

ある種の競争モデルにおける進行波解について

京産大 理 細野 雄三

広島大 理 三村 昌泰

1. 序

生態学に現われる拡散を伴う二種の競争モデルは、一般に半線型放物型方程式

$$(1.1) \quad \begin{cases} u_t = d_1 u_{xx} + f(u, v) \\ v_t = d_2 v_{xx} + g(u, v) \end{cases}$$

により記述される。方程式 (1.1) は、生態学のみならず、形態形成、化学反応等様々な分野のモデルを含んでおり、この10年間に、多くの研究者の注目を集め、その数学的理論も大きく発展してきた^[5]。我々は (1.1) の進行波解に注目するが、それに関してもいくつかの研究がある^[1]。Gardner は topological な方法を用いて、(1.1) の進行波解の存在及びその安定性を研究している^[8]。また Fife は特異摂動法を用いて $d_1/d_2 \ll 1$ の場合に我々のモデルを含めた型で形式的な議論を展開している^[3]。我々は、Fife と同様、特異摂動法により進行波解の存在とそ

の伝播速度について考察する。とりわけ、伝播速度の符号は $t \rightarrow +\infty$ のとき、いずれの種が優越するかを明らかにするという点で、生態学的に重要な意味をもつ。

この報告では、二種の競争関係として次の非線型項

$$(1.2) \quad \begin{cases} f(u, v) = (R_1 - a_1 u - \frac{b_1 v}{1+eu}) u \\ g(u, v) = (R_2 - a_2 v - b_2 u) v \end{cases}$$

に制限して考える。更に簡単のため、 $R_1 = R_2 = R$, $a_1 = a_2 = a$, $b_1 = b_2 = b$ とする。ここで、 R, a, b, e, σ は全て正の定数である。また空間変数を変換することにより、 $d_2 = 1$, $\varepsilon^2 = d_1/d_2$ とし、特異摂動法が適用できる、 $\varepsilon^2 \ll 1$ の場合を扱う。

2. 問題の設定

方程式 (1.1) の進行波解とは、 $u(x, t) = u(x-ct)$, $v(x, t) = v(x-ct)$ なる形の解を言う。我々は、伝播速度が遅く、 ε オーダであると仮定し、 c を改めて $c\varepsilon$ と表し、 $z = x - c\varepsilon t$ とおく。まず最初に、(1.1) は2つの定数解、 $P_+ = (u_\infty, v_\infty) = (0, R/a)$, $P_- = (u_\infty, v_\infty) = (R/a, 0)$ を持つが、これらは常微分方程式の意味 ($d_1 = d_2 = 0$) で安定である、すなわち

$$(A.1) \quad b/a > 1$$

と仮定する。これは、一つの種のみ存在する場合、生存状態が拡散がなければ安定であることを意味する。

我々は、十分遠方では、互いに異なる種が生存しており、これらの二種が衝突したときどの様になるかを考える。その時間問題は、方程式

$$(2.1) \quad \begin{cases} \varepsilon^2 u_{zz} + C \varepsilon u_z + f(u, v) = 0 \\ v_{zz} + C \varepsilon v_z + \sigma g(u, v) = 0 \end{cases} \quad z \in \mathbb{R} = \{z \mid -\infty < z < +\infty\}$$

と境界条件

$$(2.2) \quad \begin{cases} u(+\infty) = u_{+\infty}, \quad v(+\infty) = v_{+\infty} \\ u(-\infty) = u_{-\infty}, \quad v(-\infty) = v_{-\infty} \end{cases}$$

をみたす、 $C(\varepsilon)$ 及び $v(u(z); \varepsilon, C), v(z; \varepsilon, C)$ を求めることである。(2.1)(2.2) の解を平行移動してもまた解となるから、規格化の条件として

$$(2.3) \quad u(0; \varepsilon, C) = \alpha \in (0, R/a)$$

を加える。また

$$v(0; \varepsilon, C) = \beta \in (0, R/a)$$

と書くが、 β は後で ε の関数として決定される。

後で使う記号を述べておく。

$$\mathbb{R}_+ \equiv \{z \mid z \geq 0\}, \quad \mathbb{R}_- \equiv \{z \mid z \leq 0\},$$

$$X_{p\varepsilon}^p(I) \equiv \{u(z) \mid \|u\|_{X_{p\varepsilon}^p} \equiv \sup_{z \in I} \sum_{i=0}^p e^{\rho|z|} |(\varepsilon \frac{d}{dz})^i u(z)| < +\infty\}$$

