

非可換接続と超対称性

信州大学理学部 浅田 明

(Akira Asada)

§ 1. 通常の接続

有限次元 Lie 群を構造群とする fibre bundle の接続については、[9] 等良書が多いが、ここでは後で便利な様式、普通とは少し違った形で解説する。

M を C^∞ -級関数による 1 の分割を持つ多様体 (Hilbert 多様体なら良い), $\omega = \{\omega_{uv}\}$ を M 上の G -bundle とする. G は簡単の爲 $GL(n, \mathbb{C})$ 又は $U(n)$ とし, G の Lie 環を $\mathfrak{g}$ と書く. 次の問題を考える.

問題 M の外微分 d を ω の cross-section に働く様 lift せよ.

$d\omega_{uv} \neq 0$ の時, この問題はそのままでは解けない. そこで d に低階摂動 θ_u を加える. θ_u は U 上の 0 階微分作用素として, $\mathfrak{g}$ に値を取る 1-形式とする ($d(\theta \wedge \cdot) = d\theta \wedge \cdot + \theta \wedge d\cdot$ と計算する).

定義 U 上の $\mathfrak{g}$ に値を取る 1-形式の集まり $\{\theta_u\}$ が

$$(1) \quad (d + \theta_u) g_{uv} = g_{uv} (d + \theta_v)$$

を満たす時 $\{\theta_u\}$ を (3) $\{g_{uv}\}$ の接続 (形式) と言う.

$$\omega_{uv} = g_{uv}^{-1} d g_{uv} \text{ とすれば}$$

$$(2) \quad \omega_{vw} - \omega_{uw} + g_{vw}^{-1} \omega_{uv} g_{vw} = 0$$

となる事から 1 の分割を使って接続の存在を解る. $\{\theta_u\}$ が $\{g_{uv}\}$ の接続なら $\{h_u\}$ による $\{\theta_u\}$ の gauge 変換 $\{h_u^{-1} \theta_u h_u + h_u^{-1} d h_u\}$ が $\{h_u^{-1} g_{uv} h_v\}$ の接続になる. 又 $\{\theta_u\}$, $\{\theta'_u\}$ が $\{g_{uv}\}$ の接続なら, $\theta'_u = \theta_u + \eta_u$ と置いて, $\eta_v = g_{uv}^{-1} \eta_u g_{uv}$ となるから, 接続の全体は affine 空間になる.

もしが単連結の時, $\theta_u = h_u^{-1} d h_u$ と書ける為の必要十分条件は $d\theta_u + \theta_u \wedge \theta_u = 0$ であり, $\theta_u = h_u^{-1} d h_u$ と書ければ $h_u g_{uv} h_v^{-1}$ は定数になる. 従って M は flat で M の基本群の G への表現から待たれる.

定義 $\Theta_u = d\theta_u + \theta_u \wedge \theta_u$ と置き $\{\Theta_u\}$ を $\{\theta_u\}$ の曲率と呼ぶ.

曲率は次の性質を持つ.

$$(i) \quad \Theta_v = g_{uv}^{-1} \Theta_u g_{uv}$$

$$(ii) \quad d\Theta_u + [\theta_u, \Theta_u] = 0, \quad [\theta, \Theta] = \theta \wedge \Theta - \Theta \wedge \theta$$

(iii) $\text{tr}(\Theta_u^p)$ は M 上の偶 $2p$ -形式で, その de Rham 類は M だけで定まり M の接続の取り方によらない.

(i), (ii) は一般の Lie 群で成立し, (ii) は Bianchi 恒等式と呼ばれている. (iii) は $G = GL(n, \mathbb{C})$ 又は $U(n)$ の時成立し

Chern の定理 (の前半) である. 尚曲率が 0 となる接続 $\{\theta_u\}$ に対し $\text{tr}(\theta_u^{2p+1})$ を考へる事も重要である ([3], [3]').

以上の説明は [12] での Yang-Mills 場の導入と同じで, [1], [2] での微分作用素の cross-section への lift も同じ考へに基づいてゐる.

