

確率的要素を考慮したネットワークデザイン問題 とその費用配分について

早稲田大学・商学部 毛利 裕昭 (Hiroaki Mohri)

School of Commerce,
Waseda University.

1 はじめに

本稿は、確率過程（待ち行列過程）を考慮したネットワークデザイン問題の最適化に対して従来の研究を踏まえた上での最適解アルゴリズムの指針を与え、この問題のアプリケーションで想定される費用配分問題についてのベターな解決案を示すことが目的である。

ネットワークデザイン問題は、あるグラフ上にネットワークをどう構築するか、つまり主としてアークの敷設場所を論じる問題である。そのバリエーションはネットワーク上を流れるフローを含めた最適化をはじめ数多くある。工学的応用も、コンピュータや通信ネットワーク、交通網ネットワーク、ロジスティクスネットワーク、ガス・電力ネットワーク、航空ネットワークと枚挙に暇がない。

ベーシックなネットワークデザイン問題については、Wynants [8] が 2001 年に刊行した著作にこれまでの研究動向がまとめられている。しかし、本稿で述べるような待ち行列はベーシックな考慮事項ではないため含まれていない。ところで、ネットワークデザイン問題における待ち行列の考慮は決して目新しいものではなく 1970 年代には問題提示がなされている。系内滞在時間を最小にするタイプのものでは 1973 年の Fratta et.al [3] がある。一方、系内滞在時間を制約条件にした問題は、1977 年に Gerla and Kleinrock [5] によって提示されている。本稿では、Gavish and Altinkemer [4] が 1990 年に示したアークのデザイン費用、ルーティング費用、系内滞在時間を費用換算した費用を目的関数に取り込んだモデルを土台として最適解を求める方法を提示しネットワーク全体の費用配分を考える。

さらに、費用配分に一般的に用いられる協力ゲームの枠組みを考慮しつつ費用配分解についての方向性を示す。このモデルでの費用配分とは、提携値（特性関数値）を計算することが上記の最適化問題の最適値を計算することとなる問題である。この費用配分ゲームの解を求めるための困難さはゲームの元になる最適化問題の構造に大きく依存する。待ち行列を考慮しない最適化問題でさえも、組合せ最適化問題が計算の複雑性の理論での NP-hard な問題となり、解自身や解の特性を調べるのに大きな困難がともなう可能性があることはいうまでもない。プレイヤーの数が n であるとする、伝統的な協力ゲームの解である Shapley 値、仁、カーネルなどを求めるためには特性関数値を $2^n - 1$ 回求めなくてはならない。待ち行列の要素が加わることで目的関数に非線形性が持ち込まれ一層の困難さを伴う問題となる。これらの困難をできるかぎり回避する解決案を示す。

2 記号

N	ノード集合
A	アーク集合
$G(N, A)$	グラフ
K	品種集合, $K \subseteq N \times N$
L	アークのタイプ集合
C_{ij}^l	アーク (i, j) の l タイプでのアーク容量
D	時間の費用換算係数
P^k	品種 k の取りうるパスの集合
δ_{ijp}^k	品種 k のパス p がアーク (i, j) を含む時 1, それ以外の時 0
c_{ij}	アーク (i, j) の単位ルーティング (フロー) 費用
f_{ij}^l	アーク (i, j) に l タイプのアークを利用した時のデザイン (敷設) 費用
x_{ij}	アーク (i, j) のフロー量変数, ベクトル表現 $\mathbf{x}$
y_{ij}^l	アーク (i, j) のデザイン変数, ベクトル表現 $\mathbf{y}$
z_p^k	品種 k のパス p におけるフロー量, ベクトル表現 $\mathbf{z}$
ρ_{ij}	アーク (i, j) の利用率変数 $(x_{ij} / \sum_{l \in L} C_{ij}^l y_{ij}^l)$, ベクトル表現 ρ

3 ネットワークデザイン問題における系内滞在時間の考え方

待ち行列をネットワーク上で直感的に考えると, 各ノード上でバッファを考えた待ち行列ネットワークを思い浮かべるのが一般的であろう. 待ち行列ネットワークに関しては様々な研究がなされている. ここでは, 基本となるネットワークデザイン問題をベースにして考えるため, 直感的取り扱いを行わない. 問題を解く上で, 恣意的ではあるがノードではなくアークでのフローの系内滞在時間として捉え直すのである. 尚, M/M/1 の場合だけを考慮する. 上記の記号によって系内滞在時間を表現するとアーク (i, j) での系内滞在時間は, $x_{ij} / (C_{ij} - x_{ij})$ と表現される.

