

# Canonical Dirichlet space と 推移確率の絶対連続性

東京教育大 福島正俊

## § 1. Canonical Dirichlet space と hitting probability

$X$  を局所 compact, Hausdorff 可分空間とする。  
 $C(X)$  は  $X$  上の連続関数  $u$  の無限連  $0 \leq u \leq 1$  の  
 全体を表わすものとする。

### 定義 1 (Ray resolvent)

$C(X) \ni C(X)$  上の sub-Markov resolvent  
 $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$  がある Ray resolvent であるとは  $C^+(X)$   
 の可算部分族  $C_1$  がある存在し,  $C_1$  は  $X$  の点を分離し  
 $\forall x \in X, \exists u \in C_1, u(x) \neq 0$ , 又  $\alpha G_{\alpha+1} u \leq u$ ,  
 $\forall u \in C_1, \forall \alpha > 0$ .

### 定義 2 (canonical Dirichlet space)

$(m, \mathcal{F}, E)$  がある canonical Dirichlet  
 space であるとは,

(i)  $m$  は  $X$  上 everywhere dense な Radon 測度

(ii)  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$  は  $L^2(X) = L^2(X; m)$  に属する Dirichlet space [c. f. [1, §1]]

(iii)  $\exists \{G_\alpha, \alpha > 0\}$  : Ray resolvent on  $C(X)$  such that  $\forall u \in L^2(X) \cap C(X), \forall \alpha > 0,$

$$(1.2) \quad E^\alpha(G_\alpha u, v) = (u, v)_X, \quad \forall v \in \mathcal{F}$$

$$(1.3) \quad C_1 \subset \mathcal{F},$$

ただし  $C_1$  は  $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$  に対し 定義 1 の条件を満す関数族。  
ある

### 注意 1

(1) Canonical Dirichlet space は 2 つ性質を有する。

(iii)'  $\mathcal{F} \cap C(X)$  は  $C(X)$  内 2'-norm の意味で dense.

(2) (i) (ii) (iii) を満す  $(m, \mathcal{F}, \mathcal{E})$  を正則 (regular) な Dirichlet space とす。

上の注意よりわかるように canonical Dirichlet space は regular である。

定義3 (平衡 potential, capacity, polar set)

$(m, \mathcal{F}, E)$  is regular Dirichlet space である.

(i)  $X \supset E$  である open set であり  $\bar{E}$  は compact である.

$\mathcal{G}_E = \{u \in \mathcal{F}; u \geq 1 \text{ } m\text{-a.e. on } E\}$   
 である.  $\mathcal{G}_E \neq \emptyset$  であり  $E^x(u, u)$  は最小である.

ある一意な  $p_E^x \in \mathcal{F}$  がある (c.f. [1, §14])  
 これは  $E$  の 平衡 potential である.

$$(1.4) \quad \text{Cap}(E) = E^x(p_E^x, p_E^x)$$

は  $E$  の (α-) capacity である.

(ii) outer capacity 0 の集合は polar set である  
 (これは  $\alpha > 0$  には成り立たない).

補題1 . regular Dirichlet space であるとき

(i)  $u \in \mathcal{F} \cap C(X)$  ならば,  $\forall \varepsilon > 0$

$$\text{Cap} \{x; |u(x)| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E^x(u, u),$$

(ii)  $E$  open  $\bar{E}$  compact であるとき

$$\int_X p_E^x(x) m(dx) \leq \frac{1}{\alpha} \sqrt{\text{Cap}(E)}$$

証明. (ii) 任意の compactum  $K$  に対して

$$\int_K p_E^x(x) m(dx) \leq \sqrt{E^x(\mathbf{1}_K, \mathbf{1}_K)} \sqrt{E^x(p_E^x, p_E^x)}$$

$\leq \frac{1}{2} \sqrt{\text{Cap}(E)}$  且  $G_\alpha$  は  $(F, E)$  に対する  $L^2(X)$ -resolvent.

