

## 大域結合を持つ保存系カオスの作る構造

小西哲郎 (名古屋大・理)、金子邦彦 (東大・教養)

## 1 序

「孤立系を十分長い時間放置すると熱平衡状態になる。」これは統計力学を力学から基礎付けする時に語られるお話の一種である。しかし、長時間後の振舞いが熱平衡的になるのは大自由度保存系の普遍的な性質であろうか？微粒子や液体中の分子のダイナミクス、そして自己重力系等は、保存系でありながら様々な空間的構造を自発的に形成する。こういうクラスの系に対して力学としてアプローチするために、簡単なモデルから調べてみたい。特に、カオスと空間的構造に付いて考えたい。というのは、結晶や線型な波、孤立波等、定常的で規則的な構造についてはよく知られているが、乱流、液体、微粒子の様に、秩序構造の存在は認められるものの、非定常で不規則であるがために特徴化が難しい系に対しては、系のカオスとしての性質を理解する事に依り、不規則な秩序構造を記述しさらには理解する鍵が得られるのではないかと期待されるからである。

今回我々は、その様な、「カオスの作る動的構造」の簡単な例を挙げる。保存力長距離相互作用系として、大域結合を持つ保存系の coupled map lattice をとり、この系に見られる秩序構造の生成と消滅と再生、その相空間構造との関係を議論する。系が自己重力系とも似た側面を持っているのでそちらへの応用も期待される。[1]

## 2 モデル

単位円上に  $N$  個の粒子を置く。各粒子  $i$  は座標  $x_i \in [0, 1)$  とそれに共役な運動量  $p_i$  で状態が指定される。これらが次の様な symplectic 写像で時間発展する系を考える。

$$p'_i = p_i + \frac{K}{2\pi\sqrt{N-1}} \sum_{j=1}^N \sin 2\pi(x_j - x_i) \bmod 1, \quad x'_i = x_i + p'_i \bmod 1. \quad (1)$$

2 体相互作用は図で書けば図 1 の様になる。

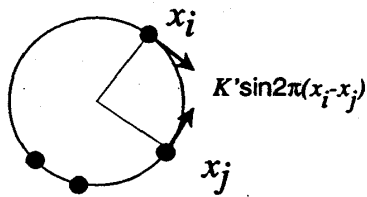


図 1: モデル：2 体相互作用

上記の “symplectic である” というのは、系の時間発展  $(x_i, p_i) \rightarrow (x'_i, p'_i)$  が正準変換である事、すなわち、次式が満たされる事である；

$$\sum_{i=1}^N dx_i \wedge dp_i = \sum_{i=1}^N dx'_i \wedge dp'_i, \quad (2)$$

式(2)の両辺を  $N$  乗することにより、 $d^N x \wedge d^N p = d^N x' \wedge d^N p'$  すなわち、相空間の体積要素が保存している (Liouville の定理) ことがわかる。この意味において、この系は保存系である。(註：この文章で「相空間」と言った時は必ず全自由度の相空間の事を指す。)

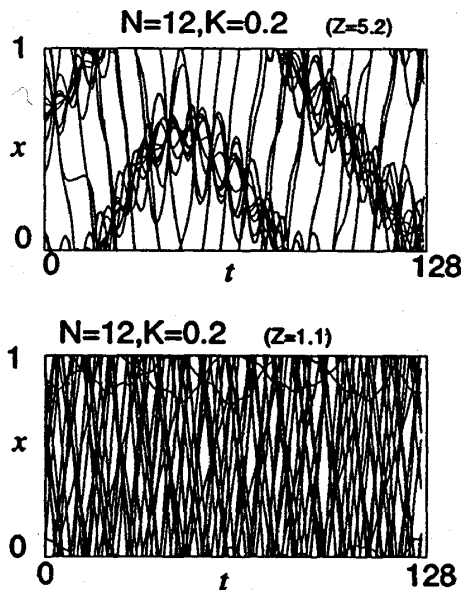
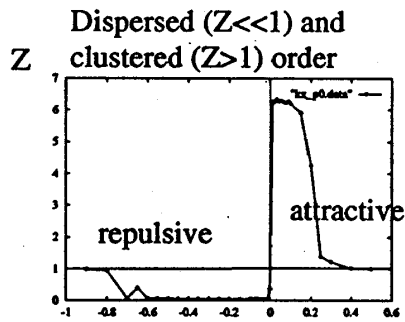


