

A 型単純特異点と関係する振動積分の満たす微分方程式 に対する完全 WKB 解析

Exact WKB analysis of a differential system satisfied by an oscillatory integral related to a simple singularity of type A

By

廣瀬 三平
HIROSE Sampei*

Abstract

In this paper, we consider a differential system satisfied by an oscillatory integral related to a simple singularity of type A. We show that the Borel summability of WKB solutions of the system can be described by using the Stokes set.

§ 1. はじめに

$t = (t_1, t_2, \dots, t_m) \in \mathbb{C}^m, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ の函数 $F(t, x)$ から定まる振動積分

$$\psi(x, \eta) = \int e^{\eta F(t, x)} dt, \quad dt = dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_m$$

の満たす微分方程式は完全 WKB 解析において重要な対象であり、様々な例が考えられている。例えば $F(t, x) = -\frac{1}{3}t^3 + xt$ から定まる振動積分 (Airy 積分) の満たす微分方程式は Airy 方程式と呼ばれ、単純変わり点における WKB 解析的な変換による標準形となる。さらにこのことを用いて単純変わり点から出る Stokes 曲線上での接続公式が導かれる ([10])。 $F(t, x) = t^4 + x_2 t^2 + x_1 t$ から定まる振動積分 (Pearcey 積分) の満たす微分方程式は Pearcey 系と呼ばれ、変わり点集合のカusp点における標準形となる ([7])。また, [12]

Received March 22, 2024. Revised July 6, 2024.

2020 Mathematics Subject Classification(s): 34E20, 34M30, 34M60, 41A60, 42B20

Key Words: oscillatory integral, WKB solution, Stokes set, Borel summability.

This work was supported by JSPS KAKENHI Grant No. 21K03300.

*Department of Engineering and Design, Shibaura Institute of Technology, Saitama, 337-8570 Japan.
e-mail: hirose3@shibaura-it.ac.jp

では量子 Hénon 写像に関連して首藤積分と呼ばれる振動積分の満たす微分方程式を完全 WKB 解析を用いて考察している.

Pearcey 系や首藤積分の満たす微分方程式は, [1] において完全 WKB 解析を多変数の微分方程式 (ホロノミック系) に拡張するための例として扱われ, WKB 解や変わり点, Stokes 集合 (Stokes 曲面) の定義が与えられた. また, [3] では Pearcey 系に対する WKB 解の Borel 変換を代数函数を用いて記述し, その性質を調べている. 一方, [13] において, 適切な仮定を満たす振動積分を解として持つ微分方程式の WKB 解は振動積分の漸近展開により得られることが示された. さらに, このようにして得られる WKB 解の Borel 総和可能性についても論じられた.

本稿では, Airy 積分や Pearcey 積分を一般化した A 型単純特異点を持つ多項式 t^{n+1} の変形

$$F(t, x) = t^{n+1} + \sum_{l=1}^{n-1} x_l t^l$$

から定まる振動積分の満たす微分方程式 $\mathcal{M}_n$ を考え, $\mathcal{M}_n$ の WKB 解の Borel 総和可能性が Stokes 集合で記述できることを示す. また, このことを証明するために, [14, 4, 11] などにおいて考察された振動積分に対する Stokes 集合が $\mathcal{M}_n$ の Stokes 集合と一致することも示す. さらに, $\mathcal{M}_n$ の Stokes 集合は半代数的集合であることも示す.

本稿の構成は次である: §2 では $\mathcal{M}_n$ の WKB 解, 変わり点, および Stokes 集合の定義を与える. また, [13] で与えられた振動積分の漸近展開を用いた WKB 解の構成についても述べる. §3 では本稿の主定理を述べ, これを用いると $\mathcal{M}_n$ の WKB 解の Borel 総和可能性が Stokes 集合で記述できることについて説明する. 主定理を得るために, §4 では $\mathcal{M}_n$ の WKB 解の Borel 総和可能性, §5 では $\mathcal{M}_n$ の Stokes 集合の性質について調べる.

本稿は 2023 年度に数理解析研究所で開催された RIMS 研究集会「可積分系数理における最近の進展」での講演をもとに作成したものである. このような機会を与えてくださった研究代表者である三木啓司先生 (同志社大学) に感謝申し上げます. また, 本稿の内容についてご議論いただいた京都でのセミナーの参加者の皆様にも感謝申し上げます.

§2. WKB 解, 変わり点, および Stokes 集合

ここでは微分方程式 $\mathcal{M}_n$ に対して, 完全 WKB 解析における基本的な対象である WKB 解, 変わり点, および Stokes 集合を定義する. 以下ではパラメタ η は $\eta > 0$ とする.

まず, [1] で述べられているように, $\mathcal{M}_n$ は

$$\mathcal{M}_n: P_j \psi = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

で与えられる. ただし, P_1 は

$$P_1 = (n+1)\eta^{-n} \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + \sum_{l=1}^{n-1} l x_l \eta^{-l+1} \frac{\partial^{l-1}}{\partial x_1^{l-1}}$$

であり, P_j ($j = 2, 3, \dots, n-1$) は

$$P_j = \eta^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j} - \eta^{-j} \frac{\partial^j}{\partial x_1^j}$$

である. これらの微分作用素は可換である. また, $\mathcal{M}_n$ は

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi \\ \eta^{-1} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \eta^{-n+2} \frac{\partial^{n-2} \psi}{\partial x_1^{n-2}} \\ \eta^{-n+1} \frac{\partial^{n-1} \psi}{\partial x_1^{n-1}} \end{pmatrix}$$

により

$$\eta^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} = \left\{ A(x)^j + \eta^{-1} \sum_{i=1}^{j-1} i A(x)^{j-i-1} \frac{\partial A}{\partial x_1}(x) A(x)^{i-1} \right\} \Psi \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

に変換できる. ただし, $A(x)$ は

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \frac{-x_1}{n+1} & \frac{-2x_2}{n+1} & \frac{-3x_3}{n+1} & \cdots & \frac{-(n-1)x_{n-1}}{n+1} & 0 \end{pmatrix}$$

である. $\mathcal{M}_n$ は $\mathbb{C}^{n-1}$ において特異点集合が空集合のホロノミック系であり, その階数は n である. 特に $\mathbb{C}^{n-1}$ の任意の点における $\mathcal{M}_n$ の正則関数解の次元は n である.