2. Canonical Dirichlet space  $(X, m, F, E)$  に対して  $\exists$  Ray resolvent  $\{G_\alpha, \alpha > 0\}$  である. これは対応する  $X$  上の強 Markov 過程 (c.f. [1, §5])  $X = (X_t, P_x, x \in X)$  である.

(1.3)  $X_b = \{x \in X; \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha G_\alpha f(x) \neq f(x), \exists f \in C(X)\}$   
 は branching set である.

### 補題 2.

branching set は polar である.

証明 Ray の criterion により.

$$X_b = \bigcup_{f \in \tilde{C}_1} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{\alpha > 0} \{f(x) - \alpha G_{n+1} f(x) > \frac{1}{n}\},$$

但し  $\tilde{C}_1 = \{f \wedge c; f \in C_1, c > 0 \text{ 有理数}\}.$

$$E_{\alpha, n}^f = \{x; f(x) - \alpha G_{n+1} f(x) > \frac{1}{n}\} \text{ は 開集合}$$

2.  $\alpha$  と共に 単調減少 である.

$\tilde{C}_1 \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$  であり  $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$  は初等  
 関数族である (cf [1, §9]),  $\tilde{C}_1 \subset \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ .  
 2.2 補題 1 (i) と [1] の §1 参照

$$\text{Cap}(E_{\alpha, n}^f) \leq n^2 E^\alpha(f - \alpha G_{\alpha+1} f, f - \alpha G_{\alpha+1} f)$$

$$\xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} 0. \quad \tilde{C}_1 \text{ は可算集合である}$$

$$\tilde{C}_1 = \{f_1, f_2, \dots, f_k, \dots\} \subset \mathcal{C}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

$$E_k > 0, \quad \sum E_k < \varepsilon,$$

$$\forall f_k \text{ と } n \in \mathbb{N} \quad \exists \alpha_n^{f_k}, \text{Cap}(E_{\alpha_n^{f_k}, n}^{f_k})$$

$$< \frac{E_k}{2^{k+1}}, \quad X_b \subset \bigcup_k \bigcup_n E_{\alpha_n^{f_k}, n}^{f_k}$$

$$\text{したがって } \text{Cap}(X_b) < \varepsilon. \quad \text{q.e.d.}$$

$X \cap E$  は closure であり compact であり  $\sigma$  は  
 open set である.

$$\sigma_E = \inf \{t > 0, X_t \in E\},$$

$$G_\alpha^0 f(x) = E_x \left( \int_0^{\sigma_E} e^{-\alpha t} f(X_t) dt \right),$$

$$H_\alpha^E v(x) = E_x (e^{-\alpha \sigma_E} v(X_{\sigma_E}))$$

と示す.

補題 3 以後  $C(X)$  は  $C$  と書くことにする.

$$(i) \quad (G_\alpha^\circ f, g)_X = (f, G_\alpha^\circ g)_X, \quad \forall f, g \in L^2 \cap C$$

$$(ii) \quad G_\alpha f = G_\alpha^\circ f + H_\alpha^E(G_\alpha f), \quad \forall f \in C,$$

$$(iii) \quad H_\alpha^E v - H_\beta^E v + (\alpha - \beta) G_\alpha^\circ H_\beta^E v = 0 \\ \forall v \in C.$$

定理 1  $(\mathcal{F}, E^\alpha)$  の直和分解

$$(i) \quad G_\alpha^\circ(C \cap L^2) \subset \mathcal{F}_1 \quad \text{かつ}$$

$$u = G_\alpha^\circ f, \quad f \in C \cap L^2 \quad \text{ならば}$$

$$E^\alpha(u, u) = (u, f)_X < +\infty.$$

(ii)  $(\mathcal{F}, E^\alpha)$  は  $\mathbb{R}$  の  $f$  に直和分解される.