図 2: clustered (上) and random (下) motion :  $N = 12, K = 0.2$ , 初期条件は  $x_i = \text{random}, p_i = 0$  (上)、 $p_i = \text{random}$  (下)

この系において、 $K > 0$  では引力の、 $K < 0$  では斥力の長距離相互作用を持つ。この系は、粒子間の相関がほとんど無い相 (無秩序相) あるいは非常に強い相 (秩序相) の 2 通りの運動形態を持つ。 $K > 0$  (引力) の場合には秩序相では粒子が 1 つの大きなクラスターを作って運動する [2]。また、 $K < 0$  (斥力) での秩序相は、粒子が系全体にほぼ均等に散らばった “dispersed order” になる [3]。

図 3: coupling  $K$ と“秩序度” $Z$ 

秩序化の度合いは、粒子の集まり具合  $Z \equiv \frac{1}{N} |\sum_{j=1}^N \exp(2\pi i x_j)|^2$  を比較する事で見ることが出来る (図 3)。 $Z$  は次の様な性質を持つ;

$$Z = \begin{cases} N & \text{for } x_i = x_j, \forall i, j \\ 0 & \text{e.g., } x_i = i/N \\ 1 & \text{for } x_i \text{ random.} \end{cases} \quad (3)$$

### 3 Coupled map lattice について

このモデル (1) は離散時間上で定義されているために、系の全エネルギーは保存しない。ハミルトニアンを書けば

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} p_i^2 - \frac{K}{(2\pi)^2 \sqrt{N-1}} \sum_{i,j \text{ pair}} \cos(2\pi(x_i - x_j)) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n) \quad (4)$$

と、整数時刻ごとに撃力が入り、 $H$  が時間に陽に依存するために全エネルギーは保存しない。が、 $H$  が時間に依存しない通常の自励系で Poincare 写像を作れば、それは symplectic map になっている事から、逆に symplectic map を作ってやってそれを energy surface 上での運動と解釈する事になる。

保存系に限らず、この種の写像系は ‘Coupled map lattice’ と呼ばれ、乱流的な振舞いをする系をモデル化して研究するのによく使われている [4, 5]。第一原理的な基礎方程式から出発する方法に比べ、いま興味がある事に対して本質的な部分だけを取りだして徹底的にモデルを簡略化した coupled map は、モデルが簡単であり、数値計算上も高速でまた丸め誤差以外の誤差が無く、豊富な現象を見せてくれるので、現象論の構築には極めて強力である。

### 4 order-disorder : 異なる chaotic sea の共存

この節では、秩序運動と無秩序運動の力学的原因について述べる。

多自由度のハミルトン系の一般的性質として、相空間内でカオス軌道の領域は全て連結していることが知られている。[7]

秩序相は一見規則的に動いている様に見えるが、系の最大リヤプノフ数は、秩序相・無秩序相ともに正である。すなわち、どちらの相もカオスである。(この場合、クラスター内部の運動と、クラスター自体の運動が共にカオスになっている。) 秩序相・無秩序相ともにカオスであるために、系は秩序相と無秩序相の間を時間的に行き来する。一つの長い軌道を取り、その上でそれぞれの状態への滞在時間 $\tau$ の分布を調べてみると、無秩序相側では  $P(\tau) \sim \exp(-c\tau)$  であるのに対して、クラスター状態側では  $P(\tau) \sim \tau^{-\alpha}$  とべき分布となっている。つまり、クラスター状態の特徴的なタイムスケールは存在しない。これはハミルトン系のカオスに典型的な事である [6]。秩序相・無秩序相の違いは結局は相空間の中に2種類の異なる性質の chaotic sea が共存している事から来る。秩序相側はハミルトン系の自己相似的な相空間構造を反映したものであり、無秩序側はほとんどホワイトノイズ的なものである。その特徴は次の表にまとめられる。

2種類のカオス領域

|        | clustered,dispersed                            | non-ordered    |
|--------|------------------------------------------------|----------------|
| 実空間の構造 | clustered (or dispersed)<br>state of particles | none           |
| 相空間の構造 | KAM トーラス、<br>アイランドの残骸                          | almost<br>none |
| 滞在時間分布 | べき減衰 (特徴的な<br>時間スケールはない)                       | 指数減衰           |