$\mathcal{M}_n$ の WKB 解は

$$\psi(x, \eta) = \eta^{-1/2} \exp \int^x \sum_{j=1}^{n-1} S_j(x, \eta) dx_j, \quad S_j(x, \eta) = \sum_{k=-1}^{\infty} S_{j,k}(x) \eta^{-k}$$

のかたちの解である. この WKB 解は

$$\psi(x, \eta) = e^{\eta \int^x \omega} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x) \eta^{-k-1/2}, \quad \omega = \sum_{j=1}^{n-1} S_{j,-1}(x) dx_j$$

と展開できる. ここで

$$(2.1) \quad S_j(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \log \psi(x, \eta)$$

が成り立つことに注意する. $\mathcal{M}_n$ については, 以下で述べるように n 個の WKB 解を構成することができる. まず, $P_1\psi = 0$ に対して [2] の議論を用いると $S_1(x, \eta)$ は

$$\exp\left(\eta^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)p\left(x, \zeta + \eta^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{(i+1)!}\frac{\partial^i S_1}{\partial x_1^i}(x, \eta)\right)\Bigg|_{z=\zeta=0} = 0$$

を満たす. ただし, $p(x, \zeta)$ は

$$p(x, \zeta) = (n+1)\zeta^n + \sum_{l=1}^{n-1} l x_l \zeta^{l-1}$$

である. これより $S_{1,-1}(x)$ は

$$p(x, S_{1,-1}(x)) = 0$$

を満たし, $S_{1,-1}(x)$ を定めれば $S_{1,k}(x)$ ($k = 0, 1, \dots$) は帰納的に一意に定まる. 次に $P_j\psi = 0$ ($j = 2, 3, \dots, n-1$) より

$$\eta^{-1}S_j(x, \eta) - \exp\left(\eta^{-1}\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\left(\zeta + \eta^{-1}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{(i+1)!}\frac{\partial^i S_1}{\partial x_1^i}(x, \eta)\right)^j\Bigg|_{z=\zeta=0} = 0$$

が成り立つので, $S_j(x, \eta)$ は $S_1(x, \eta)$ から一意的に定まる. 特に $S_{j,-1}(x) = S_{1,-1}(x)^j$ が成り立つことに注意する. 以上より $S_{1,-1}(x, \eta)$ を定めれば

$$\sum_{j=1}^{n-1} S_j(x, \eta) dx_j$$

が一意的に定まり, 従って WKB 解を得る. Pearcey 系 $\mathcal{M}_3$ の場合に [1, 6] で述べられているように, この 1 形式は閉形式である. 以下では $p(x, \zeta) = 0$ の ζ についての解を $\zeta_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) として, $S_{1,-1}(x) = \zeta_i(x)$ から定まる $S_j(x, \eta)$ を

$$S_{i,j}(x, \eta) = \sum_{k=-1}^{\infty} S_{i,j,k}(x) \eta^{-k}$$

と表し, WKB 解を

$$\begin{aligned} \psi_i(x, \eta) &= \eta^{-1/2} \exp \int^x \sum_{j=1}^{n-1} S_{i,j}(x, \eta) dx_j \\ &= e^{\eta \int^x \omega_i} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{i,k}(x) \eta^{-k-1/2} \end{aligned}$$

と表す. ただし, $S_{i,j,-1}(x) = S_{i,1,-1}(x)^j = \zeta_i(x)^j$ より

$$(2.2) \quad \omega_i = \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_i(x)^j dx_j$$

である.

このようにして構成された WKB 解は発散級数であるが, 完全 WKB 解析では η に関する Borel 総和法を用いて解析的な意味付けを与える.

Definition 2.1. $y_0, \varphi_k \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ から定まる形式級数

$$\varphi(\eta) = e^{\eta y_0} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \eta^{-k-\alpha}$$

は次を満たすとき, Borel 総和可能であるという:

- (i) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\Gamma(k+\alpha)} (y+y_0)^k$ は $y = -y_0$ の近傍で収束する.
- (ii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\Gamma(k+\alpha)} (y+y_0)^k$ は定数 $\rho > 0$ が存在して $\{y \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(y+y_0, \mathbb{R}_{\geq 0}) < \rho\}$ 上の正則関数に解析接続できる.

(iii) $\varphi(\eta)$ の Borel 変換

$$\varphi_B(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi_k}{\Gamma(k+\alpha)} (y+y_0)^{k+\alpha-1}$$

は定数 $R, C_1, C_2 > 0$ が存在して $\{y \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(y+y_0, \mathbb{R}_{\geq 0}) < \rho, |y| > R\}$ 上で $|\varphi_B(y)| \leq C_1 e^{C_2 |y|}$ を満たす.

$\varphi(\eta)$ が Borel 総和可能であるならば, $\varphi_B(y)$ の Laplace 積分

$$\Phi(\eta) = \int_{-y_0}^{\infty} e^{-\eta y} \varphi_B(y) dy$$

は well-defined であり, このとき $\Phi(\eta)$ を $\varphi(\eta)$ の Borel 和という. ただし, 積分路は正の実軸に平行に取るものとする.

以下では形式級数

$$\varphi(\eta) = \sum_{k=-1}^{\infty} \varphi_k \eta^{-k}$$

が Borel 総和可能であるとは

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\eta) &= \varphi(\eta) - (\varphi_{-1}\eta + \varphi_0) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{k+1} \eta^{-k-1} \end{aligned}$$

が Borel 総和可能であるときと定める. また, $\varphi(\eta)$ の Borel 和は

$$\Phi(\eta) = \varphi_{-1}\eta + \varphi_0 + \int_0^{\infty} e^{-\eta y} \tilde{\varphi}_B(y) dy$$

と定める.

WKB 解は x に依存しており, Borel 総和可能であるかどうかは x に依存する. Borel 総和可能な x の領域の記述に用いられる (ことが期待される) のが, 変わり点と Stokes 集合である. $\mathcal{M}_n$ の場合, 変わり点と Stokes 集合を次で定める.

Definition 2.2.

- (i) $x = a$ は $\omega_i(a) = \omega_{i'}(a)$ を満たす $i \neq i'$ が存在するとき, 変わり点と呼ぶ. 変わり点全体の集合を $\mathcal{T}$ で表し, 変わり点集合と呼ぶ.
- (ii) 次を満たす $x = s$ 全体の集合を $\mathcal{S}$ で表し, Stokes 集合と呼ぶ: $\omega_i(a) = \omega_{i'}(a)$ を満たす変わり点 $a \in \mathcal{T}$, および始点 $x = a$ と終点 $x = s$ を結ぶ滑らかな曲線 $\mathcal{C} : x = x(u)$ ($u \in [0, 1]$) であって, 任意の $r \in (0, 1]$ に対して

$$\Im \int_{\mathcal{C}_r} (\omega_i - \omega_{i'}) = 0$$

を満たすものが存在する. ただし, $\mathcal{C}_r$ は $x = x(u)$ ($u \in [0, r]$) により定まる曲線とする.

