

二等辺三体問題の三体衝突間のヘテロクリニック軌道と相対周期軌道

柴山允瑠 (京大・数理研), 矢ヶ崎一幸 (新潟大・自然)

1 二等辺三体問題の衝突特異点の正則化

三体問題とは微分方程式

$$\frac{d^2 q_i}{dt^2} = - \sum_{j \neq i} \frac{m_j (q_i - q_j)}{\|q_i - q_j\|^3}, \quad q_i \in \mathbb{R}^3, m_i \geq 0, i = 1, 2, 3.$$

の解を調べる問題である。三体問題は非可積分系であり、そのほとんどの解の振る舞いは非常に複雑である。その複雑さは衝突特異点と深く関係すると想定されるため、衝突特異点の構造を調べる研究が古くからなされてきた。一般の三体問題の特異点の構造は難しいので、次に説明する二等辺三体問題について考察する。

$m_1 = m_2$ とすると、三体問題には q_1 と q_2 が常に互いに z 軸に関して対称的な位置にあり、 q_3 は常に z 軸に属するという運動に制限した部分問題が考えられる (図 1)。この部分問題を二等辺三体問題という。重心を原点に固定し、質量比を $\alpha = m_3/m_1$ とおく。

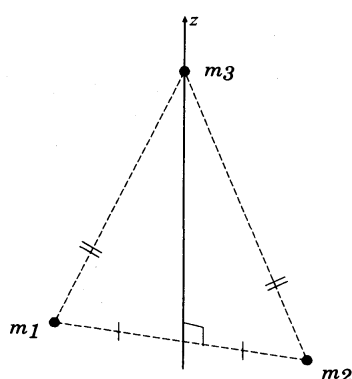


図 1 二等辺三体問題

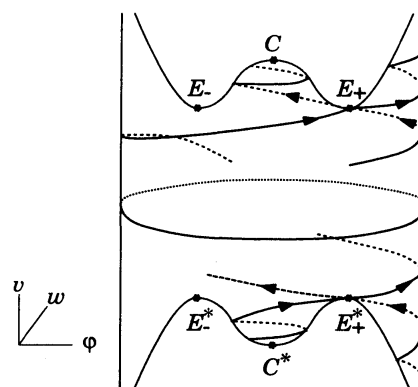


図 2 二等辺 3 体問題の衝突多様体

Devaney [1] は二等辺三体問題において、3 体衝突特異点をブローアップする手法を構

築した. q_1 の位置を (z 方向だけスケール変換して) 極座標で表す. q_2, q_3 の位置もその座標で定まる:

$$\begin{aligned} q_1 &= r \left(\cos \theta \cos \varphi, \sin \theta \cos \varphi, \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \sin \varphi \right), \\ q_2 &= r \left(-\cos \theta \cos \varphi, -\sin \theta \cos \varphi, \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha+1}} \sin \varphi \right), \\ q_3 &= r \left(0, 0, -2\sqrt{\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}} \sin \varphi \right). \end{aligned}$$

v, w はそれぞれ r, φ の速度に対応する座標とし, 特異性を除去するように時間を変換すると微分方程式は

$$\begin{aligned} \dot{r} &= vr \cos \varphi, & \dot{\varphi} &= w, & \dot{v} &= \left(U(\varphi) - \frac{1}{2}v^2 + 2rh \right) \cos \varphi, \\ \dot{w} &= \frac{dU}{d\varphi}(\varphi) \cos^2 \varphi - \frac{1}{2}vw \cos \varphi - (2U(\varphi) - v^2 + 2rh) \sin \varphi \cos \varphi, \end{aligned} \quad (1)$$

となる ([2] も参照). ここで

$$U(\varphi) = \sec \varphi + \frac{4\alpha^{3/2}}{\sqrt{\alpha + 2 \sin^2 \varphi}} \quad (2)$$

である. h は全エネルギーであり, 次の式が保たれる:

$$\frac{1}{2} \left(v^2 \cos^2 \varphi + w^2 + \frac{\omega^2}{r} \right) - U(\varphi) \cos^2 \varphi = rh \cos^2 \varphi. \quad (3)$$

ω は全角運動量である. z 軸に関する回転対称性により θ は除去される. m_1 と m_2 の 2 体衝突は $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ に対応するが, その特異性は除去され, 解は接続される. もとの系で見ると, 2 体衝突した場合, 弾性衝突のようにエネルギーを保ったまま跳ね返り運動を続ける.

