

$$\frac{du}{dt} + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t) \quad \text{について}$$

東大・教養 大谷 光春

§1. 序

H を 実ヒルベルト空間, φ を H から $(-\infty, +\infty]$ への $\varphi \neq +\infty$ なる, 下半連続凸関数 (これを, 以下, p. l. s. c. f. と記す.) とし,

$$D(\varphi) = \{u \in H; \varphi(u) < +\infty\}$$

$$\partial\varphi(u) = \{f \in H; \varphi(v) - \varphi(u) \geq (f, v - u), \text{ for } \forall v \in D(\varphi)\}$$

$$D(\partial\varphi) = \{u \in H; \partial\varphi(u) \neq \emptyset\}$$

とあくと, $\partial\varphi$ は φ の Subdifferential と呼ばれ, H での maximal monotone operator になる, ([1] 参照).

さて, ここで λR の コーシー問題を考えよう,

$$(1.1) \quad \frac{du}{dt} + \partial\varphi^1(u(t)) - \partial\varphi^2(u(t)) \ni f(t), \quad t \in [0, T].$$

$$(1.2) \quad u(0) = u_0.$$

但し、(1.1)の意味は、 $g^i(t) \in \partial\varphi^i(u(t))$, for a.a. $t \in [0, T]$,
 なる $g^i(t)$, ($i=1, 2$), が存在して、(1.1)' を満す事である。
 (1.1)' $\frac{du}{dt} + g^1(t) - g^2(t) = f(t)$, for a.a. $t \in [0, T]$.

[定義 1-1] $u(t) \in C([0, T]; H)$ が (1.1)~(1.2) の 強解
 であるとは、 $u(t)$ が $[0, T]$ で絶対連続であり、
 $u(0) = u_0$ かつ (1.1)' を満す、 $g^i(t) \in \partial\varphi^i(u(t))$ が存在
 する事である。

我々は、これから (1.1)~(1.2) の強解の存在につい
 て、論ずる訳であるが、 $\partial\varphi^2 \equiv 0$ の時は、良く知られている
 様に、H. Brézis [1], [2] 等により、詳しく研究されて
 おり、又、 $\partial\varphi^1$ が線型、 $\partial\varphi^2$ が gradient operator の場合に
 は、M. Tsutsumi [8] の研究がある。

§ 2. 定理 I (爆発現象のない場合)

一般に、(1.1)~(1.2) type の方程式の解は、有限
 時間で $\|u(t)\|_H$ が $+\infty$ になる場合がある事が知られてい
 る、([3], [7] 参照)。この節では、そのような爆発現
 象のおきない場合を取扱う。次の仮定をおく。

(A.1) 任意の正数 $L < +\infty$ に対して, $\{u \in H; \varphi'(u) \leq L\}$ は, H で precompact.

(A.2) (i) と (ii) が成立する。

(i) $D(\varphi') \subset D(\partial\varphi^2)$ かつ $|\partial\varphi^2(u)|_H \leq M(\varphi'(u))$, for $\forall u \in D(\varphi')$.

(ii) $D(\partial\varphi') \subset D(\partial\varphi^2)$ かつ $|\partial\varphi^2(u)|_H \leq K \cdot |\partial\varphi'(u)|_H + M(\varphi'(u))$,

$0 < K < 1$, for $\forall u \in D(\partial\varphi')$.

(A.3) $\varphi^2(u) \leq K \cdot \varphi'(u) + C$, $0 \leq K < 1$, for $\forall u \in D(\varphi')$.

但し, $\partial\varphi^i$ は $\partial\varphi^i$ の minimal section, $M(\cdot)$ は $[0, +\infty)$ 上の locally bounded な単調増加関数, C は u に依らない, 定数. 更に, この小論を通じて, $\varphi^i(u) \geq 0$, for $\forall u \in H$, と (一般性を失う事なく) 仮定する。

[定理 2-1] (A.1) ~ (A.3) の仮定のもとに, 任意の $u_0 \in D(\varphi')$, $f(t) \in L^2(0, T; H)$ に対して, 次の (2.1) ~ (2.3) を満す, (1.1) ~ (1.2) の強解が, (少なくとも1つ) 存在する。

(2.1) $\frac{du}{dt} \in L^2(0, T; H)$

(2.2) $\varphi^i(u(t))$ は $[0, T]$ で 絶対連続, ($i=1, 2$).

(2.3) $g^i(t) \in L^2(0, T; H)$, ($i=1, 2$).

まず, 次の2つの補題を準備しよう, (証明は [2] 参照.).