## 5 結び

カオスの発見が与えた自然観というと、今までは、決定論的な力学法則から予測不能な現象を生じる事、あるいは、複雑な現象は必ずしも複雑な力学法則や大きな自由度を必要としない事等が強調されていた。この報告ではそれとは別の、カオスは構造を持った複雑さを作るという観点で考えてみた。すなわち、相空間の中にいくつかの異なる性質のカオスがある系を考える事で、対称性を破った(構造を持った)状態が自発的に発生し、準安定に存在する事を示した。大自由度系のカオスにおいて、いくつかの準安定な状態の間を系が渡り歩く事で、系が自発的に様々なマクロな状態をとるダイナミクスは「カオスの遍歴 (chaotic itinerancy)」[8] と呼ばれている。系がカオスになっていると、例え系が構造を作った

としてもそれは（リアプノフ数の逆数程度の時間で）壊れてしまうのではないか、と思われるかも知れない。しかし、リアプノフ数は無限小変分に対する議論であり、実際に大きなずれが生じるかどうかとはまた別なので混同してはいけない。カオスは乱数を作る事も出来るし、乱数的なカオスの場合には系のカオスとしての性質を調べても、結果的には他の方法（たとえばフォッカープランク方程式等）で調べたのと大差ないと思われる。が、カオスは乱雑になってしまうだけではなく、例えばハミルトン系の様に、長時間相関が残る場合には、カオスはノイズでは置き換えられない働きをするので、系のカオスとしての振る舞いを調べる事は直接その系の理解に役立つはずである。

今回の報告で、構造を持ちながらカオスであるような状態が、（準）安定に存在する事を知っていただけたらと思う。

## 参考文献

- [1] この研究会での土屋氏の報告参照。
- [2] “Clustered motion in symplectic coupled map systems”, T. Konishi and K. Kaneko, J. Phys. A25 (1992) 6283 – 6296  
また、この系を連続時間で考えた場合にクラスターの成因を論じた物に、S. Inagaki and T. Konishi, Publ. Astron. Soc. Japan 45 (1993) 733 および稲垣氏のこの研究会での報告参照。
- [3] “Peeling the Onion of Order and Chaos in a High-dimensional Hamiltonian System”, K. Kaneko and T. Konishi, Nagoya Univ. preprint DPNU-93-23 (to appear in Physica D.)
- [4] *Collapse of tori and genesis of chaos in dissipative dynamical systems*, Kunihiro Kaneko, World Scientific Publ. (Singapore, 1986)
- [5] CHAOS FOCUS ISSUE ON COUPLED MAP LATTICES, ed. by K. Kaneko, CHAOS 2 No.3 (1992) (published by American Institute of Physics)
- [6] ハミルトン系カオスの一般的な性質に付いてはこの研究会での相沢氏の講演を参照。

- [7] これは、 $2N$ 次元の相空間を  $N$ 次元のトーラス（非カオス領域）で2つに区切る事が出来ないためである。
- [8] K. Ikeda, K. Matsumoto, and K. Ohtsuka, Prog. Theor. Phys. Suppl. 99 (1989) 295;  
I. Tsuda, in *Neurocomputers and Attention*, (eds. A.V. Holden and V. I. Kryukov, Manchester Univ. Press, 1990 .)
- [9] 例えば、自励系のハミルトニアンをランダムに与えて、それがカオスにならない確率はゼロであると言ってよい。もう少し正確には、次のポワンカレの定理によって表される；積分可能なハミルトニアン  $H_0(p)$  ( $p \in R^N$ ) を考える。 $H_0$ の角振動数は作用とともに単調に変化する、すなわち  $\det \left( \frac{\partial^2 H_0}{\partial p_i \partial p_j} \right) \neq 0$  を仮定する。この  $H_0$  に微小な摂動を加えたハミルトニアン  $H(p, q; \mu) = H_0(p) + \mu H_1(p, q) + \mu^2 H_2(p, q) + \dots$  があつた時、 $N > 1$  では、 $(p, q, \mu)$  について一価解析的な保存量は  $H$  以外には存在しない。(Poincare)