§ 2. 無限次元群を構造群とする bundle の接続

$\xi = \{\theta_{uv}\}$ を M 上の G -bundle, X を多様体とする時

$$(\theta_{uv}^X(f))(x) = \theta_{uv}(f(x)), \quad x \in X,$$

として, $\xi^X = \{\theta_{uv}^X\}$ と置けば $\text{Map}(X, M)$ 上の $\text{Map}(X, G)$ -bundle が得られる. 特に ξ が M の接 bundle なら ξ^X は $\text{Map}(X, M)$ の接 bundle になる. $\text{Map}(X, M)$ で写像を Sobolev p -級 ($p \geq \dim X/2$) に取れば Hilbert 多様体となるが, Kuiper の定理 ([10]) から, Hilbert bundle は構造群を unitary 作用素全体の群等にとると trivial になるから, 構造群を小さく取る必要がある. 上記の事は, $\text{Map}(X, M)$ の接 bundle の自然な構造群は $\text{Map}(X, G)$ である事を示している.

次に $\xi = \{\theta_{uv}\}$ を M 上の $\text{Map}(X, G)$ -bundle とすれば

$$\theta_{uv}^h(m, x) = (\theta_{uv}(m))(x), \quad m \in M, x \in X,$$

として, $M \times X$ 上の G -bundle $\xi^h = \{\theta_{uv}^h\}$ が得られる. ここで ξ の接続と ξ^h の接続との関係を調べる.

きの接続は U 上の $\text{Map}(X, \mathfrak{g})$ に値を取る 1-形式 $\{\theta_u\}$ である。
局所座標を使って $\theta_u = \sum \theta_{u,i} dm_i$ と置き $\theta_u^h = \sum \theta_{u,i}^h dm_i$ とすれば、接続の定義から

$$(g_{uv}^h)^{-1} d^M g_{uv}^h = \theta_v^h - (g_{uv}^h)^{-1} \theta_u^h g_{uv}^h$$

である。但し d^M は $M \times X$ の、 M -方向の外微分である。 $\mathfrak{g}^h$ の接続 $\{A_u^h\}$ を $A_u = \sum A_{u,i} dm_i + \sum A_{u,j} dx_j$ と書いて、 $A_u^M = \sum A_{u,i} dm_i$, $A_u^X = \sum A_{u,j} dx_j$ とすれば

$$(g_{uv}^h)^{-1} d^M g_{uv}^h = A_v^M - (g_{uv}^h)^{-1} A_u^M g_{uv}^h,$$

$$(g_{uv}^h)^{-1} d^X g_{uv}^h = A_v^X - (g_{uv}^h)^{-1} A_u^X g_{uv}^h,$$

だから、 $\{\theta_u\}$ から得られる情報は、 $\{A_u^X\}$ から得られるべき情報が不足している。実際 $X = S^1$ の場合の特弦理論 (string 説) で最も困難だったのは、この失われた部分を恢復する事であった ([3], [3]')。[3] での議論は、古典論的に $\{A_u^X\}$ の情報を恢復する事だったが、これをそのまま高次元の X に拡張するのは難しい様である。これに対し、一般の X に対し量子論的に $\{A_u^X\}$ の情報を恢復するのが非可換接続である。

§ 3 群 GL_p と U_p 及び Connes の量子化微分形式

$\mathcal{H}$ を polarization $\varepsilon = P_+ - P_-$ を持つ可分な Hilbert 空間とする。ここで P_+ , P_- は射影作用素で $P_+ \cdot P_- = 0$, $P_+ + P_- = I$ (恒等作用素), $P_+ \mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $P_- \mathcal{H} = \mathcal{H}_-$ とすれば $\mathcal{H}_+ \cong \mathcal{H}_-$

である. 具体的には X を compact spin 多様体, $\mathcal{H}$ をその上の (vector 値) spinor 場を作る Hilbert 空間, D を Dirac 作用素 (必要なら質量項を加えて 0-mode はないとする) とした時 $\varepsilon = |D|^{-1} D$ と取る.