[補題 2-2] φ を H 上の p.l.s.c.f. とし,

$$(2.4) \quad \varphi_\lambda(u) = \inf_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2\lambda} \|u-v\|_H^2 + \varphi(v) \right\}, \lambda > 0, \text{ とおけば}$$

φ_λ は H 上の Fréchet 微分可能な凸関数となり, φ_λ の subdifferential $\partial(\varphi_\lambda)$ は, $\partial\varphi$ の Yosida 近似 $(\partial\varphi)_\lambda = \frac{1}{\lambda} \cdot (I - (I + \lambda \partial\varphi)^{-1})$ と一致し, 更に,

$$(2.5) \quad \varphi_\lambda(u) \nearrow \varphi(u), \text{ as } \lambda \searrow 0, \text{ for } \forall u \in H.$$

[補題 2-3] $u(t)$ 及び $\frac{du}{dt}(t)$ が共に $L^2(0, T; H)$ に属し,

$g(t) \in L^2(0, T; H)$ かつ $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$, for a.a. $t \in [0, T]$, なる $g(t)$

が存在すれば, $\varphi(u(t))$ は $[0, T]$ 上で絶対連続となり,

更に, $\mathcal{L} = \{ t \in [0, T]; u(t), \varphi(u(t)) \text{ が } t \text{ で絶対連続かつ } u(t) \in D(\partial\varphi) \}$ に対して次式が成立する。

$$(2.6) \quad \frac{d}{dt} \varphi(u(t)) = (g(t), \frac{du}{dt}(t)), \text{ for } \forall t \in \mathcal{L}, \forall g(t) \in \partial\varphi(u(t)).$$

定理 2-1 の証明 : まず, (1.1)~(1.2) を次の方程式で近似する。

$$(2.7) \quad \frac{du_\lambda}{dt} + \partial\varphi'(u_\lambda(t)) - \partial\varphi_\lambda^2(u_\lambda(t)) \ni f(t), \quad t \in [0, T].$$

$$(2.8) \quad u_\lambda(0) = u_0.$$

$\partial\varphi_\lambda^2$ は リプシッツ連続であるから, (2.7)~(2.8) の

強解 $u_\lambda(t)$ は, (一意的に) 存在して, (2.1)~(2.3) に相当する性質

を持っている。 $\lambda \searrow 0$ とした時に, $u_\lambda(t)$ の極限として (1.1)~(1.2) の強解を求めよう, という訳である。

まず, (2.7) の両辺に $\frac{du_\lambda}{dt}$ をかけて $[0, t]$ で積分すれば, 補題 2-3, 2-2. を使て,

$$(2.9) \quad \int_0^t \left| \frac{du_\lambda}{dt}(s) \right|^2 ds + \varphi'(u_\lambda(t)) - \varphi^2(u_\lambda(t)) \leq \varphi'(u_0) + \int_0^t \left| \frac{du_\lambda}{dt}(s) \right| |f(s)| ds$$

更に, (A.3) を用いれば,

$$(2.10) \quad \int_0^t \left| \frac{du_\lambda}{dt}(s) \right|^2 ds + 2(1-k) \cdot \varphi'(u_\lambda(t)) \leq 2\varphi'(u_0) + \int_0^t |f(s)|^2 ds$$

を得る。即ち,

$$(2.11) \quad \left| \frac{du_\lambda}{dt} \right|_{L^2(0,T;H)} \leq C_1, \quad \text{for } \forall \lambda > 0,$$

$$(2.12) \quad \varphi'(u_\lambda(t)) \leq C_1, \quad \text{for } \forall t \in [0, T], \forall \lambda > 0,$$

更に, (A.2) 及び (2.11), (2.12) より,

$$(2.13) \quad |\partial \varphi_\lambda^2(u_\lambda(t))|_{L^2(0,T;H)} \leq C_1, \quad \text{for } \forall \lambda > 0,$$

$$(2.14) \quad |g'_\lambda(t)|_{L^2(0,T;H)} \leq C_1, \quad \text{for } \forall \lambda > 0,$$

但し, $g'_\lambda(t) = -\frac{du_\lambda}{dt} + \partial \varphi_\lambda^2(u_\lambda(t)) + f(t) \in \partial \varphi'(u_\lambda(t))$, C_1 は $\varphi'(u_0)$ 及び $\|f\|_{L^2(0,T;H)}$ のみに依る定数。