変わり点集合の定義における $\omega_i(a) = \omega_{i'}(a)$ は (2.2) より $\zeta_i(a) = \zeta_{i'}(a)$ を考えればよい. さらに, $\zeta_i(x), \zeta_{i'}(x)$ は $p(x, \zeta) = 0$ の ζ についての解であるので, 変わり点集合は

$$\mathcal{T} = \left\{ x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid p(x, \zeta) = \frac{\partial p}{\partial \zeta}(x, \zeta) = 0 \text{ を満たす } \zeta \in \mathbb{C} \text{ が存在} \right\}$$

で与えられる. ここで $p(0, \zeta) = (n+1)\zeta^n$ であるので $x = 0$ は任意の $i \neq i'$ に対して $\omega_i(0) = \omega_{i'}(0)$ を満たす変わり点である. また, $c' = (c_2, \dots, c_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-2}$ とし, $\mathcal{M}_n$ を

$$(2.3) \quad \{x = (x_1, x') \in \mathbb{C}^{n-1} \mid x' = c'\}$$

に制限することにより得られる微分方程式

$$\left((n+1)\eta^{-n} \frac{d^n}{dx_1^n} + \sum_{l=2}^{n-1} l c_l \eta^{-l+1} \frac{d^{l-1}}{dx_1^{l-1}} + x_1 \right) \psi = 0$$

の変わり点集合は

$$\left\{ (x_1, c') \in \mathbb{C}^{n-1} \mid p(x_1, c', \zeta) = \frac{\partial p}{\partial \zeta}(x_1, c', \zeta) = 0 \text{ を満たす } \zeta \in \mathbb{C} \text{ が存在} \right\}$$

であり, $\mathcal{M}_n$ の変わり点集合 $\mathcal{T}$ と (2.3) の共通部分に等しい.

$\mathcal{M}_n$ は振動積分を解に持つので, [13] の議論を用いれば, $\mathcal{M}_n$ の WKB 解を振動積分の漸近展開を用いて構成することができる. $F(t, x)$ の分岐集合 $\mathcal{B}$ を

$$\mathcal{B} = \left\{ x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t, x) = 0 \text{ を満たす } t \in \mathbb{C} \text{ が存在} \right\}$$

と定める. $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = p(x, t)$ より $\mathcal{B} = \mathcal{T}$ となることに注意する. $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0$ の t についての解を $t_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とする. WKB 解を構成するときに用いた $\zeta_i(x)$ は $p(x, \zeta) = 0$ の ζ についての解であり, $p(x, \zeta) = \frac{\partial F}{\partial t}(\zeta, x)$ であるので $t_i(x) = \zeta_i(x)$ が成り立つとしてよい. $\mathcal{B}$ の定め方より, $x \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{B}$ に対する $t_i(x)$ は $F(t, x)$ の t についての非退化な臨界点である. $x \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{B}$ に対して, $\Gamma_i(x)$ を $t = t_i(x)$ を通る $\Re F(t, x)$ の t についての最急降下路とする. これは $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場

$$V(t_R, t_I) = \left(\frac{\partial}{\partial t_R} \Re F(t_R + \sqrt{-1}t_I, x), \frac{\partial}{\partial t_I} \Re F(t_R + \sqrt{-1}t_I, x) \right)$$

の解曲線 $(t_R(s), t_I(s))$ ($s \in [0, \infty)$) から定まる $t(s) = t_R(s) + \sqrt{-1}t_I(s)$ を用いると

$$\Gamma_i(x) = \left\{ t_0 \in \mathbb{C} \left| \begin{array}{l} V(t_R, t_I) \text{ の解曲線から定まる } t(s) \text{ であって} \\ t(0) = t_0, \lim_{s \rightarrow \infty} t(s) = t_i(x) \text{ を満たすものが存在} \end{array} \right. \right\}$$

と表すことができる. ここで $\Im F(t, x) = \Im F(t_i(x), x)$ ($t \in \Gamma_i(x)$) が成り立つことに注意する. この $\Gamma_i(x)$ を積分路とした振動積分

$$\Psi_i^{\text{int}}(x, \eta) = \int_{\Gamma_i(x)} e^{\eta F(t, x)} dt$$

の $\eta \rightarrow \infty$ についての漸近展開は

$$(2.4) \quad \psi_i^{\text{int}}(x, \eta) = e^{\eta y_i(x)} \sum_{k=0}^{\infty} \psi_{i,k}^{\text{int}}(x) \eta^{-k-1/2}$$

で与えられ, この $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ は $S_{1,-1}(x) = \zeta_i(x)$ から定まる $\mathcal{M}_n$ の WKB 解となる. ここで $y_i(x) = F(t_i(x), x)$ である. また

$$(2.5) \quad \psi_{i,0}^{\text{int}}(x) = \pm \sqrt{\frac{-2\pi}{\frac{\partial^2 F}{\partial t^2}(t_i(x), x)}}$$

であり, $\pm$ は積分路の向きにより定まる. さらに x が

$$(2.6) \quad \overline{\Gamma_i(x)} \cap \{t_1(x), \dots, t_{i-1}(x), t_{i+1}(x), \dots, t_n(x)\} = \emptyset$$

を満たせば $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ は Borel 総和可能であり, その Borel 和は $\Psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ に一致する. ただし, $\overline{\Gamma_i(x)}$ は $\Gamma_i(x)$ の閉包である.

$\Im F(t, x) = \Im F(t_i(x), x)$ ($t \in \Gamma_i(x)$) より

$$\{\Im y_i(x)\} \cap \{\Im y_1(x), \dots, \Im y_{i-1}(x), \Im y_{i+1}(x), \dots, \Im y_n(x)\} = \emptyset$$

を満たす x は (2.6) を満たす. そこで次を考える.

Definition 2.3. 集合

$$\mathcal{S}^{\text{int}} = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \Im y_i(x) = \Im y_{i'}(x) \text{ を満たす } i \neq i' \text{ が存在}\}$$

を振動積分に対する Stokes 集合と呼ぶ.

ここで $x \in \mathcal{B}$ に対しては $y_i(x) = y_{i'}(x)$ を満たす $i \neq i'$ が存在するので, $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}^{\text{int}}$ が成り立つことに注意する. §1 で述べたように, $\mathcal{S}^{\text{int}}$ は例えば [14, 4, 11] において考察されている. ただし, [14, 11] においては $\Im y_i(x) = \Im y_{i'}(x)$ ではなく, $\Re y_i(x) = \Re y_{i'}(x)$ を考えている.

以上で述べたことにより, $x \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}^{\text{int}}$ において $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) は Borel 総和可能である. つまり, 振動積分の漸近展開により得られる WKB 解の Borel 総和可能性は $\mathcal{S}^{\text{int}}$ で記述することができる.

§ 3. 主定理

本稿の主定理は次である.

Theorem 3.1. $\tilde{S}_{i,j}(x, \eta)$ を

$$\tilde{S}_{i,j}(x, \eta) = S_{i,j}(x, \eta) - (S_{i,j,-1}(x)\eta + S_{i,j,0}(x))$$

と定め, その Borel 変換を $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ とする. このとき, 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}$ に対して次が成り立つ:

- 定数 $\rho > 0$ が存在して $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ は $K \times \Sigma_\rho$ 上の正則関数である.
- 定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ は $K \times \Sigma_\rho$ 上で

$$(3.1) \quad \left| \tilde{S}_{i,j,B}(x, y) \right| \leq C_1 e^{C_2 |y|}$$

を満たす.

ただし, $\Sigma_\rho = \{y \in \mathbb{C} \mid \text{dist}(y, \mathbb{R}_{\geq 0}) < \rho\}$ とする. これより $x \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}$ において $S_{i,j}(x, \eta)$ は Borel 総和可能である.