$\mathcal{H}$ の有界線形作用素全体の作る環を $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, その中で逆を持つ元全体の作る群を $GL(\mathcal{H})$ とする. Kuiper の定理 ([10]) から $GL(\mathcal{H})$ は可縮である.

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ は non-trivial な ideal を持ち, その構造は Calkin によって決定されている ([15], § 2). T が $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal に属すれば T は compact 作用素で $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{\phi_n\}, \{\psi_n\}$ があって $T = \sum \mu_n(\cdot, \psi_n) \phi_n$ と本質的に一意に与える. ここで $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq 0$ は T の特異値である. 特異値については Horn の不等式 ([15], 定理 1.13)

$$\prod \mu_n(TS) \leq \prod \mu_n(T) \mu_n(S)$$

が成立する. T を compact 作用素とする時

$$I_p = \{T \mid \sum \mu_n(T)^p < \infty\}, \quad p \geq 0$$

と置けば I_p は $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の ideal で p -次 Schatten ideal と呼ばれる. $p \geq 1$ であれば I_p は ℓ^p -型の norm が入り Banach 空間になるが $p > 0$ でも ℓ^p -型 norm について

$$\|T+S\|_p \leq 2^{1/p} (\|T\|_p + \|S\|_p)$$

が成立するから位相が入り, Horn の不等式から

$$(3) \quad I_p^k = I_{p/k}$$

が成立する. 尚 I_0 は $B(\mathcal{H})$ の最小の ideal である.

定義 $GL(\mathcal{H})$ の部分群 GL_p , U_p , $p \geq 0$ を

$$GL_p = \{T \in GL(\mathcal{H}) \mid [\varepsilon, T] = \varepsilon T - T\varepsilon \in I_p\},$$

$$U_p = \{T \in GL_p, T \text{ は unitary 作用素}\}$$

で定義する.

定理 ([11]) X が d -次元 compact spin 多様体, $\mathcal{H}$ は G の表現空間に値を取る spinor 場の作る Hilbert 空間, $\varepsilon = |\mathbf{D}|^{-1} \mathbf{D}$ とすれば $\text{Map}(X, G) \subset GL_p$, $p \geq d/2$, である. 特に G が unitary 群 (の部分群) であれば $\text{Map}(X, G) \subset U_p$ となる.

$p = 1$ の時 GL_{res} だが $p > 1$ の場合については [7], [11] 等で研究されている.

最後に次の Connes による定理を引用しておく.

定理 ([6]) X を次元が 2 以上の spin^c 多様体, $\mathcal{H}$, ε は上と同じとする. $\mathcal{A}$, A^1 は X の C^∞ -関数及 1-形式の空間, $\Omega^1 = \{\sum a[\varepsilon, b], a, b \in \mathcal{A}\}$ とすれば $C(i[\varepsilon, a]) = da$ となる Ω^1 から A^1 への $\mathcal{A}$ -module map が一意的に存在する.

この事から Connes は $\sum a[\varepsilon, b]$ の形の $B(\mathcal{H})$ の (実際は I_p , $p > d/2$, の) 元を量子化 1-形式と呼んでいる. $\Omega^1 \subset I_p$ から I_p^k の元は量子化 k -形式の類だが, ε からきまる超対称性から $2k-1$ -形式と $2k$ -形式と思っただけの方が良い様である.

§4 非可換接続

Kuiper の定理 ([10]) から次の補題が成り立つ.

補題 $\xi = \{g_{uv}\}$ を GL_p -bundle とする. U_p に属する polarization の値を取る U 上の関数の集まり $\{\varepsilon_u\}$ があって

$$\varepsilon_u g_{uv} = g_{uv} \varepsilon_v$$

となれば ξ は trivial である.

この補題から, ε を ξ の fibre $\mathcal{K}$ に global に定義することは一般には出来ない. そこで §1 と同様に次の様に定義する.

定義 U から I_p への関数の集まり $\{K_u\}$ が

$$(4) \quad (\varepsilon + K_u) g_{uv} = g_{uv} (\varepsilon + K_v)$$

をみたす時 $\{K_u\}$ を $\xi = \{g_{uv}\}$ の非可換接続と呼ぶ.