$\varepsilon = 1$ のとき、簡単に $X_p^p(I)$, $p = 0$ のとき $X_{p\varepsilon}(I), X_p(I)$ と書く。ここで I は、 $\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ もしくは $\mathbb{R}$ を表わすものとする。

3. Reduced Problem

(2.1)(2.2)において $\varepsilon = 0$ とおくと、次の Reduced Problem が得られる：

$$(3.1) \quad \begin{cases} f(U, V) = 0 \\ V_{zz} + \sigma g(U, V) = 0 \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} U(+\infty) = 0, V(+\infty) = R/a \\ U(-\infty) = R/a, V(-\infty) = 0 \end{cases}$$

(3.1)(3.2)の解とは、 U が区分的に連続であって、 $V \in C^1(\mathbb{R})$ かつ U の不連続点を除いて(3.1)(3.2)をみたすものを言う。まず、 $f(U, V) = 0$ から $h_\beta(V)$ を次式により定義する(図1)：

$$(3.3) \quad U \equiv h_\beta(V) = \begin{cases} h_+(V) \equiv 0 & (V > \beta) \\ h_-(V) = (Re - a + \sqrt{(Re + a)^2 - 4abeV})/2ae & (V < \beta) \end{cases}$$

ここで β は、 $h_\pm$ の定義域をそれぞれ $I_+ = (-\infty, R/a)$, $I_- = (0, V_c)$, $V_c = \max(R/b, (Re+a)^2/4abe)$ としたとき、 $I_0 = I_+ \cap I_-$ に属するものとする。 $g_\beta(V) = g(h_\beta(V), V)$ と書くと、(3.1)(3.2)は単独方程式に対する次の問題に帰着できる。

$$(3.4) \quad \begin{cases} V_{zz} + \sigma g_\beta(V) = 0 & z \in \mathbb{R} \\ V(+\infty) = R/a, V(-\infty) = 0 \end{cases}$$

(3.4)の解の平行移動に関する任意性から、 $V(0) = \beta$ としてよい。(3.4)を解くために、まず次の $\mathbb{R}_\pm$ 上の問題に分けそれらの解 $V_\pm(z, \beta)$ を $z = 0$ で C^1 でつなぐという方針をとる。

$$(3.5)_\pm \begin{cases} V_{zz} + \sigma g_\pm(V) = 0 & z \in \mathbb{R}_\pm \\ V(0) = \beta, \quad V(\pm\infty) = U_{\pm\infty} \end{cases}$$

ここで, $g_\pm(V) = g(h_\pm(V), V)$ ($V \in I_\pm$) である。

Lemma 1 (Fife [7])

仮定 (A.1) の下で, 任意の $\beta \in I_\pm$ に対して, (3.5)_± の狭義単調増大な解 $V_\pm(z, \beta)$ が一意に存在して $X_{\mu_\pm}^2(\mathbb{R}_\pm)$ に属する。

更に, $\frac{d}{dz} V(0, \beta)$ は β に関して 1 階連続微分可能である。

ここで $\mu_\pm = \sqrt{-\sigma g'_\pm(U_{\pm\infty})}$ である。■

次に, $J(\beta) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d}{dz} V_-(0, \beta) \right)^2 - \left(\frac{d}{dz} V_+(0, \beta) \right)^2 \right] = \int_{U_{-\infty}}^{U_{+\infty}} g_\beta(s) ds$ が

(A.2) $J(\beta)$ は唯一つの零点 $\beta = \beta_0 \in I_0$ をもつ

と仮定すると次の Lemma が成り立つ。

Lemma 2.