4 定式化

4.1 定式化 1

ここでは, 解釈のし易い形での定式化を記述する.

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \frac{D x_{ij}}{\sum_{l \in L} C_{ij}^l y_{ij}^l - x_{ij}} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{l \in L} f_{ij}^l y_{ij}^l \quad (1)$$

subject to

$$\sum_{p \in P^k} z_p^k = d^k \quad \forall k \in K \quad (2)$$

$$x_{ij} = \sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^k z_p^k \quad \forall (i, j) \in A \quad (3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq \sum_{l \in L} C_{ij}^l y_{ij}^l \quad \forall (i, j) \in A \quad (4)$$

$$\sum_{l \in L} y_{ij}^l = 1 \quad \forall (i, j) \in A \quad (5)$$

$$z_p^k \geq 0 \quad \forall p \in P^k, \forall k \in K \quad (6)$$

$$y_{ij}^l \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A, \forall l \in L \quad (7)$$

(2) は、各品種の需要が満たされることを示す。(3) は、アーク上のフロー量と品種が利用するパス上のフローの変換式である。(4) は、アーク上のフロー量が、使用するアークのタイプの容量以下であることを示す。

4.2 定式化 2

定式化 1 は直感的にはわかり易いという利点をもつが、 ρ_{ij} を用いることにより解法に結びついた定式化を行うことができる。

$$\min \sum_{(i,j) \in A} \frac{D\rho_{ij}}{1 - \rho_{ij}} + \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} + \sum_{(i,j) \in A} \sum_{l \in L} f_{ij}^l y_{ij}^l \quad (8)$$

subject to

$$\sum_{k \in K} \sum_{p \in P^k} \delta_{ij}^k z_p^k \leq \sum_{l \in L} C_{ij}^l y_{ij}^l \rho_{ij} \quad \forall (i, j) \in A \quad (9)$$

$$0 \leq \rho_{ij} \leq 1 \quad \forall (i, j) \in A \quad (10)$$

(2), (5)~(7)

5 最適化問題の解法の概略

5.1 アルゴリズムの基本的方針

ここでは、最適化問題の解法として Lagrange 緩和を用いた分枝限定法提案する。Lagrange 緩和問題の諸性質については後の節で記述する。各分枝ノードで Lagrange 緩和のみを求めている場合には分枝限定法がうまく機能しないことが考えられる。そこで、Lagrange 緩和から実行可能解を求める方法を考えなければならない。Gavish and Altinkemer [4] にもある種の貪欲解法によって実行可能解を得る方法が示されている。一方、組み合わせ最適化問題においては近年タブーサーチが、精度のよい解を求める方法として注目されている。タブーサーチをこの問題用に設計し実行可能解を得てそれを利用する方法も考えられる。

5.2 Lagrange 緩和問題の性質

定式化 2 の (9) を Lagrange 緩和する問題を考える。これは以下の問題に分解できる。

- デザイン変数 y と利用率変数 ρ に関する問題。これはさらにアーク (i, j) ごとに分解することができる。その問題を $\text{LPND1}(y, \rho, (i, j))$ とする。
- フロー変数 z に関する問題。これはさらに品種ごとに分解することができる。その問題を $\text{LPND2}(z, k)$ とする。

$\text{LPND1}(y, \rho, (i, j))$ は、 y_{ij}^l を 1 つだけ 1 に固定し他を 0 とした問題が ρ_{ij} の凸最小化問題となるので容易に解くことが可能である。一方、 $\text{LPND2}(z, k)$ は最短経路問題となりこれも容易に解くことができる。

6 費用配分問題

6.1 伝統的なゲーム理論の解の問題点

この問題を元にした費用配分問題についてゲーム理論の言葉を使って表現すると

- プレイヤーは各品種 $k \in K$
- 提携値は、提携した品種集合 $K' (\subseteq K, K' \neq \emptyset)$ の問題で元問題を縮約した問題を解いたときの最適値

本稿の第一章でも述べたことであるが、伝統的ゲーム理論の解の利用の困難さは以下のことに起因している。

- Shapley 値やカーネル、仁などの伝統的ゲーム理論の解ではすべての提携に関して提携値を計算する必要がある。つまり、プレイヤーの増大にしたがって提携値を計算する回数は指数的に増大する。
- 元問題自身に計算量の理論での多項式オーダーで計算できるといった「よい性質」がない。

本稿で対象としているネットワークデザイン問題は、工学的応用から考えればプレイヤーの数が少数でない場合が一般的であると考えられる。すると計算量の問題をどのように克服するかが問題となる。