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1^{(0)} \oplus \mathcal{H}_\alpha^E$$

$$\text{ただし} \quad \mathcal{F}_1^{(0)} = \overline{G_\alpha^\circ(C \cap L^2)}$$

$$\mathcal{H}_\alpha^E = \overline{H_\alpha^E G_\alpha(C \cap L^2)}.$$

証明

$$(i) \quad u = G_\alpha^\circ f, \quad f \in C \quad \text{とする.}$$

$$E_\beta^\alpha(u, u) = \beta(u - \beta G_{\beta+\alpha} u, u)_X$$

$$= \beta(u - \beta G_{\beta+\alpha}^\circ u, u)_X - \beta^2 (H_{\beta+\alpha}^E G_{\beta+\alpha} u, u)_X$$

$$= I_\beta - II_\beta.$$

$$I_\beta = \beta (G_{\beta+\alpha} f, G_\alpha f)_X = (G_\alpha f - G_{\beta+\alpha} f, f)_X \\ \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} (u, f)_X < +\infty.$$

$$II_\beta = \beta^2 (H_{\beta+\alpha}^E G_{\beta+\alpha} u, u)_X \\ = \beta (\beta G_\alpha^0 H_{\beta+\alpha}^E G_{\beta+\alpha} u, f)_X = \beta (H_\alpha^E G_{\beta+\alpha} u, f)_X \\ - \beta (H_{\beta+\alpha}^E G_{\beta+\alpha} u, f)_X.$$

$$-\text{by } \tilde{u} = G_\alpha f \text{ in } \mathcal{H}' < \mathcal{H}$$

$$\beta H_\alpha^E G_{\beta+\alpha} u(x) = \beta H_\alpha^E G_{\beta+\alpha} \tilde{u}(x) - \beta H_\alpha^E G_{\beta+\alpha} H_\alpha^E \tilde{u}(x) \\ \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} H_\alpha^E \tilde{u}(x) - H_\alpha^E H_\alpha^E \tilde{u}(x)$$

$$\exists \delta > 0 \text{ } E \text{ is open } \mathcal{H}' \text{ is } \forall \varepsilon > 0, \delta < x < \delta + \varepsilon,$$

$$x \in E, \text{ (in } \mathcal{H}' \text{) } \delta(\omega_\delta^+) = 0, \text{ (in } \mathcal{H}' \text{) } \delta$$

$$H_\alpha^E H_\alpha^E \tilde{u} = H_\alpha^E \tilde{u}, \quad \text{and } |\beta H_\alpha^E G_{\beta+\alpha} u| \leq |u|$$

$$\text{Therefore } \lim_{\beta \rightarrow \infty} II_\beta = 0.$$

$$\text{by } u = G_\alpha^0 f \in \mathcal{F} \text{ and } E^\alpha(u, u) = (u, f)_X.$$

$$(ii) \quad f, g \in C \cap L^2$$

$$E^\alpha(G_\alpha^0 f, H_\alpha^E G_\alpha g) = E^\alpha(G_\alpha^0 f, G_\alpha g)$$

$$- E^\alpha(G_\alpha^0 f, G_\alpha^0 g) = (G_\alpha^0 f, g)_X - (G_\alpha^0 f, g)_X = 0.$$

定理 2  $v \in \mathcal{F} \cap C$  ならば

$$P_{H_2^E} v(x) = H_2^E v(x), \quad m-a.e.$$

また  $P_{H_2^E}$  は  $H_2^E$  の projection である。

証明  $v \in \mathcal{F}$  ならば [1] § 1 より

$$\beta G_\beta v \xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} v \quad \text{in } \mathcal{F}, \quad 1 \leq p < \infty$$

$$P_{H_2^E}(\beta G_\beta v) \longrightarrow P_{H_2^E} v \quad \text{in } \mathcal{F}, \quad 2 \leq p < \infty$$