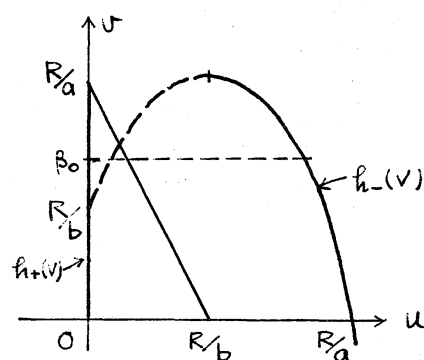
仮定 (A.1)(A.2) の下で, $V(0) = \beta$ をみたす (3.4) の狭義単調な解は唯一つ存在して

$$V(z, \beta_0) = \begin{cases} V_+(z, \beta_0) & z \in \mathbb{R}_+ \\ V_-(z, \beta_0) & z \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

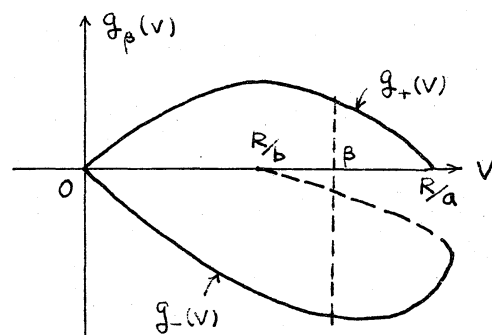
で与えられ, 更に $V(z, \beta_0) \in X_p^1(\mathbb{R})$ ($p = \min(\mu_+, \mu_-)$) である。■

$U(z, \beta) \equiv h(V(z, \beta_0))$ とおくと, $(U(z, \beta_0), V(z, \beta_0))$ は Reduced Problem (3.1)(3.2) の解を与える。

注意 仮定 (A.2) は $(Re+a)^2/4abc > R_a$ ならば自動的にみたされる。



(図 1)



(図 2)

4. 境界層方程式

3. で得られた Reduced Problem の解 U は $\varepsilon = 0$ で 1 種不連続性をもち、従ってその近傍では元の問題の解 u の 1 階及び 2 階導関数は ε が小 $\varepsilon < \delta$ になると大 $\varepsilon < \delta$ になって、 U は真の解を近似していないと予想される。そこで我々は拡張変数 $\zeta = \varepsilon/\varepsilon$ を導入して (2.1) を書き換え、その後 $\varepsilon = 0$ とくと

$$(4.1) \quad w_{\zeta\zeta} + c w_{\zeta} + f(w, \beta) = 0$$

が得られる。境界条件としては

$$(4.2) \quad w(\pm\infty) = h_{\pm}(\beta), \quad w(0) = \alpha \in (h_+(\beta), h_-(\beta))$$

と与えるのが自然であろう。ここで、 $\beta = \beta_0$ に十分近い任意の固定した数である。

我々は、 β_0 に対して更に次の仮定をおく：

$$(A.3) \quad \beta_0 > R/b$$

注意. (A.3) は $c \gg 1$, $R/b > 3 + \delta$ ($\delta > 0$) ならば充たれる。

そのとき、問題は (4.1) (4.2) をみたす C と W を求めることである。

Lemma 3 (Fife & McLeod [6])

仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で、(4.1) (4.2) をみたす解 C と W が唯一つ存在し、それら $C_0, W(\xi, C_0, \beta)$ とすると次の性質をもつ：

(i) $W(\xi, C_0, \beta)$ は狭義単調関数であって、 $\xi \rightarrow \pm\infty$ のとき平衡値に $O(e^{\tau_{\pm}\xi})$ で近づく。ここで $\tau_{\pm} = [-C_0 \mp \sqrt{C_0^2 - 4f_u(h_{\pm}(\beta), \beta)}]/2$ である。

(ii) C_0 の符号は $\int_{h_+(\beta)}^{h_-(\beta)} f(s) ds$ の符号と同じである。

ここで、 β は β_0 に十分近い任意の数である。■

後で必要となる W の $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}_-$ 上での C に対する依存性を調べるために次の問題を考える。

$$(4.3)_{\pm} \begin{cases} W_{\pm\xi\xi} + C W_{\pm\xi} + f(h_{\pm}(\beta) + W_{\pm}, \beta) = 0 & \xi \in \mathbb{R}_{\pm} \\ W_{\pm}(0) = d - h_{\pm}(\beta), W_{\pm}(\pm\infty) = 0 \end{cases}$$

Cor. of Lemma 3

C_0 に十分近い任意の C と、 β_0 に十分近い任意の β に対して、仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で (4.3) $_{\pm}$ の狭義単調解 $W_{\pm}(\xi, C, \beta)$ がそれぞれ唯一つ存在して

$$(4.4) \quad \left[\frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{dW_{\pm}}{d\xi}(0, C, \beta) \right) - \frac{\partial}{\partial C} \left(\frac{dW_{\mp}}{d\xi}(0, C, \beta) \right) \right]_{C=C_0} \neq 0$$

