

46

最尤推定量の一致性について.

和歌山大学 経済学部 松田忠之

§ 1. 序

最尤推定量 (MLE) の一致性 (strong consistency) を示すためには、尤度関数の局所的微分可能を仮定する場合と、微分可能性を仮定しない Wald [1] の方法がある。ここでは Wald によって与えられた条件とほとんど同じに位弱い条件の下で、MLE の一致性の収束程度を示す。証明の方法は、Bahadur [2] による。

§ 2. 記号と仮定

$(X, \mathcal{A})$ を sample space とする。parameter space Θ は k 次元 Euclidean space E の部分集合とし、 $\{P_\theta : \theta \in \Theta\}$ を parameter θ をもつ X 上の確率分布の族とする。さらに θ_0 を θ の真の値とする。

ASSUMPTION 1. $\{P_\theta : \theta \in \Theta\} \ll \mu$ (μ -f. measure)

この時、 $\frac{dP_\theta}{d\mu} = f(x, \theta)$ と書く。

ASSUMPTION 2. 次の条件を満足する $A \in \mathcal{A}$ が存在する.

- (1) $P_{\theta_0}(A) = 0$
- (2) 任意の $x \in X - A$, $\theta \in \mathcal{Q}$, $\varepsilon > 0$ に対して、開部分集合 $G \subset \{t \in \mathcal{Q} : |\theta - t| < \varepsilon\}$ が存在して、 $f(x, \theta) - \varepsilon < f(x, t)$, $\forall t \in G$, が成立する.

ASSUMPTION 3. 次の条件を満足する $B_0 \in \mathcal{A}$ が存在する.

- (1) $P_{\theta_0}(B_0) = 0$.
- (2) 任意の $x \in X - B_0$ に対して、 $f(x, t)$ は $t = \theta$ で上半連続.

E^* を E の一貫コンパクト化とし、 $\mathcal{Q}$ の E^* における開包を $\mathcal{Q}^*$ で表す.

ASSUMPTION 4. 次の条件を満足する $D \in \mathcal{A}$ が存在する.

- (1) $P_{\theta_0}(D) = 0$,
- (2) 任意の $x \in X - D$ と任意の $t \in \mathcal{Q}^* - \mathcal{Q}$ に対して、

$\lim_{\theta \rightarrow t, \theta \in \mathcal{Q}} f(x, \theta)$ が存在する.

この時、 $t \in \mathcal{Q}^* - \mathcal{Q}$ に対して、

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \lim_{\theta \rightarrow t, \theta \in \mathcal{Q}} f(x, \theta), \quad x \in X - D, \\ &= 0, \quad x \in D \end{aligned}$$

と定義する。明らかに、 $\int f(x, t) d\mu \leq 1$ 。

ASSUMPTION 5. 任意の $\theta \in \Theta^*$, $\theta \neq \theta_0$, に対して

$$P_{\theta_0} \{ f(x, \theta) \neq f(x, \theta_0) \} > 0.$$

$t \in \Theta^*$ に対して $h(x, \theta_0, t) = \frac{f(x, t)}{f(x, \theta_0)}$ ($f(x, \theta_0) > 0$) ;
 $= 0$ ($f(x, \theta_0) = 0$) と定義すれば ASSUMPTION 1, 2, 4 から

Θ^* の任意の開部分集合 I に対して $\sup_{t \in I} h(x, \theta_0, t)$ は

$\mathcal{A}$ -meas. function となる。従って、

$$G(a; \theta_0, I) = \int \sup_{t \in I} h(x, \theta_0, t)^a f(x, \theta_0) d\mu, \quad 0 < a < 1,$$

と定義する。

ASSUMPTION 6. 任意の $\theta \in \Theta^*$, $\theta \neq \theta_0$, に対して

$G(a; \theta_0, I(\theta)) < \infty$ となる θ を含む Θ^* の開部分集合 $I(\theta)$ が存在する。ここに $a, 0 < a < 1$, は θ に無関係な定数である。

§3. Theorem.

確率空間 $(X, \mathcal{A}, \{P_\theta : \theta \in \Theta\})$ の n 個の直積空間を $(X^n, \mathcal{A}^n, \{P_{\theta_0}^n\})$ と表わす。

定義. 任意の自然数 n に対して、 X^n から Θ^* への関数 T_n が $\mathcal{A}^n$ -meas. である時、関数列 $\{T_n : n = 1, 2, \dots\}$ を θ の estimate と呼ぶ。§2 の仮定の下に次の定理を示す。

定理. $\{\bar{\theta}_n\}$ を次のような θ の estimate としする。

$$(1) \quad \prod_{i=1}^n h(x_i, \theta_0, \bar{\theta}_n) \geq C > 0, \quad P_{\theta_0}^n - a.e.$$

この時、任意の $\varepsilon > 0$ に対して次の不等式を満足するような g ($0 < g < 1$) と M (> 0) が存在します。

$$P_{\theta_0}^n(|\bar{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon) \leq M C^{-a} g^n, \quad \forall n,$$

(勿論、上の結果は $\{\bar{\theta}_n\}$ の一様性を含みます。)

§ 4. Lemmas.