これは Proposition 4.1 と Proposition 5.1 を合わせるにより得ることができる.

Theorem 3.1 の評価 (3.1) の C_1, C_2 は x に依存しないことに注意すると, $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}$ 内の曲線 ℓ に対して

$$\int_{\ell} \sum_{j=1}^{n-1} S_{i,j}(x, \eta) dx_j$$

は Borel 総和可能である. これより $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}$ 内の x を終点とする曲線 ℓ_x から定まる WKB 解

$$\psi_i(x, \eta) = \eta^{-1/2} \exp \int_{\ell_x} \sum_{j=1}^{n-1} S_{i,j}(x, \eta) dx_j$$

は Borel 総和可能である. つまり, $\mathcal{M}_n$ の WKB 解の Borel 総和可能性を $\mathcal{S}$ で記述することができる. ただし, $\mathcal{S}$ は Borel 総和可能性を完全に記述していない. つまり, 次の例で述べるように, $s \in \mathcal{S}$ であっても $S_{i,j}(s, \eta)$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n-1$) が Borel 総和可能な場合がある.

Example 3.2. $F(t, x) = t^4 + x_2 t^2 + x_1 t$ から定まる Pearcey 系 $\mathcal{M}_3$ を考える. Figure 1 は $\mathcal{M}_3$ の Stokes 集合 $\mathcal{S}$ と

$$(3.2) \quad \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2 \mid x_2 = 1 + \sqrt{-1}\}$$

の共通部分を描いたものである. ただし, (3.2) は x_1 だけを考えることにより複素平面と同一視している. ここで Figure 1 の $x = a^{(1)}, a^{(2)}$ は $\mathcal{M}_3$ の変わり点であり, $x = v$ は後述する $\mathcal{M}_3$ の仮想的変わり点である. $x = v$ を通る直線は変わり点 $x = a^{(1)}, a^{(2)}$ とは離れているが, この直線は Stokes 集合 $\mathcal{S}$ に含まれている. 実際, Figure 1 の直線上の点 $x = s$ における $t_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$) を Figure 2 のように番号付けすると $\Im y_1(s) = \Im y_3(s)$ が成り立つので $s \in \mathcal{S}^{\text{int}}$ であり, 従って Proposition 5.1 より $s \in \mathcal{S}$ となる. また, Figure 2 の $\Gamma_i(s)$ は $t = t_i(s)$ を通る $\Re F(t, s)$ の最急降下路である. これより

$$\overline{\Gamma_1(s)} \cap \{t_2(s), t_3(s)\} = \overline{\Gamma_2(s)} \cap \{t_1(s), t_3(s)\} = \overline{\Gamma_3(s)} \cap \{t_1(s), t_2(s)\} = \emptyset$$

が成り立つので $\psi_i^{\text{int}}(s, \eta)$ ($i = 1, 2, 3$) は Borel 総和可能であり, 従って Proposition 4.1 より $S_{i,j}(s, \eta)$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) は Borel 総和可能であることがわかる. さらに

$$(3.3) \quad \left\{x \in \mathbb{C}^2 \mid \overline{\Gamma_i(x)} \cap \{t_{i'}(x)\} \neq \emptyset \text{ となる } i \neq i' \text{ が存在}\right\}$$

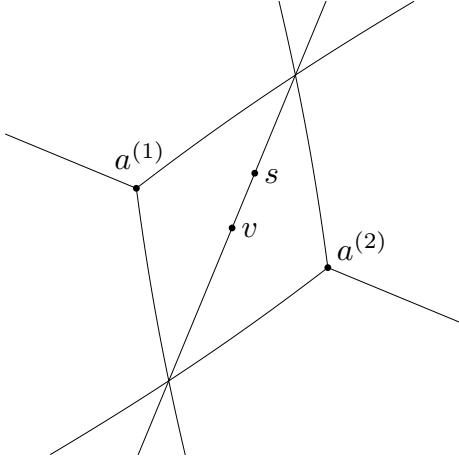
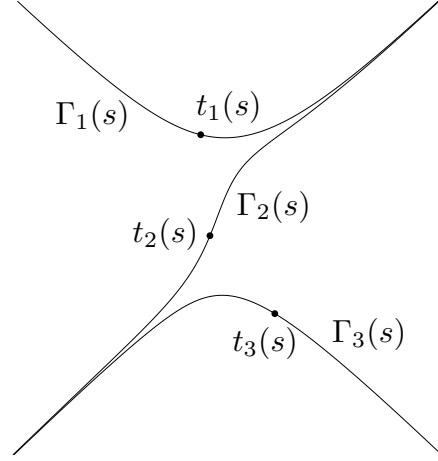
の $\mathbb{C}^2$ における補集合の点 x においても $S_{i,j}(x, \eta)$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) は Borel 総和可能であることがわかる. ここで (3.3) の集合は $\mathcal{S}$ の真部分集合であることに注意する.

一方, 高階の微分方程式では変わり点だけでなく, 仮想的変わり点を考えることが重要である. ここで仮想的変わり点は $\mathcal{M}_3$ の場合は $t_i(v) \neq t_{i'}(v), y_i(v) = y_{i'}(v)$ を満たす $i \neq i'$ が存在する $x = v$ で与えられる. $\mathcal{M}_3$ の仮想的変わり点全体の集合は $\mathcal{S}$ の部分集合であるが, (3.3) の集合とは共通部分を持たないことに注意する. (仮想的変わり点については [8] を参照.)

§ 4. WKB 解の Borel 総和可能性

振動積分の漸近展開により得られる形式級数 $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ が $S_{1,-1}(x) = \zeta_i(x)$ から定まる WKB 解であるということは, $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ は

$$\psi_i(x, \eta) = \eta^{-1/2} \exp \int_x \sum_{j=1}^{n-1} S_{i,j}(x, \eta) dx_j$$

Figure 1: $\mathcal{M}_3$ の Stokes 集合 $\mathcal{S}$ と (3.2) の共通部分Figure 2: 最急降下路 $\Gamma_i(s)$ ($i = 1, 2, 3$)

の積分を適切に定めると得られることを意味する. 実は, $S_{i,j}(x, \eta)$ は $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ で表すことができ, これを用いると $S_{i,j}(x, \eta)$ や $\psi_i(x, \eta)$ の Borel 総和可能性を $\mathcal{S}^{\text{int}}$ で記述することができる.

Proposition 4.1. $S_{i,j}(x, \eta)$ について

$$(4.1) \quad S_{i,j}(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \log \psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$$

が成り立つ. これより $\tilde{S}_{i,j}(x, \eta)$ の Borel 変換 $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ は任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}^{\text{int}}$ に対して次を満たす:

- 定数 $\rho > 0$ が存在して $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ は $K \times \Sigma_\rho$ 上の正則関数である.
- 定数 $C_1, C_2 > 0$ が存在して $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ は $K \times \Sigma_\rho$ 上で

$$|\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)| \leq C_1 e^{C_2 |y|}$$

を満たす.

証明には次を用いる.