$u_\lambda(t)$ の収束: まず, 次の 2つの事実を示そう。

$$(2.15) \quad \{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0} \text{ は } [0, T] \text{ で 同等連続}$$

$$(2.16) \quad \{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0} \text{ は } t \in [0, T] \text{ を固定すれば } H \text{ で precompact.}$$

実際, (2.16) は 仮定 (A.1) 及び 評価 (2.12) から直ちに得られる。(2.15) を見るには, (2.11) の評価と, 次の不等式

を組み合わせれば良い。

$$(2.17) \quad \|u_\lambda(t) - u_\lambda(t')\|_H \leq C \cdot \left\| \frac{du_\lambda}{dt} \right\|_{L^2(0,T;H)} \cdot |t - t'|^{1/2}$$

よって, (2.15), (2.16) より Ascoli の定理が使えて,

$$(2.18) \quad u_{\lambda_n}(t) \rightarrow u(t) \text{ in } C([0,T];H) \text{ as } \lambda_n \rightarrow 0$$

なる $\{\lambda_n\}$ と $u(t) \in C([0,T];H)$ とが存在する。

さて, H 上の p.l.s.c.f. φ に対して Φ を

$$(2.19) \quad \Phi(u) = \begin{cases} \int_0^T \varphi(u(t)) dt & \text{if } \varphi(u(t)) \in L^1(0,T) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

で定義すれば, Φ は $L^2(0,T;H)$ 上の p.l.s.c.f. となり,

更に, $\forall g \in L^2(0,T;H)$ に対して, $g \in \partial\Phi(u)$ ならば, かつ

その時に限り, $g(t) \in \partial\varphi(u(t))$, for a.a. $t \in [0,T]$, となる,

(Brezis [2] 参照)。

ここで, $\Phi^1, \Phi^2, \text{etc}$ を $\varphi^1, \varphi^2, \text{etc}$ で同様に定義すれば, $\partial\Phi^1, \partial\Phi^2, \frac{du}{dt}$ の $L^2(0,T;H)$ での demiclosedness より 評価 (2.11), (2.13), (2.14) と組合せて, $\{\lambda_n\}$ の部分列 $\{\lambda_{n'}\}$ が選べて, 次の様にできる。

$$(2.20) \quad \frac{du_{\lambda_{n'}}}{dt} \rightarrow \frac{du}{dt} \text{ weakly in } L^2(0,T;H)$$

$$(2.21) \quad g_{\lambda_{n'}}^1 \rightarrow g^1 \in \partial\Phi^1(u) \text{ weakly in } L^2(0,T;H)$$

$$(2.22) \quad \partial\Phi_{\lambda_{n'}}^2(u_{\lambda_{n'}}) \rightarrow g^2 \in \partial\Phi^2(u) \text{ weakly in } L^2(0,T;H)$$

よって, $g^i(t)$ は (1.1)' をみたすから, $u(t)$ が求める強解である。

[証明 終り]

§ 3. 定理 II (Stable Set)

この節では, (A.1), (A.2) は満たされているが, (A.3) が満たされていない場合を取扱う。一般に, 条件 (A.3) が無い場合には, 任意の $u_0 \in D(\varphi')$ から出発する解は, 爆発する場合がある, ([3], [7] 参照)。しかし, ある意味で, 充分小さな初期値 u_0 に対して, (1.1)~(1.2) の強解は, 大域的に存在することか示せる。この状況を説明する為に, J.L. Lions [4], M. Tsutsumi [7], と同様な, Stable Set の概念を導入する。まず, 次の様な $\tilde{\varphi}^i$ を導入すると, 応用上, 便利である。

(A.4) 次の (i)~(iii) を満たす H 上の実数値関数 $\tilde{\varphi}^i$ が存在する。

(i) $0 \leq \tilde{\varphi}^1(u) \leq \varphi^1(u)$, $0 \leq \varphi^2(u) \leq \tilde{\varphi}^2(u)$, for $\forall u \in H$.

(ii) $u_n \rightarrow u$ (in H) かつ $\varphi^1(u_n) \rightarrow \varphi^1(u)$ ならば $\tilde{\varphi}^1(u_n) \rightarrow \tilde{\varphi}^1(u)$.

(iii) $\tilde{\varphi}^2$ は H 上の p.l.s.c.f. で $D(\partial\varphi') \subset D(\partial\tilde{\varphi}^2)$ かつ (3.1) を満たす。

(3.1) $|\partial\tilde{\varphi}^2(u)|_H \leq M(\varphi^1(u)) \cdot \{|\partial\varphi^1(u)|_H + 1\}$, for $\forall u \in D(\partial\varphi')$.