が成り立つ。

5. 半空間 R_+ 上の解の存在

(2.1)(2.2)の解の存在を示すため, (2.1)(2.2)を R_+ 上に制限し次の問題を考える:

$$(5.1)_\pm \quad \begin{cases} \varepsilon^2 U_{\pm z z} + c \varepsilon U_{\pm z} + f(U_\pm, V_\pm) = 0 \\ V_{\pm z z} + c \varepsilon V_{\pm z} + \sigma g(U_\pm, V_\pm) = 0 \end{cases} \quad z \in R_\pm$$

$$(5.2)_\pm \quad \begin{cases} U_\pm(0) = \alpha, \quad V_\pm(0) = \beta \\ U_\pm(\pm\infty) = U_{\pm\infty}, \quad V(\pm\infty) = V_{\pm\infty} \end{cases}$$

(5.1) $_\pm$ (5.2) $_\pm$ の解をそれぞれ

$$(5.3)_\pm \quad \begin{cases} U_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) = U_\pm(z, \beta) + W_\pm(z, \beta, c) + V_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) \\ V_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) = V_\pm(z, \beta) + S_\pm(z, \varepsilon, c, \beta) \end{cases} \quad z \in R_\pm$$

の形で求める。ここで c, β は c_0, β_0 に十分近い任意の数であり, $\lambda = (c, \beta)$, $\lambda_0 = (c_0, \beta_0)$, λ_0 の δ -近傍を Λ_δ と書く。

以下、この節では、 R_+ のみで考え、+ の添字は省略する。

(5.1)(5.2)を (r, s) に対応する問題に書き直すと

$$(5.4) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon^2 r_{zz} + c \varepsilon r_z + f_u r + f_v s + N_1(r, s) \\ s_{zz} + c \varepsilon s_z + \sigma g_v s + \sigma g_u r + N_2(r, s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

$$(5.5) \quad r(0) = s(0) = 0, \quad r(+\infty) = s(+\infty) = 0$$

となる。ここで、 $f_u = f_u(U+W, V)$ であり、 f_v, g_u, g_v も同様。

N_1, N_2 は r, s に関する2次以上の非線型項、 k_1, k_2 は

$$k_1 = -\{\varepsilon^2 U_{zz} + c \varepsilon U_z + W_{zz} + c W_z + f(U+W, V)\}$$

$$k_2 = -\{V_{zz} + c \varepsilon V_z + \sigma g(U+W, V)\}$$

である。我々は更に函数空間 $C_0^1 = \{s \mid s \in C^1(\mathbb{R}_+), s(0) = 0\}$, $\tilde{X}_{p\varepsilon}^p = \{r \mid r \in X_{p\varepsilon}^p, r(0) = 0\}$, $X_{\varepsilon 0} = \tilde{X}_{p\varepsilon}^2 \times (H_2 \cap C_0^1)$, $Y = X_p \times L_2$ を導入する。 $t = t(r, s)$ と書いて, (5.4) 左辺の非線型作用素を $T(t, \varepsilon, \lambda): X_{\varepsilon 0} \rightarrow Y$ と表わす。 t に関する T の Frechet 微分を T_t と書く。ここで, $p = \min(\mu_+, \mu_-)$ と固定しておく

まず, $M_\varepsilon: H_2 \cap C_0^1 \rightarrow L_2$ を

$$M_\varepsilon \equiv \frac{d^2}{dz^2} + c\varepsilon \frac{d}{dz} + \sigma g_U(U+W, V)$$

で定義する。

Lemma 4.