Lemma 4.2. 形式級数

$$\varphi(\eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k \eta^{-k}$$

の Borel 変換 $\varphi_B(y)$ は定数 $\rho, C_1, C_2 > 0$ が存在して Σ_ρ 上の正則関数であり, Σ_ρ 上で

$$|\varphi_B(y)| \leq C_1 e^{C_2 |y|}$$

を満たすとする. このとき, $\varphi(\eta)$ の l 個の積 $\varphi^{(l)}(\eta) = \varphi(\eta)^l$ の Borel 変換 $\varphi_B^{(l)}(y)$ は Σ_ρ 上の正則函数であり, Σ_ρ 上で

$$|\varphi_B^{(l)}(y)| \leq \frac{1}{(l-1)!} C_1^l |y|^{l-1} e^{C_2|y|}$$

を満たす.

Proof. l の場合に成り立つとして, $l+1$ の場合に示す. まず, $\varphi^{(l+1)}(\eta)$ の Borel 変換 $\varphi_B^{(l+1)}(y)$ は $[0, 1]$ 上の積分

$$(4.2) \quad \varphi_B^{(l+1)}(y) = \int_0^1 \varphi_B^{(l)}(ys) \varphi_B(y(1-s)) y ds$$

で表すことができる. 実際,

$$\varphi^{(l)}(\eta) = \sum_{k=l}^{\infty} \varphi_k^{(l)} \eta^{-k}$$

とすると

$$\begin{aligned} \varphi^{(l+1)}(\eta) &= \varphi(\eta)^l \varphi(\eta) \\ &= \sum_{k_1=l}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \varphi_{k_1}^{(l)} \varphi_{k_2} \eta^{-k_1-k_2} \end{aligned}$$

であるので $|y| < \rho$ を満たす y に対して

$$\begin{aligned} \int_0^1 \varphi_B^{(l)}(ys) \varphi_B(y(1-s)) y ds &= \int_0^1 \sum_{k_1=l}^{\infty} \frac{\varphi_{k_1}^{(l)}}{\Gamma(k_1)} (ys)^{k_1-1} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\varphi_{k_2}}{\Gamma(k_2)} (y(1-s))^{k_2-1} y ds \\ &= \sum_{k_1=l}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\varphi_{k_1}^{(l)} \varphi_{k_2}}{\Gamma(k_1) \Gamma(k_2)} B(k_1, k_2) y^{k_1+k_2-1} \\ &= \sum_{k_1=l}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{\varphi_{k_1}^{(l)} \varphi_{k_2}}{\Gamma(k_1+k_2)} y^{k_1+k_2-1} \\ &= \varphi_B^{(l+1)}(y) \end{aligned}$$

が成り立つ. $y \in \Sigma_\rho$ に対して $ys, y(1-s) \in \Sigma_\rho$ ($s \in [0, 1]$) となるので, (4.2) より $\varphi_B^{(l+1)}(y)$ は Σ_ρ 上の正則函数であることがわかる. さらに

$$\begin{aligned} |\varphi_B^{(l+1)}(y)| &\leq \int_0^1 |\varphi_B^{(l)}(ys)| |\varphi_B(y(1-s))| |y| ds \\ &\leq \int_0^1 \frac{1}{(l-1)!} C_1^l (|y|s)^{l-1} e^{C_2|y|s} \cdot C_1 e^{C_2|y|(1-s)} |y| ds \\ &= \frac{1}{l!} C_1^{l+1} |y|^l e^{C_2|y|} \end{aligned}$$

が成り立つ. □

Proof of Proposition 4.1. (2.1) は

$$S_{i,j}(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \log \psi_i(x, \eta)$$

であるので, 特に $\psi_i(x, \eta)$ として $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ を用いると (4.1) が成り立つ.

次に $\tilde{S}_{i,j}(x, \eta)$ の Borel 変換 $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ について考える. (2.4) より (4.1) は

$$S_{i,j}(x, \eta) = \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(x) \eta + \frac{\partial}{\partial x_j} \log \psi_{i,0}^{\text{int}}(x) + \frac{\partial}{\partial x_j} \log \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_{i,k}^{\text{int}}(x)}{\psi_{i,0}^{\text{int}}(x)} \eta^{-k} \right)$$

となる. これより

$$\tilde{S}_{i,j}(x, \eta) = \frac{\partial}{\partial x_j} \log \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_{i,k}^{\text{int}}(x)}{\psi_{i,0}^{\text{int}}(x)} \eta^{-k} \right)$$

を得る. (2.5) より $\psi_{i,0}^{\text{int}}(x) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($x \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{B}$) であり, $\mathcal{B} \subset \mathcal{S}^{\text{int}}$ なので, $\psi_{i,0}^{\text{int}}(x) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ($x \in \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}^{\text{int}}$) となることに注意する. $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ の性質を調べるために $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ の Borel 変換 $\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y)$ を考える. ここで $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ の y と $\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y)$ の y は異なるので, 以下では $\tilde{S}_{i,j,B}(x, y)$ の y を $\tilde{y}$ で表す. $\tilde{y}$ と y の関係は $\tilde{y} = y + y_i(x)$ である. (2.4) より

$$\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\psi_{i,k}^{\text{int}}(x)}{\Gamma(k+1/2)} (y + y_i(x))^{k-1/2}$$

であるので, $\tilde{y}^{1/2} \psi_{i,B}^{\text{int}}(x, \tilde{y} - y_i(x))$ は $\tilde{y}$ の函数として $\tilde{y} = 0$ において正則である. [13] より $\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y)$ は $F(t, x) + y = 0$ の t についての解 $t_{i,\pm}(x, y)$ を用いて

$$\begin{aligned} \psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y) &= \frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial t}(t_{i,+}(x, y), x)} - \frac{-1}{\frac{\partial F}{\partial t}(t_{i,-}(x, y), x)} \\ &= \frac{\partial t_{i,+}}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial t_{i,-}}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

と表される. 従って $\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y)$ は

$$(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}) \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \mid F(t, x) + y = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\}$$

上の多価正則函数に解析接続することができる. また, $y_i(x)$ の定義より, $F(t, x) + y = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0$ を満たす y は $y = -y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で与えられる. 従って, $\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y)$ は y については $\mathbb{C} \setminus \{-y_1(x), -y_2(x), \dots, -y_n(x)\}$ 上の多価正則函数に解析接続できる. ここまでに述べた性質を用いて $\tilde{S}_{i,j,B}(x, \tilde{y})$ の性質を調べる. 以下では $\varepsilon > 0$ に対して $\bar{K}_\varepsilon = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid \text{dist}(x, K) \leq \varepsilon\}$ と定め, $\bar{K}_\varepsilon \subset \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}^{\text{int}}$ を満たす ε を考える.