次に,

(3.2) $N(\varphi) = \{u \in H; \varphi(u) = 0\}$, ($\varphi = \varphi^1, \tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2$)

$$(3.3) \quad \tilde{J}(u) = \tilde{\varphi}'(u) - \tilde{\varphi}^2(u)$$

$$(3.4) \quad J(u) = \varphi'(u) - \varphi^2(u)$$

$$(3.5) \quad J_\lambda(u) = \varphi'(u) - \varphi_\lambda^2(u) \quad \text{とおく。}$$

この時, $J_\lambda(u) \geq J(u) \geq \tilde{J}(u)$, となる。

(A.5) 次の (i) ~ (v) が成立する。

$$(i) \quad \tilde{J}(0) = c_2 > -\infty$$

(ii) $\forall u \in D(\varphi') \setminus N(\tilde{\varphi}')$ に対して, $\tilde{J}(r \cdot u)$ は $r \in [0, +\infty)$ の連続関数で, $(0, +\infty)$ では C^1 -級, 更に次の様な u の関数 $r_u : D(\varphi') \setminus N(\tilde{\varphi}') \mapsto (0, +\infty)^{(1)}$ が存在する。

$$\frac{d\tilde{J}}{dr}(r \cdot u) > 0 \quad \text{for } \forall r \in (0, r_u) \quad \text{かつ} \quad \frac{d\tilde{J}}{dr}(r \cdot u)|_{r=r_u} = 0.$$

(iii) $u_m \rightarrow u$ (in H), $\tilde{\varphi}'(u_m) \rightarrow \tilde{\varphi}'(u) \neq 0$ かつ $\tilde{\varphi}^2(u_m) \rightarrow \tilde{\varphi}^2(u)$ ならば, $r_{u_m} \rightarrow r_u$ 。

(iv) $0 < \tilde{\varphi}'(u) \leq \varepsilon$ ならば $r_u \geq 1$ とする $\varepsilon > 0$ が存在する。

$$(v) \quad \inf_{u \in D(\varphi') \setminus N(\tilde{\varphi}')} \tilde{J}(r_u \cdot u) = d > 0.$$

ここで, Stable Set $\mathcal{W}$ を次の様に定義する。

$$(3.6) \quad \mathcal{W} = \{ u \in D(\varphi') \setminus N(\tilde{\varphi}'); J(u) < d, r_u > 1 \}$$

(1) $\frac{d\tilde{J}}{dr}(r \cdot u) > 0$, for $\forall r \in (0, +\infty)$ のときは, $r_u = +\infty$ とする。

$W, N(\tilde{\varphi}^1)$ について、次の仮定をおく。

(A.6) $W \neq \emptyset$, 更に, $u \in W$ かつ $J(u) \leq d_0 < d$ ならば

$$\varphi^1(u) \leq M(d_0) < +\infty.$$

(A.7) $u \in N(\tilde{\varphi}^1)$ ならば $\varphi^2(u) \leq C_3 < +\infty$

[注意 3-1] 特に, φ^1 が α_1 次の斉次関数で, (A.3) が満足されている時, $\tilde{\varphi}^1 = \varphi^1$, $\tilde{\varphi}^2 = K\varphi^1 + C$ とおけば, $\forall u \in D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1)$ に対して, $r_u = +\infty$ かつ $d = +\infty$ となり, W は結局 $D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1)$ に一致する。

[命題 3-2] $\tilde{\varphi}^1, \tilde{\varphi}^2$ はそれぞれ α_1, α_2 次の斉次関数, $(0 < \alpha_1 < \alpha_2)$, とし、次の (3.7) を満たすものとする。

$$(3.7) \quad \tilde{\varphi}^2(u) \leq C_4 \{ \tilde{\varphi}^1(u) \}^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}}, \text{ for } \forall u \in D(\varphi^1).$$

更に, $N(\tilde{\varphi}^1) = N(\varphi^1)$ かつ、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$\{u \in H; 0 < \varphi^1(u) < \varepsilon\} \neq \emptyset$ とおけば, (A.5) ~ (A.7) はすべて満たされる。

