^3 - 3(x - \varepsilon)y^2 + 3(x - \varepsilon), -6(x - \varepsilon)(y - \delta))$$

と定めると差分アフィン極小曲面である.



差分エネパー曲面



そのアフィン・ベックルンド変換

例 8.2 ([26]) $\psi_2(x, y)$ を 2 次の差分調和多項式とする. このとき

$$\psi_2(x, y) = c_0 \varphi_2(x, y) + \frac{c_1}{2} \phi_2(x, y), \quad \varphi_2(x, y) = x^{(2)} - y^{(2)}, \quad \phi_2(x, y) = 2xy$$

と表すことができる. (c_0, c_1 は定数). $\nu: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}_3$ を

$$\nu(x, y) = (x, y, \psi_2(x, y)) + (a_1, a_2, a_3)$$

で定める. ただし a_1, a_2, a_3 は定数. これを余法ベクトル場にもつ差分アフィン極小曲面 $\mathbf{p}: \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{A}^3$ は

^{*14}

$$\Delta_x f(x, y) = \frac{f(x + \varepsilon/2, y) - f(x - \varepsilon/2, y)}{\varepsilon}, \quad \Delta_y f(x, y) = \frac{f(x, y + \varepsilon/2) - f(x, y - \varepsilon/2)}{\varepsilon}.$$

$$\begin{aligned} p(x, y) = & \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2a_3x \\ -2a_3y \\ x^2 + y^2 + 2a_1x + 2a_2y \end{pmatrix} \\ & + \frac{c_0}{6} \begin{pmatrix} -2x^{(3)} - 6xy^2 - 6a_2(x(y + \delta) + (x + \varepsilon)y) - 3\varepsilon(x^2 + y^2) + \frac{3}{2}(\varepsilon^2 - \delta^2)x \\ 2y^{(3)} + 6x^2y + 6a_1(x(y + \delta) + (x + \varepsilon)y) + 3\delta(x^2 + y^2) + \frac{3}{2}(\varepsilon^2 - \delta^2)y \\ 0 \end{pmatrix} \\ & + \frac{c_1}{6} \begin{pmatrix} -2y^{(3)} + 3a_2(x^2 - y^2) - 3\delta y^2 \\ -2x^{(3)} - 3a_1(x^2 - y^2) - 3\varepsilon x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

で与えられる.

謝辞

講演の機会をくださった広田良吾先生・高橋大輔先生, いくつかの有用なご指摘をいただいた増田哲先生と査読者に御礼申し上げます. 本稿の図はすべて松浦望先生の作成したものです. 松浦先生にもあわせて御礼申し上げます.

参考文献

- [1] 安藤央, 離散冪関数と Painlevé VI 方程式との関係, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 22AO-S8, 2011, pp. 56–61.
- [2] T. Ando, M. Hay, K. Kajiwara, T. Masuda, An explicit formular for the discrete power function associated with circle patterns of Scramm type, preprint. arXiv:1105.1612v2[nlin.SI].
- [3] A. Bobenko, U. Pinkall, Discrete surfaces with constant negative Gaussian curvature and the Hirota equation, J. Differential Geom. 43 (1996), no. 3, 527–611.
- [4] A. I. Bobenko, W. Schief, Discrete indefinite affine spheres, in: [5], pp. 113–138.
- [5] A. I. Bobenko, R. Seiler, *Discrete Integrable Geometry and Physics*, Oxford Lecture Series in Math. Appl. 16, 1999.
- [6] A. I. Bobenko, Y. B. Suris, *Discrete Differential Geometry. Integrable Structure*, Graduate Studies in Math. **98**, Amer. Math. Soc., 2008.
- [7] M. Craizer, H. Anciaux, T. Lewiner, Discrete affine minimal surfaces with indefinite metric, Differential Geom. Appl. 28 (2010), 158–169.
- [8] M. Craizer, M. Alvim, R. Teixeira, Area distances of convex plane curves and improper affine spheres, SIAM J. Imaging Sciences 1 (2008), no. 1, 209–227.