ξ の底多様体 M が Riemann 多様体の時, この定義は非可換微分幾何での定義と一致する ([5], [6], [13], [14]).

通常の場合と同様に $\omega_{uv} = g_{uv}^{-1} [\varepsilon, g_{uv}]$ と置くと

$$\omega_{vw} - \omega_{uw} + g_{vw}^{-1} \omega_{uv} g_{vw} = 0$$

となるから (1 の分割を使って) 非可換接続の存在が解る.

又非可換 gauge 変換 $h(K)$ は

$$h(K) = h^{-1} K h + h^{-1} [\varepsilon, h]$$

で, 例えば $\{K_u\}$ が $\{g_{uv}\}$ の非可換接続なら $\{h_u(K_u)\}$ が

$\{h_u^{-1} g_{uv} h_v\}$ の非可換接続になる.

定義 $K_u = \varepsilon K_u + K_u \varepsilon + K_u^2$ ($= (\varepsilon + K_u)^2 - \varepsilon^2$) と置き, $\{K_u\} \in$

$\{K_u\}$ の (非可換) 曲率と呼ぶ.

通常 の 曲率 と 同様 に

$$K_v = g_{uv}^{-1} K_u g_{uv}, \quad (\varepsilon + K_u) K_u = K_u (\varepsilon + K_u)$$

が 成 り 立 つ が 更 に 次の 定 理 が 成 立 す る .

定 理 $\mathcal{E}$ は U_p -bundle, $\mathcal{E}$ の 非 可 換 曲 率 が Hermitian 作用素 である と す る . $(I + K_u(x))$ が す べ て の $x \in M$ に つ い て 逆 を 持 てる ば , $\mathcal{E}$ は trivial である .

定 理 $p > 2 > 0$ と す る . 上 と 同 じ 仮 定 で $K_u(x) \in I_q$ であ れ ば $\mathcal{E}$ は U_q -bundle と 同 値 である .

始 め の 定 理 は GL_p -bundle でも 正 し い と 思 は れ る が , 後の 定 理 の 証 明 に は 摂 動 論 の Rellich の 定 理 ([8]) を 使 う の で , GL_p -bundle でも 正 し い か は 解 ら ない .

$K_u(x) \in I_p$ だ か ら $I + K_u(x)$ に は regularized determinant $\det_p$ が 定 義 出 来 る ([7], [8], [15]) . こ れ に つ い て

$$(5) \quad \det_p (I + K_u(x)) = \det_p (I + K_v(x)), \quad x \in U \cap V$$

だ か ら M 上 の 関 数 が 得 ら れ , この 関 数 の 零 点 (因 子) が $\mathcal{E}$ を 決 定 す る 筈 だ が , ま だ 解 っ て い ない .

§ 5 量子化 ghost 場 の cohomology

$g \in GL_p$ の $T \in \mathcal{B}(V)$ へ の 作 用 を $g(T) = g^{-1} T g$ と し , I_p^k を fibre と す る $\mathcal{E}$ の associate bundle を $\mathcal{E}_{I_p^k}$,

$$\xi_{I_p}(k) = \xi_{I_p, k} / \xi_{I_p, k+1},$$

とする. $\xi_{I_p}^{(k)}$ の cross-section は $\xi_{I_p, k}$ の cross-section を $\text{mod. } I_p^{k+1}$ で考えたものとし, その germ の層を $C_d(\xi_{I_p}(k))$ と書く. 非可換接続が存在する事から

$$\delta_{\pm}: C_d(\xi_{I_p}(k)) \rightarrow C_d(\xi_{I_p}(k)), \quad \delta_{\pm} T = \varepsilon T \pm T \varepsilon,$$

が定義出来

$$\delta_{\pm} \delta_{\mp} = 0, \quad \delta_{\pm} T = 0 \text{ なら local に } T = \delta_{\mp} S,$$

である. $\xi_{I_p}(k)$ の cross-section は M 上の (ghost 数 $2k-1$, $2k$ の) ghost 場の Connes の意味での量子化と思える ([4]). $\xi_{I_p}(k)$ には ε で超対称性が入り, $\delta_{\pm}$ はそれぞれ even, 及び odd の微分 (の量子化) である.