$\omega = 0$ のとき, 3 体衝突が起こりえる. Devaney の座標系では 3 体衝突特異点 $r = 0$ の上にも微分方程式は拡張される. $r = 0$ は図のような 2 次元の滑らかな不変多様体であり, 衝突多様体と呼ばれる (図 2). 衝突多様体上の解はもとの系としては架空のものである. しかし, 3 体が非常に近づいた状況は Devaney の座標系では衝突多様体の近傍の力学系に対応するので, 衝突多様体上の力学系も含め調べておくと, その摂動として複雑な 3 体近衝突現象を理解することに繋がる.

この系には 2 種類の反転対称性がある. 2 つの変換 R_1, R_2 を

$$\begin{aligned} R_1 &: (r, \varphi, v, w) \mapsto (r, \varphi, -v, -w) \\ R_2 &: (r, \varphi, v, w) \mapsto (r, -\varphi, -v, w) \end{aligned}$$

により定義する. $\xi(t)$ が解ならば, $R_k \xi(-t)$ も解である. 解 $\xi(t)$ が $\xi(t) = R_k \xi(-t)$ を満たすとき R_k -対称であるという.

2 ヘテロクリニック軌道

衝突多様体上には 6 つの平衡点 $E_{\pm}, C, E_{\pm}^*, C^*$ が存在する. $t \rightarrow \pm\infty$ のとき異なる平衡点に収束する軌道をヘテロクリニック軌道という. ヘテロクリニック軌道はカオス的な現象が起こる一因である. Moeckel [2] により様々なヘテロクリニックの存在が証明されていたが, その他にも可算個のヘテロクリニック軌道が存在することを示した:

定理 1 (Shibayama [4]). 各 $k \in \mathbb{N}$ に対して, k 回の 2 体衝突を持つ $E_{\pm}$ から $E_{\pm}^*$ への R_1 -対称なヘテロクリニック軌道が存在する.

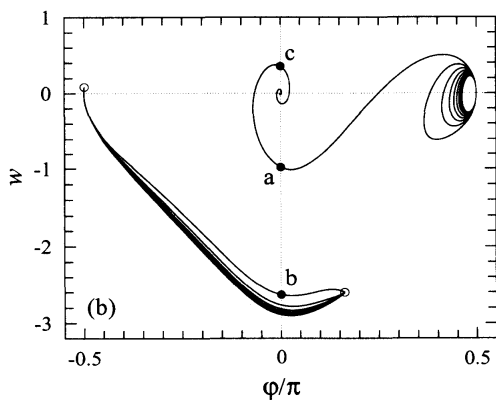


図 3 E_+ の不安定多様体 ($\alpha = 1$)

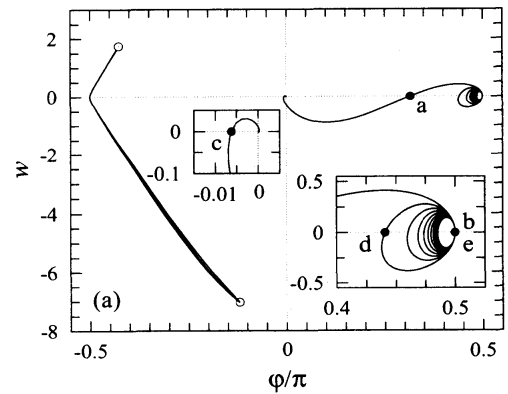


図 4 E_+ の不安定多様体 ($\alpha = 7$)

図 3, 4 は E_+ の不安定多様体を $\{v = 0\}$ で切った断面の数値結果を表している. これらの図を横軸に関して反転したものが, E_+ の安定性多様体であり, 縦軸に関して反転したものが, E_- の安定多様体である. 従って, 横軸との交点が E_+ から E_+^* へのヘテロクリニック軌道となり, 縦軸との交点が E_+ から E_-^* へのヘテロクリニック軌道となる. 定理 1 のヘテロクリニック軌道は右側の渦巻きと横軸との交点に対応する. 中央の渦巻きの所にあるヘテロクリニック軌道の存在は Moeckel により示されている.