- [9] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik, *Concrete Mathematics. A Foundation for Computer Science*, Second edition, Addison-Wesley Publ., 1994. 邦訳, コンピュータの数学 (有沢誠, 萩野達也, 安村通晃, 石畑清 [訳]), 共立出版, 1993.
- [10] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. III. Discrete sine-Gordon equation, J. Phys. Soc. Japan 43 (1977), no. 6, 2079–2086.
- [11] R. Hirota, Nonlinear partial difference equations. V. Nonlinear equations reducible to linear equations, J. Phys. Soc. Japan 46 (1979), 312–319.
- [12] 広田良吾, 『差分学入門』, 培風館, 1998.
- [13] R. Hirota and D. Takahashi, Ultradiscretization of the Tzitzeica equation, Glasgow Math. J. 47A (2005), 77–85.
- [14] T. Hoffmann, Discrete Amsler surfaces and a discrete Painlevé III equation, in: [5], pp. 83–96.
- [15] T. Hoffmann, *Discrete Differential Geometry of Curves and Surfaces*, COE Lecture Note Vol. 18, Kyushu Univ., 2009 ([37] に部分的な邦訳あり).
- [16] 井ノ口順一, 『曲線とソリトン』, 朝倉書店, 2010.
- [17] 井ノ口順一, 『どこにでも居る幾何』, 日本評論社, 2010.
- [18] 井ノ口順一, 差分幾何, 数学セミナー, 2010 年 11 月号, pp. 26–31.
- [19] 井ノ口順一・小林真平・松浦望, 『曲面の微分幾何学とソリトン方程式』, 立教 SFR 講究録 No. 8, 2005 年 2 月刊.
- [20] 小林昭七, 『曲線と曲面の微分幾何』, 裳華房, 1977. 新装改定版, 1995.
- [21] 近藤剛史, W. Rossman, 離散的な曲面, 数理科学, 2010 年 11 月号, pp. 19–25.
- [22] 増田哲, 離散冪函数の明示公式, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 22AO-S8, 2011, pp. 56–61.
- [23] 松浦望, 曲面の離散化と微分幾何学, 修士論文, 東北大学大学院情報科学研究科, 2001.
- [24] 松浦望, Discrete analogue of affine differential geometry and integrable systems, 博士学位論文, 東北大学大学院情報科学研究科, 2004.
- [25] 松浦望, アフィン球面の超離散化 (に向けて), 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 12ME-S2, Article No. 40, 2006.
- [26] N. Matsuura, A discrete analogue of the affine Bäcklund transformation, Fukuoka Univ. Sci. Rep. 40 (2010), no. 2, 163–173.
- [27] 松浦望, 曲線と曲面の差分幾何, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No. 22AO-S8, 2011, pp. 62–74.
- [28] 松浦望, 曲線の差分幾何, 本講究録.
- [29] N. Matsuura, H. Urakawa, Discrete improper affine spheres, J. Geom. Phys. 45 (2003), no. 1-2, 164–183.
- [30] 中田庸一, 超離散負定曲率曲面の構成, 修士論文, 東京大学大学院数理科学研究科, 2006.
- [31] 野水克己, 佐々木武, 『アフィン微分幾何学』, 裳華房, 1994.

- [32] Y. Ohyama, H. Kawamuko, H. Sakai, K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations V, Third Painlevé equations of special type $P_{\text{III}}(D_7)$ and $P_{\text{III}}(D_8)$, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 13 (2006), no. 2, 145–204.
- [33] F. Pedit, H. Wu, Discretizing constant curvature surfaces via loop group factorizations: The discrete sine- and sinh-Gordon equation, J. Geom. Phys. 17 (1995), 245–260.
- [34] W. Rossman, *Discrete Constant Mean Curvature Surfaces via Conserved Quantities*, COE Lecture Note. vol. 25, Kyushu Univ., 2010.
- [35] H. Sakai, Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations, Comm. Math. Phys. 220 (2001), no. 1, 165–229.
- [36] R. Sauer, Parallelgrammgitter als Modelle pseudosphärischer Flächen, Math. Z. 52 (1950), 611–622.
- [37] 若山正人 (編), 『可視化の技術と現代幾何学』, 岩波, 2010.
- [38] 吉田正章, 離散正則関数, 数理科学, 2010 年 11 月号, pp. 7–12.

inoguchi(AT)sci.kj.yamagata-u.ac.jp