従って  $\beta G_\beta v \in L^2$   $m$ -a.e.  $x \in \mathbb{R}^d$ . 一方,

$$P_{H_2^E}(\beta G_\beta v) = H_2^E(\beta G_\beta v)$$

$$= E_x(e^{-\alpha \sigma_E} \beta G_\beta v(X_{\sigma_E})) ; \quad X_{\sigma_E} \in X - X_b$$

$$\xrightarrow{\beta \rightarrow \infty} E_x(e^{-\alpha \sigma_E} v(X_{\sigma_E})) = H_2^E v(x).$$

補題 4.

$$u(x) = E_x(e^{-\alpha \sigma_E}) \geq 0 \quad \text{and} \quad u \in H_2^E$$

ならば  $E^\alpha(u, v) \geq 0$ ,  $\forall v \in \mathcal{F} \cap C$ ,  
such that  $v(x) \geq 0$  on  $E$ .

証明 右連続強 Markov 過程の一般論より

$u(x)$  は  $\alpha$ -excessive, つまり  $\beta G_\beta u \leq u$ ,  $\forall \beta > 0$ .

又  $v_0 \in \mathcal{F} \cap C$   $v_0 = 1$  on  $E$  なる  $v_0$  が存在する

から 定理 2 より  $u(x) = H_2^E v_0 \in H_2^E$ .

[1], § 10 の定理 10.3 によつて  $E^\alpha(u, w) \geq 0$ ,  $\forall w \in \mathcal{F}$   
 $w \geq 0$ ,  $m$ -a.e. on  $X$ , 今  $v \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ ,  $v \geq 0$   
 on  $E$  とする. 定理 2 によつて  $E^\alpha(u, v) = E^\alpha(u, P_{H_\alpha^E} v)$   
 $= E^\alpha(u, H_\alpha^E v)$ . ところが  $H_\alpha^E v(x) =$   
 $E_x(e^{-\alpha \sigma_E} v(X_{\sigma_E})) \geq 0$ ,  $\forall x \in X$ . (したがって)  
 $E^\alpha(u, v) \geq 0$ .

### 定理 3

$$p_E^\alpha(x) = E_x(e^{-\alpha \sigma_E}), \quad m\text{-a.e.}$$

証明, 先ず " $p_E^\alpha$ " が次の 2 条件によつて特徴づけられることに注意する.

$$(1.5) \quad p_E^\alpha = 1 \quad m\text{-a.e. on } E$$

$$(1.6) \quad E^\alpha(p_E^\alpha, v) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{F} \cap \mathcal{C} \\ \text{such that } v \geq 0 \text{ on } E.$$

(c.f. [1] § 11) . 一方  $u(x) = E_x(e^{-\alpha \sigma_E})$   
 はこの性質をもつ. (1.6) は前補題によつて.

(1.5) によつて明らかなことは  $x \in E - X_b$  のときは  
 $u(x) = 1$ , 補題 2 によつて  $\text{Cap}^*(X_b) = 0$ . 補題  
 1 (ii) によつて  $m(X_b) = 0$ . (したがって)  $u$  は (1.5) を  
 満たす.

## §2. 推移確率の絶対連続性

$(X, m, \mathcal{F}, E, G_\alpha)$  を canonical Dirichlet space に対応する Markov 過程  $X = \{X_t, P_x, x \in X\}$  とする.  $X$  の推移確率  $p(t, x, \cdot)$ , semi-group  $T_t$  である.

以後  $\alpha > 0$  を固定し 以下の仮定を置く.

仮定

- (A.1) 各  $x \in X$  に対して Green measure  $G_\alpha(x, d\mu)$  は  $m$  に関して絶対連続,  
 (A.2)  $T_t : C(X) \rightarrow C(X)$ .

### 定理 4 (推移確率の絶対連続性)

仮定 (A.1) (A.2) の下で 各  $t > 0, x \in X$  に対して  $p(t, x, \cdot)$  は  $m$  に関して絶対連続である.

### 補題 5

$u \in C_0(X)$  ならば  $T_t u \in \mathcal{F}$  である.

$E(T_t u, T_t u) \leq \frac{1}{2t} \{ (u, u)_X - (T_t u, T_t u)_X \}$   
 ただし  $C_0(X)$  は compact な連続関数の全体.