証明: 簡単な計算によって、まず

$$(i) \quad \tilde{r}(r, u) = r^{\alpha_1} \tilde{\varphi}^1(u) - r^{\alpha_2} \tilde{\varphi}^2(u)$$

$$(ii) \quad r_u = \left[\frac{\alpha_1 \cdot \tilde{\varphi}^1(u)}{\alpha_2 \cdot \tilde{\varphi}^2(u)} \right]^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \geq \left(\frac{\alpha_1}{C_4 \cdot \alpha_2} \right)^{\frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1}} \cdot (\tilde{\varphi}^1(u))^{-\frac{1}{\alpha_1}} > 0$$

if $u \notin N(\tilde{\varphi}^2) \cup N(\tilde{\varphi}^1)$

$$r_u = +\infty \quad \text{if} \quad u \in N(\tilde{\varphi}^2) \setminus N(\tilde{\varphi}^1)$$

$$(iii) \quad d \geq \frac{d_2 - d_1}{\alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{c_4 \cdot d_2} \right)^{\frac{d_1}{d_2 - d_1}} > 0$$

$$(iv) \quad W = \{ u \in D(\varphi^1) \setminus N(\varphi^1) ; \varphi^1(u) - \varphi^2(u) < d, \alpha_1 \tilde{\varphi}^1(u) - \alpha_2 \tilde{\varphi}^2(u) > 0 \}$$

をうる。

(A.5) と (A.7) は、上記の (i)~(iv) より明らか。 (A.6) を見るには、まず、(3.7) より、 $0 < \tilde{\varphi}^1(u) < \varepsilon_0$ とおけば、

$$\alpha_1 \cdot \tilde{\varphi}^1(u) - \alpha_2 \cdot \tilde{\varphi}^2(u) \geq (d_1 - d_2 \cdot c_4 \cdot \varepsilon_0^{\frac{d_2 - d_1}{\alpha_1}}) \tilde{\varphi}^1(u) > 0 \quad \text{となる}$$

充分小さい $\varepsilon_0 > 0$ が存在するから、 $\varepsilon = \min \{ \varepsilon_0, d \}$ と

おけば、 $\{ u \in H ; 0 < \varphi^1(u) < \varepsilon \} \subset W$ となるから $W \neq \emptyset$ 。

次に、 $u \in W$ かつ $J(u) \leq d_0$ ならば、

$$\tilde{\varphi}^1(u) - \tilde{\varphi}^2(u) \leq J(u) \leq d_0 \quad \text{かつ} \quad \alpha_1 \tilde{\varphi}^1(u) - \alpha_2 \tilde{\varphi}^2(u) > 0 \quad \text{であるから}$$

直ちに、 $\tilde{\varphi}^1(u), \tilde{\varphi}^2(u)$ の有界性がいえ、 $\varphi^1(u) \leq M(d_0) < +\infty$

となる。

[証明 終り]

[定理 3-3] (A.1), (A.2) 及び (A.4)~(A.7) の仮定のもとに、

$$(3.8) \quad d - J(u_0) > \frac{1}{4} \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2 \quad \text{を満す, 任意の}$$

$u_0 \in W$, $f \in L^2(0,T;H)$ に対して、(2.1)~(2.3) を満足する、

(1.1)~(1.2) の強解が、(少なくとも1つ)、存在する。

定理 3-3 の証明: ここでも、やはり次の近似方程式を考える。

$$(3.9) \quad \frac{du_\lambda}{dt} + \partial \varphi'(u_\lambda(t)) - \partial \varphi_\lambda^2(u_\lambda(t)) \ni f(t), \quad t \in [0, T].$$

$$(3.10) \quad u_\lambda(0) = u_0$$

まず $J_\lambda(u_0) \searrow J(u_0)$ as $\lambda \searrow 0$ であるから,

$$(3.11) \quad d = \{ J_\lambda(u_0) + \frac{1}{4k} \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2 \} > 0, \text{ for } \forall \lambda \in]0, \lambda_0]$$

となる, $\lambda_0 > 0$ と $0 < k < 1$ とが存在する。

(3.9) の両辺に $\frac{du_\lambda}{dt}$ をかけて, $[0, t]$ で積分すれば,

$$(3.12) \quad \int_0^t \left| \frac{du_\lambda}{dt}(s) \right|^2 ds + J_\lambda(u_\lambda(t)) \leq J_\lambda(u_0) + \int_0^t |f(s)| \cdot \left| \frac{du_\lambda}{dt}(s) \right| ds$$

よって, $d_0 = J_{\lambda_0}(u_0) + \frac{1}{4k} \int_0^T |f(s)|^2 ds$ とすれば, 次をうる。

$$(3.13) \quad (1-k) \int_0^t \left| \frac{du_\lambda}{dt}(s) \right|^2 ds + J_\lambda(u_\lambda(t)) \leq d_0 < d, \text{ for } \forall t \in [0, T], \\ \forall \lambda \in]0, \lambda_0].$$