また, Moeckel[2] は $E_{\pm}^*$ から $E_{\pm}$ へのヘテロクリニック軌道や $E_{\pm}^*$ から $E_{\mp}$ へのヘテロクリニック軌道の存在を示している. 我々はそのパラメータ α に対する仮定を拡張した.

定理 2 (Shibayama and Yagasaki [6]). (i) $\alpha > 6.52$ のとき, $E_{\pm}^*$ から $E_{\pm}$ への R_1 -対称なヘテロクリニック軌道が存在する. (ii) $\alpha < 2.25$ のとき, $E_{\pm}^*$ から $E_{\mp}$ への R_2 -対称な

ヘテロクリニック軌道が存在する.

Moeckel [2] の仮定は, (i) $\alpha > 55/4$, (ii) α :十分小, というものであった. 図 5, 6 の横

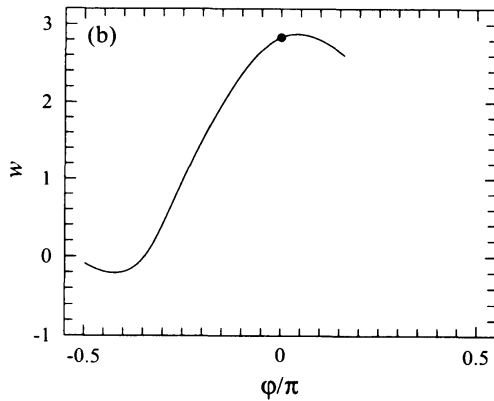


図 5 E_+ の安定多様体 ($\alpha = 1$)

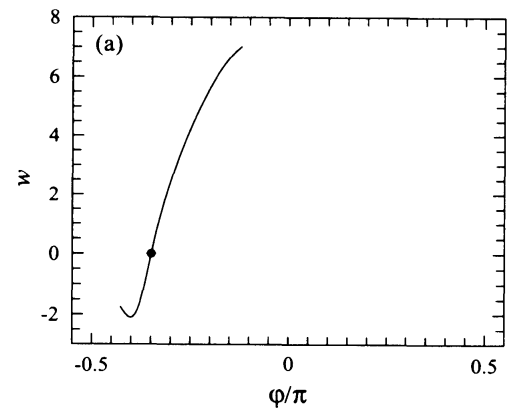


図 6 E_+ の安定多様体 ($\alpha = 7$)

軸との交点が (i), 縦軸との交点が (ii) に対応するヘテロクリニック軌道である.

3 相対周期解

定理 1 や定理 2 のヘテロクリニック軌道と繋げるとサイクルが構成できる (図 7). そのサイクルから現れる周期解の族について考察する. θ 座標を無視していたので, Devaney

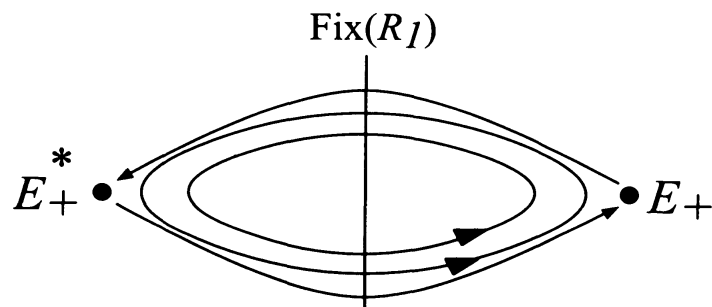


図 7 ヘテロクリニックサイクルと相対周期解

の座標系における周期軌道に対応するもとの系の解は準周期的になる. このような解を相対周期解と呼ぶ.

定理 3 (Shibayama and Yagasaki [6]). 2つの R_k -対称なヘテロクリニック軌道からなるヘテロクリニックサイクルに対して, そこから分岐する R_k -対称な相対周期解の族が存

在する.