$\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y)$ の性質より, $\tilde{y}^{1/2}\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, \tilde{y} - y_i(x))$ は定数 $\delta, C > 0$ が存在して $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\delta$ 上の正則関数であり, $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\delta$ 上で

$$\left| \tilde{y}^{1/2}\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, \tilde{y} - y_i(x)) \right| \leq C \left(1 + |\tilde{y}|^{1/2} \right)$$

を満たす. $\varphi_i(x, \eta)$ を

$$\varphi_i(x, \eta) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_{i,k}^{\text{int}}(x)}{\psi_{i,0}^{\text{int}}(x)} \eta^{-k}$$

とし, その Borel 変換を考える. $\varphi_i(x, \eta)$ の Borel 変換は

$$\begin{aligned} \varphi_{i,B}(x, \tilde{y}) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_{i,k}^{\text{int}}(x)}{\Gamma(k)\psi_{i,0}^{\text{int}}(x)} \tilde{y}^{k-1} \\ &= \frac{1}{\psi_{i,0}^{\text{int}}(x)} \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^{-1/2} \psi_{i,B}^{\text{int}}(x, \tilde{y} - y_i(x)) \end{aligned}$$

で与えられる. ただし,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^{-1/2} \psi_{i,B}^{\text{int}}(x, \tilde{y} - y_i(x)) = \frac{1}{\Gamma(1/2)} \int_0^{\tilde{y}} (\tilde{y} - t)^{-1/2} \psi_{i,B}^{\text{int}}(x, t - y_i(x)) dt$$

である. これは $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\delta$ 上の正則関数であり, $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\delta$ 上で

$$\begin{aligned} \left| \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}} \right)^{-1/2} \psi_{i,B}^{\text{int}}(x, \tilde{y} - y_i(x)) \right| &\leq \pi^{1/2} C \left(1 + \frac{2}{\pi} |\tilde{y}|^{1/2} \right) \\ &\leq 2\pi^{1/2} C e^{|\tilde{y}|} \end{aligned}$$

が成り立つ. 従って $0 < \rho < \delta$ を満たす ρ に対して $\varphi_{i,B}(x, \tilde{y})$ は $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\rho$ 上の正則関数であり, $\tilde{y}$ についての Cauchy の評価式より $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\rho$ 上で

$$|\varphi_{i,B}(x, \tilde{y})| \leq C' e^{|\tilde{y}|}$$

を満たす. ただし,

$$C' = \sup_{x \in \overline{K}_\varepsilon} \left| \frac{1}{\psi_{i,0}^{\text{int}}(x)} \right| \frac{2\pi^{1/2} e^{\delta-\rho} C}{\delta - \rho}$$

とした. よって

$$\phi_i(x, \eta) = \log(1 + \varphi_i(x, \eta))$$

の Borel 変換 $\phi_{i,B}(x, \tilde{y})$ は $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\rho$ 上の正則関数であり, $\overline{K}_\varepsilon \times \Sigma_\rho$ 上で

$$\begin{aligned} |\phi_{i,B}(x, \tilde{y})| &\leq \frac{e^{(C'+1)|\tilde{y}|} - e^{|\tilde{y}|}}{|\tilde{y}|} \\ &\leq C' e^{(C'+1)|\tilde{y}|} \end{aligned}$$

が成り立つ. ここで

$$\phi_i(x, \eta) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \varphi_i(x, \eta)^l$$

と展開し, Lemma 4.2 を用いた. 以上より $\tilde{S}_{i,j}(x, \eta) = \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j}(x, \eta)$ の Borel 変換 $\tilde{S}_{i,j,B}(x, \tilde{y})$ は $K \times \Sigma_\delta$ 上の正則関数であり, x_j についての Cauchy の評価式より $K \times \Sigma_\rho$ 上で

$$\left| \tilde{S}_{i,j,B}(x, \tilde{y}) \right| \leq \frac{C'}{\varepsilon} e^{(C'+1)|\tilde{y}|}$$

を満たす. 従って, $C_1 = C'/\varepsilon, C_2 = C' + 1$ とすれば結論を得る. $\square$

Proposition 4.1 より, Theorem 3.1 の後に述べたのと同様にして $S_{i,j}(x, \eta)$ や $\psi_i(x, \eta)$ の Borel 総和可能性を $\mathcal{S}^{\text{int}}$ で記述することができる. さらに, $\mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S}^{\text{int}} (= \mathbb{C}^{n-1} \setminus \mathcal{S})$ 内の $x = x_0$ を始点, x を終点とする曲線 $\ell_{x_0, x}$ から定まる WKB 解

$$\psi_i(x, \eta) = \eta^{-1/2} \exp \int_{\ell_{x_0, x}} \sum_{j=1}^{n-1} S_{i,j}(x, \eta) dx_j$$

は (4.1) より

$$\begin{aligned} \psi_i(x, \eta) &= \eta^{-1/2} \exp \int_{\ell_{x_0, x}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_j} \log \psi_i^{\text{int}}(x, \eta) dx_j \\ &= \eta^{-1/2} \frac{\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)}{\psi_i^{\text{int}}(x_0, \eta)} \end{aligned}$$

となるので, $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ の Borel 和は

$$\Psi_i^{\text{int}}(x, \eta) = \int_{\Gamma_i(x)} e^{\eta F(t, x)} dt$$

であることに注意すると, $\psi_i(x, \eta)$ の Borel 和は

$$\begin{aligned} \Psi_i(x, \eta) &= \eta^{-1/2} \frac{\Psi_i^{\text{int}}(x, \eta)}{\Psi_i^{\text{int}}(x_0, \eta)} \\ &= \eta^{-1/2} \int_{\Gamma_i(x)} e^{\eta F(t, x)} dt \Big/ \int_{\Gamma_i(x_0)} e^{\eta F(t, x_0)} dt \end{aligned}$$

で与えられる. この関係を用いることにより WKB 解の Borel 和の性質と振動積分の性質を互いに翻訳することができる.

Remark. Proposition 4.1 の証明で述べたように, $\psi_i^{\text{int}}(x, \eta)$ の Borel 変換 $\psi_{i,B}^{\text{int}}(x, y)$ は

$$(\mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}) \setminus \left\{ (x, y) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} \mid F(t, x) + y = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0 \right\}$$

上の多価正則函数に解析接続することができる. これより $\varphi_i(x, \eta)$ の Borel 変換 $\varphi_{i,B}(x, y)$ は endlessly continuable であり, 従って $\varphi_i(x, \eta)$ は resurgent 函数となる. さらに, [9] の結果を用いれば, $S_{i,j}(x, \eta)$ や WKB 解 $\psi_i(x, \eta)$ の resurgence 性についても調べることができる. (endlessly continuable や resurgent 函数については例えば [5] を参照.)

§ 5. Stokes 集合の性質

ここでは $\mathcal{M}_n$ の Stokes 集合 $\mathcal{S}$ の性質について述べる. $\mathcal{S}$ と $\mathcal{S}^{\text{int}}$ の関係は次である.

Proposition 5.1.