仮定 (A.1) の下で, 十分小さい正の数 ε_0 と δ_0 が存在して, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ なる任意の ε と, $\lambda \in \Lambda_\delta^- (\delta < \delta_0)$ なる任意の λ に対して, M_ε は一様に有界な逆作用素 $M_\varepsilon^{-1}: L_2 \rightarrow H_2 \cap C_0^1$ をもつ。■

注意. $\mathbb{R}^+$ 上で Lemma 4 を示すには, σ が十分小さいという仮定が我々の証明方法では必要となる。

次に, $L_\varepsilon: \tilde{X}_{p\varepsilon}^2 \rightarrow X_p$ を

$$L_\varepsilon \equiv \varepsilon^2 \frac{d^2}{dz^2} + c\varepsilon \frac{d}{dz} + f_u(U+W, V)$$

で定義する。

Lemma 5. (Key lemma)

仮定 (A.1) ~ (A.3) の下で, 十分小さい正の数 ε_1 と δ_1 が存在して, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ なる任意の ε と, $\lambda \in \Lambda_\delta (\delta < \delta_1)$ なる任意の λ に対して, L_ε は一様に有界な逆作用素 $L_\varepsilon^{-1}: X_p \rightarrow \tilde{X}_{p\varepsilon}^2$

をもつ。■

Lemma 6.

非線型作用素 $T(t, \varepsilon, \lambda)$ は次の性質をもつ:

- (1) 任意の $t_1, t_2 \in X_\varepsilon$ に対し, ε と λ に独立な定数 $K_1 > 0$ が存在して, $\|T_t(t_1, \varepsilon, \lambda) - T_t(t_2, \varepsilon, \lambda)\|_{X_\varepsilon \rightarrow Y} \leq K_1 \|t_1 - t_2\|_{X_\varepsilon}$.
- (2) σ が十分小さければ, $T_t(0, \varepsilon, \lambda): X_\varepsilon \rightarrow Y$ は ε と λ に関しても一様に有界な逆作用素をもつ。
- (3) ε と λ に依存しない正の定数 K_2 が存在して, $\|N(0, \varepsilon, \lambda)\|_Y \leq K_2 \sqrt{\varepsilon}$ が成り立つ。

ただし, (A.1) ~ (A.3) はみたされ, ε と λ は Lemma 4, 5 の条件をみたすものとする。■

証明は Hosono & Mimura [9] Lemma 15 とほとんど同じである。

Lemma 6. により Fife [2] による陰函数の定理が適用できて次の定理が成り立つ。

Theorem 7.

(A.1) ~ (A.3) を仮定し, σ は十分小さいとする。そのときある ε_0 と δ_0 が存在して, 任意の ε ($0 < \varepsilon < \varepsilon_0$) と $\lambda \in \Lambda_\delta$ ($\delta < \delta_0$) に対して, 次の様な函数 $t(\varepsilon, \lambda) \in X_\varepsilon$ が存在する

- (1) $T(t(\varepsilon, \lambda), \varepsilon, \lambda) \equiv 0$
- (2) $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \|t(\varepsilon, \lambda)\|_{X_\varepsilon} = 0$ ($\lambda \in \Lambda_\delta$ に関して一様)
- (3) $t(\varepsilon, \lambda)$ は ε と λ に関して $\|\cdot\|_{X_\varepsilon}$ の位相で一様連続。■

Theorem 7 により、問題 (5.1)₊ (5.2)₊ の解の存在が示された。
 $\mathbb{R}$ -上の問題 (5.1)₋ (5.2)₋ に対しても Theorem 7 と全く同じ結果
 が成り立つ。

6. 全空間 $\mathbb{R}$ での解の存在

前節で求めた $\mathbb{R}_+$ 上の解 (u_+, v_+) と $\mathbb{R}_-$ 上の解 (u_-, v_-) $\in \beta$
 と $c \in \mathbb{R}$ 適当に選ぶことにより、 $z = 0$ で C^1 でつなぐことがで
 きれば、我々の問題 (2.1) (2.2) の解が得られることになる。
 そのため次の2つの量を考える

$$(6.1) \quad \begin{cases} \Phi(\varepsilon, \beta, c) = \frac{d}{d\varepsilon} u_+(0, \varepsilon, \beta, c) - \frac{d}{d\varepsilon} u_-(0, \varepsilon, \beta, c) \\ \Psi(\varepsilon, \beta, c) = \left(\frac{d}{dz} v_+(0, \varepsilon, \beta, c) \right)^2 - \left(\frac{d}{dz} v_-(0, \varepsilon, \beta, c) \right)^2 \end{cases}$$