図 8, 9, 10 は 3 種類のヘテロクリニックサイクルから分岐する相対周期解の族の数値結果である. 点線は R_1 かつ R_2 -対称な相対周期解である.

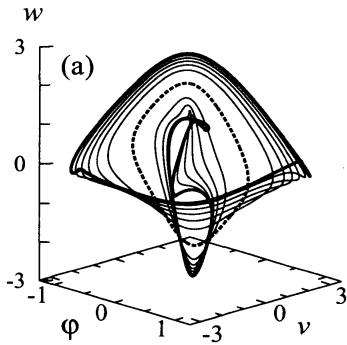


図 8 R_1 -対称な相対周期解の族 ($\alpha = 1$)

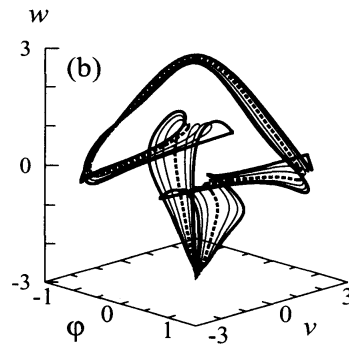


図 9 R_1 -対称な相対周期解の族 ($\alpha = 1$)

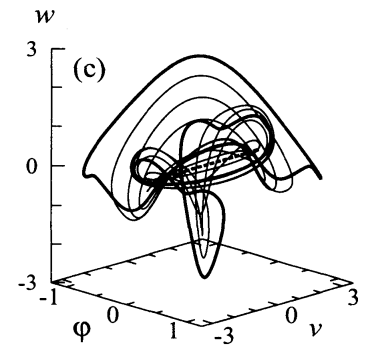


図 10 R_1 -対称な相対周期解の族 ($\alpha = 1$)

さらに, R_1, R_2 それぞれの対称性をもつ周期解の族に関して, 分岐現象を数値計算により調べた (図 11). 分岐図下方にある直線は古典的に知られている Euler 解の族である. そ

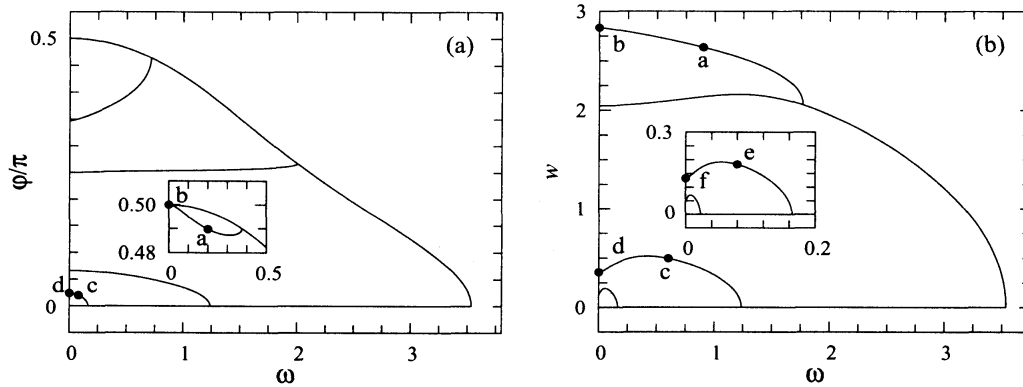


図 11 $\alpha = 1$ の場合の周期軌道の分岐図: (a) R_1 -対称な族; (b) R_2 -対称な族.

の右端は円周解であり, そこから別の R_1 かつ R_2 -対称な周期解の族が現れていることが観測される (この 2 つの分岐図で, 円周 Euler 解から現れる曲線は異なる形をしているが, それは座標系の取り方の違いによるもので, 実際は同じ族である). その解は, 図 12 のような振る舞いをする. この族の存在は変分法により証明できる.

定理 4 (Shibayama [3]). 任意の質量比 α に対して, Euler 解から分岐する R_2 -対称的な相対周期解の族が存在する.