$\theta \in \Theta^*, \theta \neq \theta_0$, に対して $g(a; \theta_0, \theta) = \int h(x, \theta_0, \theta)^a f(x, \theta_0) d\mu$, $0 < a < 1$, と定義する。この時次の簡単な Lemmas が示される。

補題 1. ASSUMPTION 1.4 の下で

$$(1) \quad g(a; \theta_0, \theta) \leq 1.$$

$$(2) \quad \lim_{a \rightarrow 0} g(a; \theta_0, \theta) = P_{\theta_0} \{ f(x, \theta) f(x, \theta_0) > 0 \}.$$

証明 (1) は不等式 $y^a \leq 1 + a(y-1)$, $y \geq 0$, より従う。

(2) は不等式 $h(x, \theta_0, \theta)^a f(x, \theta_0) \leq f(x, \theta) + f(x, \theta_0)$ と有界収束定理から示される。

補題 2. ASSUMPTION 1.4.5 の下で $g(a; \theta_0, \theta) < 1$.

証明 かりに $g(b; \theta_0, \theta) = 1$ とする b ($0 < b < 1$) と $\theta \in \Theta^* (\theta \neq \theta_0)$ が存在するとして矛盾を導く。ASSUMPTION 1.4. と有界収束定理より、全ての u , $0 < u < 1$, で

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} g(u; \theta_0, \theta) = \int_F \{ \log h(x, \theta_0, \theta) \}^2 h(x, \theta_0, \theta)^u f(x, \theta_0) d\mu$$

$$F = \{ f(x, \theta) f(x, \theta_0) > 0 \}.$$

従って、 $g(u; \theta_0, \theta)$ は u の凸関数となり、 $g(u; \theta_0, \theta) \equiv I$ である。故に、 $\frac{\partial^2}{\partial u^2} g(u; \theta_0, \theta) \equiv 0$ となる。結局、

$$P_{\theta_0}(F) \leq P_{\theta_0}\{f(x, \theta) = f(x, \theta_0)\}$$

かいて、 θ こそが補題 1 より、 $P_{\theta_0}\{f(x, \theta) = f(x, \theta_0)\} = I$ となり ASSUMPTION 5 に矛盾する。

補題 2. ASSUMPTION 1 ~ 6 の下で、 $G(a; \theta_0, J(\theta)) < I$ となる θ を含む Θ^* の開部分集合 $J(\theta)$ が存在する。

証明 θ の countable base $\{I_n(\theta)\}$ を次のように定める。

$$I_n(\theta) = V_n(\theta) \cap \Theta^*$$

$$\begin{aligned} V_n(\theta) &= \left\{ t \in E : |\theta - t| < \frac{1}{n} \right\}, \quad (\theta \neq \theta_\infty) \\ &= \{ t \in E : |t| > n \} \cup \{ \theta_\infty \}, \quad (\theta = \theta_\infty) \end{aligned}$$

ここで、 θ_∞ は additional point を表わす。この時、次の事が云える。(a) $I_n(\theta) \subset I(\theta)$, n : suff. large,

$$(b). \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I_n(\theta)} f(x, t) = f(x, \theta), \quad P_{\theta_0} - a.e.$$

有界収束定理より $\lim_{n \rightarrow \infty} G(a; \theta_0, I_n(\theta)) = g(a; \theta_0, \theta)$ となり補題 2 から補題 3 が成立する。

§ 5. Proof of theorem.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して、 $K = \{ \theta \in \Theta^* : |\theta - \theta_0| \geq \varepsilon \}$ とおく。

K は Θ^* のコンパクト部分集合である。従って補題 3 から、有限個の開部分集合の列 $\{J(\theta_1), \dots, J(\theta_M)\}$ が存在して、

$$(2) \quad K \subset \bigcup_{j=1}^M J(\theta_j),$$

$$(3) \quad g = \max_{1 \leq j \leq M} G(a; \theta_0, J(\theta_j)) < 1.$$

を満足する。もしも、 $|\bar{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon$ ならば (1), (2) により

$$C^a \leq \max_{1 \leq j \leq M} \prod_{i=1}^n \sup \{ L(x_i, \theta_0, \theta)^a; \theta \in J(\theta_j) \}, P_{\theta_0}^n - a.e.$$

が成り立つ。故に、マルコフの不等式から

$$\begin{aligned} P_{\theta_0}^n(|\bar{\theta}_n - \theta_0| \geq \varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^M P_{\theta_0}^n \left(\prod_{i=1}^n \sup \{ L(x_i, \theta_0, \theta)^a; \theta \in J(\theta_j) \} \geq C^a \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^M C^{-a} G(a; \theta_0, J(\theta_j))^n \\ &\leq M C^{-a} g^n. \end{aligned}$$

となる。

最後に Wald が与えた仮定と我々の仮定との比較を行う。
Wald は ASSUMPTION 5 で $\theta^* - \theta$ の唯一の根として無限遠点
 ∞ を考えて、そこで $f(x, \infty) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} f(x, \theta) = 0$, $P_{\theta_0} - a.e.$ と
仮定する。勿論 ASSUMPTION 4 はこの仮定の一つの拡張にな
っている。ASSUMPTION 6 は Wald の ASSUMPTION 2 よりもあ
る意味で強い。すなわち、ある $\delta > 0$ に対して $\int f(x, \theta_0)^{1+\delta} d\mu < \infty$
が成り立つ。ASSUMPTION 6 は ASSUMPTION 2 を含みます。

文 献

- [1] Wald, A.: Note on the consistency of the maximum likelihood estimate, Ann. Math. Statist. 20 (1949), 595-601.
- [2] Bahadur, R. R.: On the asymptotic efficiency of tests and estimates, Sankhyā, 20 (1960), 229-252.