補題 5 の証明は 1 と 2 に分けて示す.

定理 4 の証明は (1). 方法は [2] のとおり.

定理 4.9 証明 ,  $t > 0$ ,  $x \in X$  是固定了.

$u \in C_0^+(X)$ ,  $\|u\|_0 = \sup_{x \in X} |u(x)| \leq 1$  也了.

$B_\varepsilon = \{x \in X, T_{t/2} u(x) > \varepsilon\}$  也了.

假定 (A.2) 也了  $B_\varepsilon$  is open. 補題 1.(i) 也了.

$$(2.1) \quad \text{Cap}(B_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E^\alpha(T_{t/2} u, T_{t/2} u)$$

$$\leq \frac{1}{t \varepsilon^2} (u, u)_X + \alpha / \varepsilon^2 (T_{t/2} u, T_{t/2} u)_X$$

$$- \text{よ} \quad T_t u(x) = T_{t/2} (T_{t/2} u)(x)$$

$$= \frac{\alpha}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \int_0^{t/2} e^{-\alpha s} T_{t/2} (T_{t/2} u)(x) ds$$

$$= \frac{\alpha}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \int_0^{t/2} e^{-\alpha s} T_s [T_{t/2-s} (T_{t/2} u)](x) ds$$

$$\leq \frac{\alpha}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \int_0^{t/2} e^{-\alpha s} T_s [p(\frac{t}{2} - s, \cdot, B_\varepsilon) + \varepsilon](x) ds$$

$$\leq \frac{\alpha e^{+\frac{\alpha t}{2}}}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \int_0^{t/2} e^{-\alpha s} T_s (p_\alpha^{B_\varepsilon})(x) ds + \varepsilon$$

2 = 2: 定理 3 を使, 2 と 3.  $\frac{\alpha t}{2}$

$$(2.2) \quad T_t u(x) \leq \frac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} G_\alpha p_\alpha^{B_\varepsilon}(x) + \varepsilon.$$

仮定 (A.1) により  $G_\alpha(x, dy) = G_\alpha(x, y) m(dy)$  なる  
 $G_\alpha(x, y)$  がある. (2.2) より

$$(2.3) \quad T_t u(x) \leq \frac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \left\{ \int_{G_\alpha(x, y) > N} G_\alpha(x, y) m(dy) \right.$$

$$\left. + N \int_X p_\alpha^{B_\varepsilon}(y) m(dy) \right\} + \varepsilon$$

2 = 3 より 補題 1 (ii) ~~より~~  $x \notin U$  (2.1) より

$$(2.4) \quad \int_X p_\alpha^{B_\varepsilon}(y) m(dy) \leq \frac{1}{2} \sqrt{\text{Cap}(B_\varepsilon)}$$

$$\leq \frac{1}{2\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{t} + \alpha} \sqrt{(u, u)_X}.$$

今  $\sqrt{(u, u)_X} = \|u\|_1$  とおくと (2.3) と (2.4) より

次の評価は得られる.

$$(2.5) \quad T_t u(x) \leq \frac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \int_{G_\alpha(x, y) > N} G_\alpha(x, y) m(dy)$$

$$+ \frac{N e^{\frac{\alpha t}{2}}}{\varepsilon(1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}})} \sqrt{\frac{1}{t} + \alpha} \|u\|_1 + \varepsilon.$$

(2.5) には  $\varepsilon$  があるが,  $N$  は  $u \in C_0^T$ ,  $\|u\|_0 \leq 1$  なる  $u$  は存在しない.  $\Rightarrow$  式から  $p(t, x, d\gamma)$  の  $m$  による絶対連続性が (2.6) である. 実際,  $P$  は  $\varepsilon$  による closure compact なる関数集合,  $u \uparrow \pi_P$  とすれば (2.5) である.