当分, λ を $]0, \lambda_0]$ に固定して, 話を進めよう。

いま, $\varphi'(u_\lambda(t))$, $u_\lambda(t)$ は $[0, T]$ で絶対連続, 更に,

$\frac{du_\lambda}{dt}$, $\partial \varphi'(u_\lambda(t)) \in L^2(0, T; H)$ であるから, $\partial \tilde{\varphi}^2(u_\lambda(t)) \in$

$L^2(0, T; H)$ 、よって補題 2-3 より, $\tilde{\varphi}^2(u_\lambda(t))$ は $[0, T]$ で

絶対連続, すなわち, (A.4) の (ii) 及び (A.5) の (iii) より

$$(3.14) \quad \gamma_{u_\lambda}(t) \text{ は } \{t \in [0, T]; \tilde{\varphi}'(u_\lambda(t)) \neq 0\} \text{ で連続}$$

となる。

ここで, (3.13) 式より, 直ちに

$$(3.15) \quad J(u_\lambda(t)) \leq J_\lambda(u_\lambda(t)) \leq d_0, \quad \text{for } \forall t \in [0, T], \forall \lambda \in]0, \lambda_0].$$

が得られる。更に, 次の事がいえる。

$$(3.16) \quad u_\lambda(t) \in N(\tilde{\varphi}') \cup \overline{W}, \quad \text{for } \forall t \in [0, T], \forall \lambda \in]0, \lambda_0].$$

実際, $\tilde{\varphi}'(u_\lambda(t_0)) \neq 0$ かつ $r_{u_\lambda(t_0)} < 1$ とする t_0 があるとおれば,

$r_{u_\lambda(t)}$ 及び $\tilde{\varphi}'(u_\lambda(t))$ の連続性と 条件 (A.5) の (iv)

及び $r_{u_\lambda(0)} > 1$ とから,

$$(3.17) \quad r_{u_\lambda(t_1)} = 1 \quad \text{となる } t_1 \in]0, t_0[\text{ が存在する.}$$

ところが, d の定義より,

$$(3.18) \quad J(u_\lambda(t_1)) \geq \tilde{J}(u_\lambda(t_1)) \geq d > d_0.$$

であるから, これは (3.15) に矛盾する。よって (3.16) が示された。

よって, (A.6), (A.7), (3.15), (3.16) より直ちに

$$(3.19) \quad \varphi'(u_\lambda(t)) \leq C_5, \quad \text{for } \forall t \in [0, T], \forall \lambda \in]0, \lambda_0].$$

を得る。ここで C_5 は d_0 のみによる定数。

更に, (3.16), (A.6), (A.5) の (i), (ii) より $J_\lambda(u_\lambda(t))$ は

下に有界である事がわかり, (3.13) 式より,

$$(3.20) \quad \int_0^T \left| \frac{du}{dt}(t) \right|^2 dt \leq C_5, \quad \text{for } \forall \lambda \in]0, \lambda_0].$$

なる評価を得る。

(3.19), (3.20) の評価を得るから, あとは, 定理 2.1. の証明の後半と全く同様にして, 強解の存在が示せる。

[証明 終り].

[注意 3-4] 定理 3-3 に於いて, $J(u_0) + \frac{1}{2} \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2 < d$ であれば, $u_0 \in N(\tilde{\varphi}')$ に対しても同じ事が言える。

[注意 3-5] 定理 3-3 に於いて, (3.8) の条件があるから例えば, $f(t) \equiv f$ の場合, $\|f\|_H$ は T が大きくなると共に, 小さくなるを得るが, もし命題 3-2 の状況と, $\varphi'(u) \geq c_0 \|u\|_H^2$, $c_0 > 0$, なる coerciveness とがあれば, $\|f(t)\|_{L^\infty(0,T;H)} \leq \varepsilon$, $0 \leq \varphi'(u_0) \leq \varepsilon$, (ε は d のみに依り, T に依らな正の数。) なる, $f(t)$, u_0 , に対して, (2.1)~(2.3) を満す (1.1)~(1.2) の (大域的) 強解の存在が言える。

[注意 3-6] $u_0 \in \overline{D(\varphi)}^{(2)}$ の場合にも, (1.1)~(1.2) の強解の存在について, 定理 2-1, 定理 3-3 に相当する, 結果が得られる。但し, 定理 3-3 において, は,

$u_0 \in \overline{D(\varphi)} \cap \{u \in H; |u|_H \leq \varepsilon\}$, $|f(t)|_{L^2(0,T;H)} \leq \varepsilon$, (ε は d のみによる正数。) と変更する必要がある, (詳しくは K. Ôtani [5] を見られたい。)