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}^{\text{int}}.$$

Proof. 最初に $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}^{\text{int}}$ を示す. $s \in \mathcal{S}$ とする. $\mathcal{S}$ の定義より, $\omega_i(a) = \omega_{i'}(a)$ を満たす変わり点 $a \in \mathcal{T}$, および始点 $x = a$ と終点 $x = s$ を結ぶ滑らかな曲線 $\mathcal{C} : x = x(u)$ ($u \in [0, 1]$) であって, 任意の $r \in (0, 1]$ に対して

$$\Im \int_{\mathcal{C}_r} (\omega_i - \omega_{i'}) = 0$$

を満たすものが存在する. まず, 任意の $r \in [0, 1]$ に対して

$$(5.1) \quad y_i(x(r)) - y_{i'}(x(r)) = \int_{\mathcal{C}_r} (\omega_i - \omega_{i'})$$

が成り立つことを示す. $y_i(x(r)) = F(t_i(x(r)), x(r))$ を r で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} y_i(x(r)) &= \frac{\partial F}{\partial t}(t_i(x(r)), x(r)) \frac{d}{dr} t_i(x(r)) + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_j}(t_i(x(r)), x(r)) \frac{dx_j}{du}(r) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_i(x(r))^j \frac{dx_j}{du}(r) \end{aligned}$$

を得る. ここで $t_i(x) = \zeta_i(x)$ であることを用いた. また, $x(u) = (x_1(u), x_2(u), \dots, x_{n-1}(u))$ として $x_j(u)$ ($j = 1, 2, \dots, n-1$) を定めると, (2.2) より

$$\int_{\mathcal{C}_r} \omega_i = \int_0^r \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_i(x(u))^j \frac{dx_j}{du}(u) du$$

となるので

$$\frac{d}{dr} \int_{\mathcal{C}_r} \omega_i = \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_i(x(r))^j \frac{dx_j}{du}(r)$$

を得る. 従って

$$\frac{d}{dr} y_i(x(r)) = \frac{d}{dr} \int_{\mathcal{C}_r} \omega_i$$

となるので, 定数 c_i が存在して

$$y_i(x(r)) = \int_{C_r} \omega_i + c_i$$

が成り立つ. 同様に定数 $c_{i'}$ が存在して

$$y_{i'}(x(r)) = \int_{C_r} \omega_{i'} + c_{i'}$$

が成り立つ. よって

$$(5.2) \quad y_i(x(r)) - y_{i'}(x(r)) = \int_{C_r} (\omega_i - \omega_{i'}) + c_i - c_{i'}$$

を得る. ここで $x(0) = a$ であり, $\omega_i(a) = \omega_{i'}(a)$ より $\zeta_i(a) = \zeta_{i'}(a)$ が成り立つので

$$\begin{aligned} y_i(x(0)) - y_{i'}(x(0)) &= F(t_i(a), a) - F(t_{i'}(a), a) \\ &= F(\zeta_i(a), a) - F(\zeta_{i'}(a), a) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. これより (5.2) に $r = 0$ を代入すると $c_i - c_{i'} = 0$ であることがわかるので (5.1) を得る. (5.1) より任意の $r \in (0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} \Im(y_i(x(r)) - y_{i'}(x(r))) &= \Im \int_{C_r} (\omega_i - \omega_{i'}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

が成り立ち, 特に $r = 1$ とすると $x(1) = s$ であるので

$$\Im(y_i(s) - y_{i'}(s)) = 0$$

を得る. 以上より $s \in \mathcal{S}^{\text{int}}$ である.

次に $\mathcal{S}^{\text{int}} \subset \mathcal{S}$ を示す. $s \in \mathcal{S}^{\text{int}}$ とする. $\mathcal{S}^{\text{int}}$ の定義より $\Im y_i(s) = \Im y_{i'}(s)$ を満たす $i \neq i'$ が存在する. $x(u) = u \cdot s$ と定め, 始点 $x = 0$ と終点 $x = s$ を結ぶ曲線 $\mathcal{C} : x = x(u)$ ($u \in [0, 1]$) を考える. ただし, $u \in \mathbb{C}, s = (s_1, s_2, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ に対して

$$u \cdot s = (u^{n/(n+1)} s_1, u^{(n-1)/(n+1)} s_2, \dots, u^{2/(n+1)} s_{n-1})$$

と定める. $\mathcal{C}$ の始点 $x = 0$ は任意の $i \neq i'$ に対して $\omega_i(0) = \omega_{i'}(0)$ を満たす変わり点であったことに注意する. また, C_r を $x = x(u)$ ($u \in [0, r]$) により定まる曲線とする. $u, t \in \mathbb{C}$ に対して $u \cdot t = u^{1/(n+1)} t$ と定めると $F(u \cdot t, u \cdot s) = u F(t, s)$ が成り立つので

$$\frac{\partial F}{\partial t}(u \cdot t, u \cdot s) = u^{n/(n+1)} \frac{\partial F}{\partial t}(t, s)$$

を得る. 従って

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t_i(u \cdot s), u \cdot s) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial t}(u \cdot t_i(s), u \cdot s) = 0$$

より

$$t_i(u \cdot s) = u \cdot t_i(s)$$

が成り立つ. これより

$$\zeta_i(x(u)) = u^{1/(n+1)} t_i(s)$$

となり, $x_j(u) = u^{(n-j+1)/(n+1)} s_j$ より

$$\frac{dx_j}{du}(u) = \frac{n-j+1}{n+1} u^{-j/(n+1)} s_j$$

となるので

$$\begin{aligned} \int_{C_r} \omega_i &= \int_0^r \sum_{j=1}^{n-1} \zeta_i(x(u))^j \frac{dx_j}{du}(u) du \\ &= \int_0^r \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j+1}{n+1} s_j t_i(s)^j du \\ &= r \sum_{j=1}^{n-1} \frac{n-j+1}{n+1} s_j t_i(s)^j \\ &= r \left(F(t_i(s), s) - \frac{1}{n+1} t_i(s) \frac{\partial F}{\partial t}(t_i(s), s) \right) \\ &= r F(t_i(s), s) \\ &= r y_i(s) \end{aligned}$$

を得る. ここで $\frac{\partial F}{\partial t}(t_i(s), s) = 0$ を用いた. 同様にして

$$\int_{C_r} \omega_{i'} = r y_{i'}(s)$$

を得る. これより任意の $r \in (0, 1]$ に対して

$$\begin{aligned} \Im \int_{C_r} (\omega_i - \omega_{i'}) &= r \Im (y_i(s) - y_{i'}(s)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる. 以上より $s \in \mathcal{S}$ である. □

最後に次を示す.

Theorem 5.2. $\mathcal{S}^{\text{int}}$ は半代数的集合である.

ここでは $x \in \mathbb{C}^{n-1}$ を実部 $x_R \in \mathbb{R}^{n-1}$, 虚部 $x_I \in \mathbb{R}^{n-1}$ を用いて $x = x_R + \sqrt{-1}x_I$ と表し, x に (x_R, x_I) を対応させることによって $\mathbb{C}^{n-1}$ を $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ と同一視している. また, 半代数的集合とは有限個の実係数多項式の方程式, あるいは不等式で定義される集合である. 半代数的集合に対しては, その射影による像も半代数的集合になるという Tarski-Seidenberg の定理が知られている.