十分小さい ε_0 と δ_0 に対して $D = \{(\varepsilon, \beta, c) \mid 0 < \varepsilon < \varepsilon_0, (\beta, c) \in \Lambda_{\delta_0}\}$
 とおくと、Theorem 7 (3) により $\Phi(\varepsilon, \beta, c)$, $\Psi(\varepsilon, \beta, c)$ は D 上で
 一様連続となり、従って $\bar{D}$ 上へ連続的に Φ と Ψ を拡張してお
 く。Theorem 7 (2) により

$$\begin{cases} \Phi(0, \beta, c) = \frac{d}{d\varepsilon} W_+(0, c, \beta) - \frac{d}{d\varepsilon} W_-(0, c, \beta) \\ \Psi(0, \beta, c) = \left(\frac{d}{dz} V_+(0, \beta) \right)^2 - \left(\frac{d}{dz} V_-(0, \beta) \right)^2 = 2J(\beta) \end{cases}$$

となる。 $\Phi(0, \beta_0, c_0) = \Psi(0, \beta_0, c_0) = 0$ であり、 $\Phi(0, \beta_0, c) =$
 $\Phi_0(c)$, $\Psi(0, \beta, c) = \Psi_0(\beta)$ とおくと、Cor. of Lemma 2 と $\frac{d}{d\beta} J(\beta) <$
 0 に注意すると、 $\Phi_0(c)$ と $\Psi_0(\beta)$ は共に孤立した零点 $\beta = \beta_0$ と
 $c = c_0$ をもち、それぞれ $\beta = \beta_0$, $c = c_0$ を通過するとき符号を

変える。それ故、陰函数の定理 (Fife [2] Theorem 4.3) が適用できて次の Lemma が成り立つ。

Lemma 8.

十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して, ε の函数 $\beta(\varepsilon), c(\varepsilon)$ が存在して, $\Phi(\varepsilon, c(\varepsilon), \beta(\varepsilon)) = \Psi(\varepsilon, c(\varepsilon), \beta(\varepsilon)) = 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \beta(\varepsilon) = \beta_0$,

$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} c(\varepsilon) = c_0$ をみたす。■

Lemma 8 により

$$u(z, \varepsilon) = \begin{cases} u_+(z, \varepsilon, c(\varepsilon), \beta(\varepsilon)), & z \in \mathbb{R}_+ \\ u_-(z, \varepsilon, c(\varepsilon), \beta(\varepsilon)), & z \in \mathbb{R}_- \end{cases}, \quad v(z, \varepsilon) = \begin{cases} v_+ & z \in \mathbb{R}_+ \\ v_- & z \in \mathbb{R}_- \end{cases}$$

は共に $C^1(\mathbb{R})$ に属することが解りこれら (2.1) (2.2) の解を与える。

Theorem 9. (Main Theorem)

(A.1) ~ (A.3) を仮定し, σ は十分小さいとする。そのとき十分小さい $\varepsilon > 0$ に対して (2.1) (2.2) の解 $u(z, \varepsilon), v(z, \varepsilon)$ が存在して, $\varepsilon \rightarrow +0$ のとき

$$\|u - (U+W)\|_{X_{pe}^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0, \quad \|v - V\|_{X_f^1(\mathbb{R})} \rightarrow 0$$

が成り立つ。更に速度 $c(\varepsilon)$ は一意に決まり, その主要項 $c(0)$ の符号は $\int_{h_+(\beta_0)}^{h_-(\beta_0)} f(s, \beta_0) ds$ の符号と同じである。■

7. Appendices

Lemma 4 と Lemma 5 の証明の概略を述べる。ここでの議論

は再び $\mathbb{R}_+$ に制限するが、 $\mathbb{R}_-$ での議論は方針は全く同じであるが、若干複雑になることだけ注意しておく。

1) Lemma 4 の証明の概略

Reduced Problem の解 V に対して、 $\psi = dV/dz$ とおくと ψ は

$$(7.1) \quad \begin{cases} M_0 \psi \equiv \frac{d^2}{dz^2} \psi + \sigma g_V(U, V) \psi = 0 \\ \psi(0) \neq 0, \psi(z) > 0 \end{cases}$$