$$(2.6) \quad p(t, x, P) \leq \frac{\alpha e^{\frac{\alpha t}{2}}}{1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}}} \int_{G_\alpha(x, \gamma) > N} G_\alpha(x, \gamma) m(d\gamma) \\ + \frac{N e^{\frac{\alpha t}{2}}}{\varepsilon (1 - e^{-\frac{\alpha t}{2}})} \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} + \alpha} \cdot m(P) + \varepsilon.$$

$P \downarrow$  と  $m(P) \downarrow 0$  とする.  $\varepsilon \downarrow 0$ ,  $N \uparrow \infty$

$\frac{N}{\varepsilon} m(P) \rightarrow 0$  と出来る. かつ,  $\varepsilon = 0$  とは

$A \subset X$ ,  $m(A) = 0$  ならば  $p(t, x, A) = 0$ .  
q.e.d.

補題 5 が残る 2 つのことは次の定理 ([1, §2]) の結果として得られる.

### 定理 5

(i)  $\mathcal{F}$  の  $L^2(X)$  内の closure は  $L_0^2(X)$  である.

$\exists \{ \tilde{T}_t, t \geq 0 \}$ ;  $L_0^2(X)$  上の強連続 contraction semi-group such that

$\int_0^\infty e^{-\lambda t} \tilde{T}_t u \, dt = \tilde{G}_\lambda u$ ,  $u \in L_0^2(X)$ .  
 $t \in \mathbb{C}$ ,  $\{\tilde{G}_\lambda, \lambda > 0\}$  is  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$ -self-adjoint  $L^2$ -re-  
 solvent.

(ii)  $\tilde{T}_t : L_0^2(X) \longrightarrow \mathcal{F}$  is

$$\forall u \in L_0^2(X), \quad \forall t > 0,$$

$$\mathcal{E}(\tilde{T}_t u, \tilde{T}_t u) \leq \frac{1}{2t} \{ (u, u)_X - (\tilde{T}_t u, \tilde{T}_t u)_X \}.$$

### 補題 5 の証明

先ず  $L_0^2(X) = L^2(X)$  である. 実際  $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$   
 は  $\mathcal{C}$  内で dense であるから 容易にわかる.

$$L_0^2(X) \supset \mathcal{C}_0. \quad (\text{したがって } L_0^2(X) = L^2(X),$$

定理 5 から 補題 5 を導くためには 2 つの点を確認する.

$$(2.7) \quad u \in \mathcal{C}_0 \Rightarrow T_t u(x) = \tilde{T}_t u(x) \quad \text{m-a.e.}$$

$$A_\lambda = \lambda(\lambda G_\lambda - I) \quad \text{と置く.}$$

$$e^{tA_\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \tilde{T}_t \quad \text{on } L_0^2(X)$$

$$e^{tA_\lambda} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} T_t \quad \text{on } \mathcal{R} = G_\lambda(\mathcal{C}) \quad \text{である.}$$

(したがって)  $u \in \mathcal{R} (\subset \mathcal{C})$  ならば  $T_t u(x) =$   
 $\tilde{T}_t u(x)$ , m-a.e. である. 実際  $u \in \mathcal{C}_0$  と  
 する.  $T_t u(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} T_t (\lambda G_\lambda u)(x)$ .

一方  $u \in L^2_0(X)$  ならば  $\alpha G_\alpha u \rightarrow u$  in  $L^2$ .

$\tilde{T}_t$  は  $L^2_0$  上の有界作用素. (1.5.11) 2

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \tilde{T}_t(\alpha G_\alpha u)(x) = \tilde{T}_t u(x) \quad m\text{-a.e.}$$

$$(1.5.11) 2 \quad T_t u(x) = \tilde{T}_t u(x), \quad m\text{-a.e.}$$

文献

[1] Dirichlet space の表現とその応用 (福島正俊)  
to appear in 'Seminar on Probability'

[2] On absolute continuity of transition probabilities of a multidimensional Brownian motion (A. D. Wentzell).

Theory of probability and its appl. vol 13  
No 1 (1968).