(2) $D(\varphi)$ の H -norm での内包。

§ 4. 応用

[例] I] はじめに, 次の初期値境界値問題を考えよう。

$$(4.1) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}) - \beta(u(x,t)) = f(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T]$$

$$(4.2) \quad u(x,t)|_{\Gamma} = 0, \quad t \in [0,T]$$

$$(4.3) \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega$$

但し, $(p-2) \geq 0$ かつこの節を通じて, Ω は $\mathbb{R}^n$ の有界領域で, Γ は Ω の充分滑らかな境界とする。

M. Tsutsumi [7] は, この問題を Galerkin 法において, $f(t) \equiv 0$, $\beta(u) = |u|^{\alpha} u$, ($\alpha > 0$), の場合について, 研究しているが, 我々の方法の利点の 1 つは, 解 $u(x,t)$ の x についての regularity が良くなる点である。

この節を通じて, $\beta(\cdot)$ は $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ の maximal monotone graph とし, 次の (4.4) を満すものとする。

$$(4.4) \quad |\beta(r)| \leq K_1 \cdot |r|^{1+\alpha} + K_2, \quad \alpha > 0, \quad \text{for } \forall r \in \mathbb{R}^1.$$

まず, 定理 2-1 を適用すれば, 次の定理を得る。

[定理 4-1] $n \leq p$ の時 $(2+\alpha) < p$, $n > p$ の時 $(2+\alpha) < p$ かつ $2(1+\alpha) \leq \frac{np}{n-p}$ とすれば, 任意の $u_0 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ と $f(t) \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$ に対して, (4.5)~(4.7) をみたす, (4.1)~(4.3) の強解が存在する。

$$(4.5) \quad \frac{du}{dt} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

$$(4.6) \quad |u(t)|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ は } [0,T] \text{ で絶対連続.}$$

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}) \in L^2(0,T; L^2(\Omega)),$$

証明: まず, $\partial \ell(r) = \beta(r)$ とする, $\mathbb{R}^1$ 上の p.l.s.c.f. $\ell(r)$ が存在するから, ϕ^2 を次式で定義すると,

$$(4.8) \quad \phi^2(u) = \begin{cases} \int_{\Omega} \ell(u(x)) dx & \text{if } \ell(u(x)) \in L^1(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

ϕ^2 は $H = L^2(\Omega)$ 上の p.l.s.c.f. となり, $\forall g \in L^2(\Omega)$ に対して, $g \in \partial \phi^2(u)$ ならばかつその時に限り $g(x) \in \beta(u(x))$, for a.a. $x \in \Omega$.

となる, ([2] 参照)。次に,

$$(4.9) \quad \Phi_p(u) = \begin{cases} \frac{1}{p} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx & \text{if } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

とすれば, $D(\Phi_p) = W_0^{1,p}(\Omega)$ かつ $\partial \Phi_p(u) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$

となる。よって, 定理 4-1 を示すには, $\varphi^1 = \Phi_p$, $\varphi^2 = \Phi^2$

と置いて, (A.1) ~ (A.3) を check すればよい。

実際, (A.1) は Rellich の定理, (A.2) は (4.4) 式及び Sobolev の定理 より 明らか。 (A.3) も (A.2) と同様にして, $(2+\alpha) < p$ に注意すれば簡単に示せる。

[証明 終り]

[注意 4-2] 定理 4-1 に於いて, $n \leq 11$ とすれば, α についての仮定は $(2+\alpha) < p$ で十分である。

[注意 4-3] 注意 3-6 でも述べた様に, 定理 4-1 に於いて, $u_0 \in L^2(\Omega)$ に対しても, (4.5)' ~ (4.7)' をみたす, (4.1) ~ (4.3) の強解の存在がわかる。

$$(4.5)' \quad \sqrt{\varepsilon} \frac{du}{dt} \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$$

$$(4.6)' \quad \|u(t)\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ は } [0,T] \text{ で 絶対連続。}$$

$$(4.7)' \quad \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}) \in L^2(\delta, T; L^2(\Omega)), \text{ for } \forall \delta > 0.$$

$p < (2+d)$ の場合には, 次の定理を得る.