をみたし $X_p^2(\mathbb{R}_+)$ に属する。従って、 ψ を用いて Green 函数を構成することにより、問題

$$(7.2) \quad M_0 S = k, \quad S(0) = 0, \quad S \in L^2$$

は、 $\forall k \in L^2$ に対して唯一つの解 $S \in H_1 \cap C_0^1$ を持つことがわかる。問題

$$(7.3) \quad M_\varepsilon S = k, \quad S(0) = 0, \quad S \in L^2 \quad (k \in L^2),$$

は M_0^{-1} を用いて次の積分方程式に書き換えられる：

$$(7.4) \quad S = -M_0^{-1}(M_\varepsilon - M_0)S + M_0^{-1}k$$

ここで、 $M_\varepsilon - M_0 = c\varepsilon \frac{d}{dz} + \sigma\{g(U+W) - g(U)\}$ である。 $M_0^{-1}(M_\varepsilon - M_0)$ を部分積分を用いて書き換えることにより

$$\|M_0^{-1}(M_\varepsilon - M_0)\|_{L^2 \rightarrow L^2} = O(\varepsilon)$$

が成り立ち、従って ε が十分小さくすると (7.4) は L^2 での縮小写像となり Lemma 4 が成り立つ。

2) Lemma 5 の証明の概略

L_ε を変数で表わすと

$$(7.5) \quad L_\varepsilon = \frac{d^2}{d\zeta^2} + c \frac{d}{d\zeta} + f_u(U(\varepsilon\zeta) + W(\zeta), V(\varepsilon\zeta))$$

$$\text{と} \quad -q_1(\zeta, \varepsilon) = f_u(U(\varepsilon\zeta) + W(\zeta), V(\varepsilon\zeta)) - f_u(U(0) + W(\zeta), V(0)),$$

$$-q_0(\zeta) = f_u(U(0) + W(\zeta), V(0)) - f_u(U(0), V(0)), \quad -\gamma_0^2 = f_u(U(0), V(0))$$

$$\text{と} \quad f_u(U(\varepsilon\zeta) + W(\zeta), V(\varepsilon\zeta)) = -\gamma_0^2 - q_1(\zeta, \varepsilon) - q_0(\zeta) \text{ と} \quad \text{なる。}$$

Lemma A.

ある $\varepsilon_0 > 0$ が存在して、任意の ε ($0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$) に対して、

$$(1) \quad -\gamma^2 \equiv -\gamma_0^2 - q_1(\zeta, \varepsilon) \leq -\delta_0^2 < 0, \quad \text{ここで} \quad \delta_0 \text{ は} \quad \varepsilon \text{ に} \quad \text{関して} \quad \text{独}$$

立である。

$$(2) \quad \frac{dq_1}{d\zeta} = O(\varepsilon).$$

$$(3) \quad q_0 = O(e^{\tau\zeta}).$$

が成り立つ。但し $\tau \geq 0$ 。

$f_u(U(0) + W(\zeta), V(0)) = -\gamma_0^2 - q_0(\zeta)$ に注意して、 $L_0 \varepsilon$

$$(7.6) \quad L_0 = \frac{d^2}{d\zeta^2} + c \frac{d}{d\zeta} + f_u(U(0) + W(\zeta), V(0))$$

で定義する。問題 $L_\varepsilon v_\varepsilon = k$, $v_\varepsilon(0) = 0$, $v_\varepsilon(+\infty) = 0$ と $u_\varepsilon = {}^t(v_\varepsilon, \frac{dv_\varepsilon}{d\zeta})$

と置いて、1階の方程式系に書き直すと、 $L_\varepsilon v_\varepsilon = k$ は

$$(7.7)_\varepsilon \quad \frac{du_\varepsilon}{d\zeta} = A_\varepsilon u_\varepsilon + B_0 u_\varepsilon + f$$

となる。ここで $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \gamma^2 & c \end{pmatrix}$, $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ q_0 & 0 \end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ である。

$\gamma^2 \geq \delta_0^2 > 0$ に注意すると、ある正則行列 P_ε が存在して P_ε^{-1}

$A_\varepsilon P_\varepsilon = \Lambda_\varepsilon$ diagonal とできる。変数変換 $u_\varepsilon = P_\varepsilon w_\varepsilon$ により (7.7)

$$(7.8)_\varepsilon \quad \frac{dw_\varepsilon}{d\zeta} = \Lambda_\varepsilon w_\varepsilon + P_\varepsilon^{-1} (B_0 P_\varepsilon + \frac{dP_\varepsilon}{d\zeta}) w_\varepsilon + P_\varepsilon^{-1} f, \quad (w_\varepsilon = {}^t(w_{1\varepsilon}, w_{2\varepsilon}))$$