Theorem 5.2 の主張は [11] において証明なしで述べられている. また, Proposition 5.1 と Theorem 5.2 を合わせると $\mathcal{S}$ は半代数的集合であることがわかる. Pearcey 系 $\mathcal{M}_3$ の $\mathcal{S}$ が半代数的集合であることについては, [3] において証明が与えられている.

Proof. $p_F(x, y)$ を $F(t, x) - y$ と $\frac{\partial F}{\partial t}(t, x)$ の t についての終結式として定まる多項式とする. $F(t, x) - y = \frac{\partial F}{\partial t}(t, x) = 0$ を満たす y は $y = y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で与えられるので, $p_F(x, y) = 0$ の y についての解は $y_i(x)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) である. $\mathcal{S}^{\text{int}}$ の条件における $\Im y_i(x) = \Im y_{i'}(x)$ は, $y_i(x) - y_{i'}(x) = r$ を満たす $r \in \mathbb{R}$ が存在することを意味する. また, $y_i(x), y_{i'}(x) = y_i(x) + r$ はともに $p_F(x, y) = 0$ の y についての解である. このことに注意すると

$$\mathcal{S}^{\text{int}} = \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \mathcal{S}_r^{\text{int}}$$

が成り立つ. ただし, $\mathcal{S}_r^{\text{int}}$ は $r \neq 0$ のときは

$$\mathcal{S}_r^{\text{int}} = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid p_F(x, y) = p_F(x, y + r) = 0 \text{ を満たす } y \in \mathbb{C} \text{ が存在}\}$$

と定め, $r = 0$ のときは

$$\mathcal{S}_0^{\text{int}} = \left\{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid p_F(x, y) = \frac{\partial p_F}{\partial y}(x, y) = 0 \text{ を満たす } y \in \mathbb{C} \text{ が存在}\right\}$$

と定める. $\mathcal{S}_r^{\text{int}}$ ($r \neq 0$) は

$$\tilde{p}_F(x, y, r) = \frac{p_F(x, y + r) - p_F(x, y)}{r}$$

を用いると

$$\mathcal{S}_r^{\text{int}} = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid p_F(x, y) = \tilde{p}_F(x, y, r) = 0 \text{ を満たす } y \in \mathbb{C} \text{ が存在}\}$$

と書き換えられる. $\mathcal{S}_0^{\text{int}}$ は, $p_F(x, y)$ を

$$p_F(x, y) = \sum_{j=0}^n p_{F,j}(x) y^j$$

と表すと

$$\tilde{p}_F(x, y, r) = \sum_{j=1}^n p_{F,j}(x) \sum_{k=0}^{j-1} \binom{j}{k} y^k r^{j-k-1}$$

より $\tilde{p}_F(x, y, 0) = \frac{\partial p_F}{\partial y}(x, y)$ となるので

$$\mathcal{S}_0^{\text{int}} = \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid p_F(x, y) = \tilde{p}_F(x, y, 0) = 0 \text{ を満たす } y \in \mathbb{C} \text{ が存在}\}$$

と書き換えられる. 以上より

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{int}} &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid p_F(x, y) = \tilde{p}_F(x, y, r) = 0 \text{ を満たす } y \in \mathbb{C} \text{ が存在}\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{C}^{n-1} \mid P_F(x, r) = 0\} \end{aligned}$$

が成り立つ. ただし, $P_F(x, r)$ は $p_F(x, y)$ と $\tilde{p}_F(x, y, r)$ の y についての終結式として定まる多項式である. さらに, $\mathbb{C}^{n-1}$ を $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ を同一視すると

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^{\text{int}} &= \bigcup_{r \in \mathbb{R}} \left\{ (x_R, x_I) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} \mid P_{F,R}(x_R, x_I, r) = P_{F,I}(x_R, x_I, r) = 0 \right\} \\ &= \pi \left(\left\{ (x_R, x_I, r) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R} \mid P_{F,R}(x_R, x_I, r) = P_{F,I}(x_R, x_I, r) = 0 \right\} \right) \end{aligned}$$

となる. ただし, $P_{F,R}(x_R, x_I, r), P_{F,I}(x_R, x_I, r)$ はそれぞれ

$$P_{F,R}(x_R, x_I, r) = \Re P_F(x_R + \sqrt{-1}x_I, r), \quad P_{F,I}(x_R, x_I, r) = \Im P_F(x_R + \sqrt{-1}x_I, r)$$

として定まる実係数多項式であり, π は $\pi(x_R, x_I, r) = (x_R, x_I)$ として定まる $\mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R}$ から $\mathbb{R}^{2(n-1)}$ への射影である. よって, $\mathcal{S}^{\text{int}}$ は代数的集合

$$\left\{ (x_R, x_I, r) \in \mathbb{R}^{2(n-1)} \times \mathbb{R} \mid P_{F,R}(x_R, x_I, r) = P_{F,I}(x_R, x_I, r) = 0 \right\}$$

の射影 π による像であるので, Tarski-Seidenberg の定理より半代数的集合である. $\square$

References

- [1] 青木貴史, ホロノミー系の完全 WKB 解析に向けて, 数理解析研究所講究録 (2005), no. 1433, 1–8.
- [2] Aoki, T., Kawai, T., Koike, T. and Takei, Y., On the exact WKB analysis of operators admitting infinitely many phases, Adv. Math. **181** (2004), no. 1, 165–189.
- [3] Aoki, T., Suzuki, T. and Uchida, S., The Borel transform of the WKB solution to the Pearcey system, arXiv:2303.02694.
- [4] Berry, M. V., Stokes' phenomenon; smoothing a victorian discontinuity, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. (1988), no. 68, 211–221.
- [5] Candelpergher, B., Nosmas, J. C. and Pham, F., Approche de la résurgence, Actualités Math., Hermann, Paris, 1993.
- [6] Hirose, S., On the Stokes geometry for the Pearcey system and the (1, 4) hypergeometric system, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B40 (2013), 243–292.

- [7] Hirose, S., On a WKB-theoretic transformation for a completely integrable system near a degenerate point where two turning points coalesce, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **50** (2014), no. 1, 19–84.
- [8] Honda, N., Kawai, T. and Takei, Y., *Virtual turning points*, SpringerBriefs Math. Phys., 4, Springer, Tokyo, 2015.
- [9] Kamimoto, S. and Sauzin, D., Iterated convolutions and endless Riemann surfaces, *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)* **20** (2020), no. 1, 177–215.
- [10] 河合隆裕, 竹井義次, 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008.
- [11] Lando, S. K., Geometry of the stokes sets for families of functions of one variable, *J. Math. Sci. (New York)* **83** (1997), no. 4, 534–538.
- [12] Shudo, A., A role of virtual turning points and new Stokes curves in Stokes geometry of the quantum Hénon map, *Algebraic analysis of differential equations*, Springer, Tokyo, 2008, 251–264.
- [13] Takei, Y., Integral representation for ordinary differential equations of Laplace type and exact WKB analysis, *数理解析研究所講究録* (2000), no. 1168, 80–92.
- [14] Wright, F. J., The Stokes set of the cusp diffraction catastrophe, *J. Phys. A* **13** (1980), no. 9, 2913–2928.