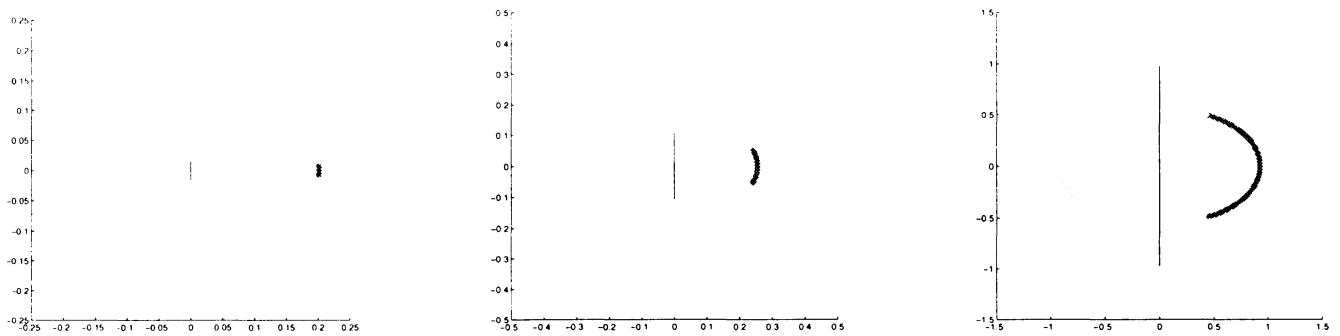


図 12 R_1 かつ R_2 -対称な解 ($\alpha = 1$). 横軸は $\sqrt{x^2 + y^2}$, 縦軸は z である.

この解自体が R_1 -対称性も持つと期待されるが, R_1 かつ R_2 -対称な相対周期解の存在を証明するには技術的な困難があり, 質量に関する制約が必要となる.

定理 5 (Shibayama and Yagasaki [7]).

$$64\alpha^3 + 48\alpha^2 - 4\alpha - 31 < 0$$

を満たす $\alpha > 0$ (数値的には $0 < \alpha < 0.618262545808427$) に対して, *Euler* 解から分岐する R_1 かつ R_2 -対称的な相対周期解の族が存在する.

数値計算によるとこの族は図 11 のように大域的に存在しているが, 理論的な存在証明は円周 Euler 解 (右端) に十分近い部分に関してのみ確立される. しかし, この左端の周期解に関しては存在証明ができる.

定理 6 (Shibayama [5], Section 4.2). 任意の質量比 $\alpha > 0$ と $T > 0$ に対して, 次を満たす T -周期解が存在する: $y \equiv 0$, $x(T/4) = 0$, $z(T/4) \neq 0$ かつ

$$\begin{pmatrix} x(-t) \\ z(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t + T/2) \\ z(t + T/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

この解は $t = T/4, 3T/4$ において 2 体衝突を持つが, 正則化のもとで滑らかな解となる.

数値計算によると, 図 8, 9 の点線の解は定理 4, 5 の解と一致することが観測された. しかし, 図 10 の族は定理 4, 5 の族とは交わらず, Euler 解の族と交わる.

参考文献

- [1] R. L. Devaney, Triple collision in the planar isosceles three-body problem, *Invent. Math.*, **60** (1980), 249–267.

- [2] R. Moeckel, Heteroclinic phenomena in the isosceles three-body problem, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1984), 857–876.
- [3] M. Shibayama, Existence and stability of periodic solutions in the isosceles three-body problem, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B13** (2009), 141-155.
- [4] M. Shibayama, Free-fall and heteroclinic orbits to triple collisions in the isosceles three-body problem, *Journal of Mathematics of Kyoto University*, **49** (2009), no. 4, 735-746.
- [5] M. Shibayama, Minimizing periodic orbits with regularizable collisions in the n -body problem, preprint.
- [6] M. Shibayama and K. Yagasaki, Heteroclinic connections between triple collisions and relative periodic orbits in the isosceles three-body problem, *Nonlinearity*, **22** (2009) 2377-2403.
- [7] M. Shibayama and K. Yagasaki, Families of symmetric periodic orbits originating from the circular Euler solution in the isosceles three-body problem, in preparation.