定義 上記の記号で次の cohomology 群を定義する.

$$H^{2k-1}(M, \xi_{I_p}) = H^0(M, \delta_- C_d(\xi_{I_p}(k))) / \delta_- H^0(M, C_d(\xi_{I_p}(k))),$$

$$H^{2k}(M, \xi_{I_p}) = H^0(M, \delta_+ C_d(\xi_{I_p}(k))) / \delta_+ H^0(M, C_d(\xi_{I_p}(k))).$$

定理 $\xi_{I_p}(k)$ が trivial なら $H^{2k-1}(M, \xi_{I_p}) = H^{2k}(M, \xi_{I_p}) = \{0\}$.

$k \geq p$ なら I_p^k の元に trace が定義出来るが, この値は I_p^{k+1} の元による摂動で変るから $C_d(\xi_{I_p}(k))$ の元に対して trace は定義出来ない. T が Hermite 作用素で $T \in I_p^k$ の時, T の η -関数 η_T を

$$\eta_T(s) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(T)} \text{sgn } \lambda |\lambda|^s$$

で定義すれば η_T は $\text{Re } s \geq p/k$ で正則である. もし η_T が,

$\text{Res} > P/(k+1)$ を解析接続すれば, η_T の $P/k \geq \text{Res} > P/(k+1)$ での極とよこでの留数は I_p^{kH} の元による移動で不変だから, η -留数を用いて, 上記の cohomology をもう少し計算しやすく変形出来る可能性がある.

§6 非可換 Chern 類

定理 ξ を GL_p -bundle, $\{K_u\}$ を ξ の非可換曲率とすれば任意の自然数 k について $\{K_u^k\} \in H^0(M, \delta + C_d(\xi_{I_p}(k)))$ であり, ξ の $H^{2k}(M, \xi_{I_p})$ での class は ξ で定まり, 非可換接続の取り方によらない.

定義 $\{K_u^k\}$ の定める $H^{2k}(M, \xi_{I_p})$ の元を ξ の (I_p に関する) k -次非可換 Chern 類と呼び $C^k_{I_p}(\xi)$ と書く.

定理 ξ を U_p -bundle とする. $C^k_{I_p}(\xi) = 0$ であれば, ξ は $U^{kp/(kH)}_p$ -bundle と同値である. 逆も正しい.

この定理から U_p -bundle については, $C^k_{I_p}(\xi) = 0$ であれば $C^m_{I_p}(\xi) = 0$, $m > k$, となるが, この事は GL_p -bundle でも正しい.

$p = p_0$ とし, $C^{k-1}_{I_p}(\xi) \neq 0$, $C^k_{I_p}(\xi) = 0$ となる k が存在した時 $p_1 = kp/(k+1)$, その様な k が存在しなければ $p_1 = p_0$ とする. $p_1 < p_0$ の時 $C^k_{I_{p_1}}(\xi)$ が定義出来るから同様の手続で, $p_2, p_3, \dots$, がきめられる. 定義から

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_m$, $\{p_0, p_1, \dots\}$ が有限数列の時,

$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p_\infty$, $\{p_0, p_1, \dots\}$ が無限数列の時

のいずれかが成立する. ここで U_p -bundle ξ に対し

$$\nu(\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} p_n$$

と置く.

定理 (i) $\nu(\xi) = p_m$ であれば ξ は U_{p_m} -bundle と同値で, $\nu < p_m$ なら U_ν -bundle とは同値にならない.

(ii) $\nu(\xi) = p_\infty$ であり, $p_\infty \neq 0$ ならば U_{p_∞} -bundle とは同値にならず, $\nu > p_\infty$ であれば U_ν -bundle とは同値になる.