6.2 プリミティブな費用配分解

まず、第一段階として以下のような方針で費用配分を考える。

- 全ての提携値を利用するような解を求めることはあきらめる

- 少なくとも，全体合理性，個人合理性を満たす解，つまりゲーム理論での「配分」となる解を求めることを考える
- 全体提携値 $\nu(K)$ と各プレイヤーのみで必要なネットワークを形成した場合の値 $\nu(\{k\}) \forall k \in K$ をのみを利用する（ここで， $\nu(K')$ はプレイヤー提携集合 K' の提携値を示すものとする）

全体合理性，個人合理性を満たすような解とは，以下の線形計画問題を解いたときに目的関数値 $w = 0$ である時の μ (μ_k は，そのベクトル成分とする) である．

$$\min \quad w \quad (11)$$

subject to

$$\sum_{k \in K} \mu_k + w = \nu(K) \quad (12)$$

$$\mu_k \leq \nu(\{k\}) \quad \forall k \in K \quad (13)$$

$$\mu_k \geq 0 \quad \forall k \in K \quad (14)$$

$$w \geq 0 \quad (15)$$

上記の線形計画問題の解を考察すると，もし $w = 0$ となる解が存在した場合でも一意性が必ずしも保証されない．その解は，凸多面体になることがわかる．集合解は意思決定を行う際に実務家には使いづらいと考えられる．そこで，唯一解を求める指針を以下に示す

6.3 集合解から唯一解を求める指針

この凸多面体の端点はすべて列挙可能である．この情報をもとに凸多面体において，不満を考えることが可能になる．すると，これを用いて仁のアルゴリズムを適用することができる．このようにすれば，集合解の問題を解決することが可能である．

7 まとめと研究の指針

本稿では，確率的要素（待ち行列）を考慮したネットワークデザイン問題についてその厳密解の指針と費用配分解を導出するプリミティブな方法の提案を行った．ここで取り上げた最適化問題については，本稿では数値実験結果を示していない．特に，分枝限定法を行うにあたっては，実行可能解を求める計算を全ての分枝ノードで行うのは非効率であると考えられる．様々な数値実験を行うことによってどのようにするのが適当か確認をする必要がある．

また、費用配分解を求めるにあたって、凸多面体の端点の列挙にはどの程度の実計算時間がかかるのかに問題があると考ええる。

さらに、問題の根本にかかわる部分であるが、待ち行列を考慮したモデルでは応用分野によっては定常状態でのモデルは意味をなさないことがあると考えられるためそれについても検討の余地がある。勿論、定常状態でも本稿では $M/M/1$ という最もシンプルなものだけを取り扱っているためより複雑なモデルについてはどうなるのか研究の余地がある。

謝辞

本稿を作成にあたり、発表の機会およびコメントをいただいた研究代表者の小樽商科大学 行方常幸先生、待ち行列を中心に総合的な観点からアドバイスを頂いた東京工業大学 森雅夫先生、費用配分を考える上で協力ゲーム理論に関してアドバイスを頂いた東京工業大学 武藤滋夫先生、ネットワークデザイン問題に関して様々な情報をいただいた流通経済大学 片山直登先生に心より感謝いたします。

●本研究発表は早稲田大学特定課題研究助成費 2001A-085 の成果の一部である。

参考文献

- [1] J.M. Bilbao, *Cooperative On Combinatorial Structures*, Kluwer Academic, 2000.
- [2] I. Curiel, *Cooperative Game Theory and Applications*, Kluwer Academic, 1997.
- [3] L. Fratta, M. Gerla and L. Kleinrock, The Flow Deviation Method: An Approach to Store-and-forward Communication Network Design, *Networks*, Vol.3, pp.97-133, 1973.
- [4] B. Gavish and K. Altinkemer, Backbone Network Design Tools with Economic Tradeoffs, *ORSA Journal on Computing*, Vol.2, pp.236-252, 1990.
- [5] M. Gerla and L. Kleinrock, On The Topological Design of Distributed Computer Networks, *IEEE Transactions on Communications*, Vol.25, pp.48-60, 1977.
- [6] J. Kuipers, A Polynomial Time Algorithm for Computing the Nucleolus of Convex Games, *Maastricht University, Mathematics Reports in Operations Research and Systems Theory*, Report M 96-12, pp.1-18, 1996.
- [7] 鈴木光男, *新ゲーム理論*, 勁草書房, 1994.
- [8] C. Wynants, *Network Synthesis Problems*, Kluwer Academic, 2001.