[定理 4-4] $K_2 = 0$, かつ $p \geq n$ ならば " $p < (2+d)$,
 $n > p$ ならば" $p < (2+d)$, $2(1+d) \leq \frac{n \cdot p}{n-p}$ とあれば,

$$(4.10) \quad d - J(u_0) > \frac{1}{4} \|f\|_{L^2(0,T;H)}^2 \quad \text{を満す, 任意の}$$

$u_0 \in W \cup \{0\}$ と $f \in L^2(0,T;H)$ に対し, (4.5)~(4.7) を
 満す, (4.1)~(4.3) の強解が存在する.

但し, $\varphi'(u) = \tilde{\varphi}'(u) = \phi_p(u)$, $\varphi^2(u) = \phi^2(u)$,

$$(4.11) \quad \tilde{\varphi}^2(u) = \begin{cases} \frac{K_1}{2+d} \int_{\Omega} |u(x)|^{2+d} \cdot dx & \text{if } u \in L^{2+d}(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

証明: d に対する仮定から, Sobolev の定理にあて,

$$(4.12) \quad \tilde{\varphi}^2(u) \leq C \cdot \{\tilde{\varphi}'(u)\}^{\frac{2+d}{p}}, \text{ for } \forall u \in D(\varphi')$$

となるから, 命題 3-2 の条件がすべて満たされており,

更に, (A.4) も明らかに満足されている。(A.1), (A.2) も

定理 4-1 の場合と全く同様.

[証明終り]

[例] II) 次の問題を考えよう,

$$(4.13) \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \Delta u(x,t) + C_0 \cdot u - \beta(u(x,t)) \ni f(t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T].$$

$$(4.14) \quad -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u(x,t)) \quad , \quad (x,t) \in \Gamma \times [0,T].$$

$$(4.15) \quad u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad x \in \Omega.$$

但し, $C_0 > 0$, $\frac{\partial}{\partial n}$ は outward normal derivative, $\gamma(\cdot)$ は $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ 上の maximal monotone graph かつ $\gamma(0) \ni 0$.

ここで, $\partial j(r) = \gamma(r)$ とする, $\mathbb{R}^1$ 上の p.l.s.c.f.

$j(r) \geq 0$ が存在するから, ϕ^1 を次式で定義すると,

$$(4.16) \quad \phi^1(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx + \frac{C_0}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Gamma} j(u(x)) d\Gamma \\ \text{if } u \in H^1(\Omega), j(u) \in L^1(\Gamma). \\ +\infty \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

ϕ^1 は $H = L^2(\Omega)$ 上の p.l.s.c.f. となり, 更に,

$$D(\partial \phi^1) = \{ u \in H^1(\Omega); -\frac{\partial u}{\partial n} \in \gamma(u) \text{ for a.a. } x \in \Gamma \}$$

$$\partial \phi^1(u) = -\Delta u + C_0 u$$

となるから, ([1] 参照), (4.13)~(4.15) について,

定理 4-4 と 類似の定理が得られる。

実際, $\varphi^1(u) = \phi^1(u)$, $\varphi^2(u) = \phi^2(u)$, $\tilde{\varphi}^2(u)$ は

(4.11) で, 又, $\tilde{\varphi}^1(u)$ とし,

$$(4.17) \quad \varphi'(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 \right\} + \frac{C_0}{2} \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx & \text{if } u \in H^1(\Omega) \\ +\infty & \text{otherwise} \end{cases}$$

を、 ε は $\frac{1}{n}$ 良し。

References

- [1] H. Brézis Monotonicity methods in Hilbert spaces and
some applications to nonlinear partial diff. equations,
Contributions to Nonlinear Functional Analysis, Acad. Press,
(1974).
- [2] H. Brézis Opérateurs Maximaux Monotones, North-Holland
, (1973)
- [3] H. Fujita On some nonexistence and nonuniqueness theorems
for nonlinear parabolic eqs. Proc. Symp. in Pure Math. 18,
A. M. S. Providence, Rhode Island, (1970), 105-113.
- [4] J. L. Lions Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes
aux Limites non Linéaires, Dunod, Paris, 1969.
- [5] K. Ôtani On the strong solution of $u_t + \partial \varphi'(u(t)) -$
 $\partial \varphi^2(u(t)) \ni f(t)$, to appear.
- [6] K. Ôtani On the strong solution of $u_t + \partial \varphi^{1/2}(u(t)) -$
 $\partial \varphi^{3/2}(u(t)) \ni f(t)$, in preparation.

- [7] M. Tsutsumi Existence and nonexistence of global
solutions for nonlinear parabolic equations,
R.I.M.S. (1972), 211-229.
- [8] M. Tsutsumi On solutions of semilinear differential
equations in a Hilbert space, *Mathematica*
Japonicae, (1972), 173-193.