と書ける。ここで $\Lambda_\varepsilon = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$ $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ である。

$(7.8)_\varepsilon$ を境界条件 $(7.9)_\varepsilon$ $w_\varepsilon(0) = \alpha, w_\varepsilon(+\infty) = 0$ の下で考える。

Lemma B

任意の $f \in (X_p)^2$ に対して, $(7.8)_0(7.9)_0$ の解 $w_0 \in (X_p^1)^2$ が唯一
つ存在して, $\|w_0\|_{(X_p^1)^2} \leq C \|f\|_{(X_p)^2}$ が成り立つ。

$K_\varepsilon \equiv \frac{d}{d\varepsilon} - \Lambda_\varepsilon$ が境界条件 $(7.9)_\varepsilon$ の下で ε に依りて一様に有
界な逆作用素 $K_\varepsilon^{-1}: (X_p)^2 \rightarrow (X_p^1)^2$ を持つことに注意して $(7.8)_\varepsilon$
 $(7.9)_\varepsilon$ を積分方程式で表わすと

$$\begin{aligned} (7.10) \quad w_\varepsilon &= K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon w_\varepsilon + K_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon^{-1} f \\ &= K_0^{-1} D_0 w_\varepsilon + (K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon - K_0^{-1} D_0) w_\varepsilon + K_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon^{-1} f \end{aligned}$$

と表わす。ここで $D_\varepsilon = P_\varepsilon^{-1} (B_0 P_\varepsilon + \frac{dP_\varepsilon}{d\varepsilon})$, $D_0 = P_0^{-1} B_0 P_0$ である。

この両辺に再び K_0 を作用させると

$$(7.11) \quad \frac{d}{d\varepsilon} w_\varepsilon = (\Lambda_0 + D_0) w_\varepsilon + K_0 (K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon - K_0^{-1} D_0) w_\varepsilon + K_0 K_\varepsilon^{-1} P_\varepsilon^{-1} f$$

が得られる。

Lemma C

十分小さい $\varepsilon_0 > 0$ が存在して, 任意の ε ($0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$) に対し
て, $\|K_0 (K_\varepsilon^{-1} D_\varepsilon - K_0^{-1} D_0)\|_{(X_p)^2 \rightarrow (X_p)^2} = O(\varepsilon)$ が成り立つ。

Lemma B と C を合せて (7.10) が $(X_p)^2$ から $(X_p)^2$ への縮小写像
になることがわかり, 変数 ε に戻すことにより Lemma 5 が
成り立つ。

References

- [1] Aronson, D. G., Weinberger, H. F. Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve propagation, Lec. notes in Math., No 446, Springer, Berlin (1975).
- [2] Fife, P. C. Boundary and interior transition layer phenomena for pairs of second-order differential equations, J. Math. Anal. Appl., 54, 497-521 (1976).
- [3] Fife, P. C. Asymptotic analysis of reaction-diffusion wave fronts, Rocky Mt. J. Math., 7, 389-415 (1977).
- [4] Fife, P. C. Asymptotic states for equations of reaction and diffusion, Bull. Amer. Math. Soc., 84, 5, 693-726 (1978).
- [5] Fife, P. C. Mathematical aspects of reacting and diffusing systems, Lec. Notes in Biomath., 28, Springer, Berlin, (1979).
- [6] Fife, P. C., McLeod, J. B. The approach of nonlinear diffusion equations to travelling wave solutions, Bull. Amer. Math. Soc., 81, 1075-1078 (1975).
- [7] Fife, P. C. Singular perturbation and wave front techniques in reaction-diffusion problems, SIAM-AMS Proceedings, 10, 23-49 (1976).
- [8] Gardner, R. Private communication.
- [9] Hosono, Y., Mimura, M. Singular perturbations for pairs of two-point boundary value problems of Neumann type, Lec. Notes in Num. Appl. Anal., 2, 79-138 (1980).
- [10] Mimura, M., Tabata, M., Hosono, Y. Multiple solutions of two-point boundary value problems of Neumann type with a small parameter, to appear in SIAM J. Math. Anal.