U_p の stable homotopy 型は p に関係しないから, これ等の結果は非可換 Chern 類が homotopy 不変ではない事を示している.

$\nu(\xi)$ を定義から計算するのは難しい様だが, ξ の非可換曲率 $\{K_u\}$ の η -関数 η_{K_u} は, η -関数の定義から

$$\eta_{K_{u \cap v}} = \eta_{K_{v \cap u}}, \quad x \in U \cap V$$

となるから, $M \times \mathbb{C}$ (の領域) 上の関数 $\eta_K = (\eta_K(x))(s)$ が定義出来る. この時

$$\mu(\eta_K(x)) = \inf \{ \sigma \mid \eta_K(x)(s) \text{ は } \operatorname{Re} s > \sigma \text{ で正則} \}$$

$$\mu(K) = \sup_{x \in M} \mu(\eta_K(x))$$

と置けば

$$\rho \geq \mu(K) \geq \nu(\xi)$$

である。従って K の η -関数から $\nu(\xi)$ の評価が出来る。特に ξ が $\text{Map}(X, G)$ -bundle であれば、§2 の記号で ξ の非可換接続として、 $\{A_\mu^X\}$ の Connes の意味での量子化が取れる。この場合非可換曲率は $(X$ の) -1 階の擬微分作用素だから、これが(準)楕円型になれば、 $\eta_K(x)$ は全平面で有理型で $\mu(\eta_K(x))$ はその最初の極の位置の実数部分である。この時次の事が成り立たないか問題になる。

$$(i) \quad \mu(K) = \nu(\xi)$$

$$(ii) \quad \mu(K) \text{ が最大値として実現せれば } \nu(\xi) = \rho_\infty \text{ で}$$

逆も正しい。

いずれにしても $\eta_K(x)$ の最初の極の位置とそこでの留数が ξ の幾何学的性質と深く関係している事は確実で、その解明は今後の課題である。

文献

- [1] Andersson, S. I.: Vector bundle connections and lifting of partial differential operators, Lect. Notes in Math., 905 (1980), 119 - 132.
- [2] Asada, A.: Connections of differential operators, J. Fac. Sci. Shinsu Univ., 13 (1978), 87 - 102.

- [3] Asada, A.: Characteristic classes of loop group bundles and generalized string classes, Differential Geometry and Its Applications, North Holland, 1992, 33-66.
- [3]' Asada, A.: 等長群入門, 横浜国立大学論叢 43-1 (1992)
- [4] Baulieu, L.: Chern-Simons three-dimensional and Yang-Mills-Higgs two-dimensional systems as four-dimensional topological quantum field theories, Phys. Lett. B 232 (1989), 473-478.
- [5] Coquereaux, R.: Noncommutative geometry and theoretical physics, J. Geo. Phys., 6 (1989), 425-490.
- [6] Connes, A.: The action functional in non-commutative geometry, Commun. Math. Phys. 117 (1988), 673-683.
- [7] Fujii, K.-Tanaka, M.: Universal Schwinger cocycles of current algebra in $(D+1)$ -dimensions, Geometry and Physics, Commun. Math. Phys., 129 (1990), 267-280.
- [8] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators, Springer, 1980.
- [9] 小林昭七: 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1989.
- [10] Kuiper, N.H.: The homotopy type of the unitary group of Hilbert space, Topology 3 (1965), 19-30.
- [11] Mickelsson, J.-Rajeev, S.G.: Current algebras in $D+1$ -dimensions and determinant bundles over infinite-dimensional Grassmannians, Commun. Math. Phys., 116 (1988), 365-400.

- [12] 宮地良彦.: 私の物理学遍歴 私家版, 1991.
- [13] Rajeen, S.G.: Universal gauge theory, Phys. Rev. D 42 (1990) 2279-2291.
- [14] Scheck, F.: Anomalies, Weinberg angle and a noncommutative geometric description of the standard model, Phys. Lett. B 284 (1992) 303-308.
- [15] Simon, B.: Trace Ideals and Their Applications, London Math. Soc. Lect. Notes 35, 1979.