

GROUPS AND DIFFERENTIAL EQUATIONS

Foreword.

The following lecture note is prepared for my lectures at Shinshu University from November 13 to 17 of 1995. This lecture was a supplementary course of the group theory for the 3rd grade students who have just studied it, not including the Galois theory. My objective was to introduce them to the classical work of H.A.Schwarz “Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, J. reine. angew. Math. 75 (1873), 292-335”. I have chosen this subject because here the group theory plays a beautiful role and also because of the more recent progress made by P.Deligne and G.D.Mostow.¹ I record this lecture note here, hoping that it would be of some help for young students to access this classical work.

April 1997
Akihiko Gyoja

¹Cf. a survey article by Mostow in Bull. AMS. 16 (1987), 225-246.

群と微分方程式

行者明彦

信州大学理学部集中講義、1995 年 11 月 13 日-17 日

序文

19世紀初頭、E.Galois は方程式の根がベキ根によって構成される仕組を根のあいだのある置換群（すなわち Galois 群）の構造によって分析する一般的な原理を確立しました。（数学辞典「ガロア理論」より。）同様に、なんらかの群を用いて微分方程式の解の性質を調べようという試みがいくつかあります。そのようなものの一つに次があります。

H.A.Schwarz, Ueber diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Function ihres vierten Elementes darstellt, J. reine. angew. Math. 75 (1873), 292-335
この論文で、Schwarz は群論を用いて次の問題に対する美しい解答を与えました。

問題. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ が与えられたとき、超幾何微分方程式

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

のすべての解 $y = \varphi(x)$ が x の代数関数になるための条件を求めよ。

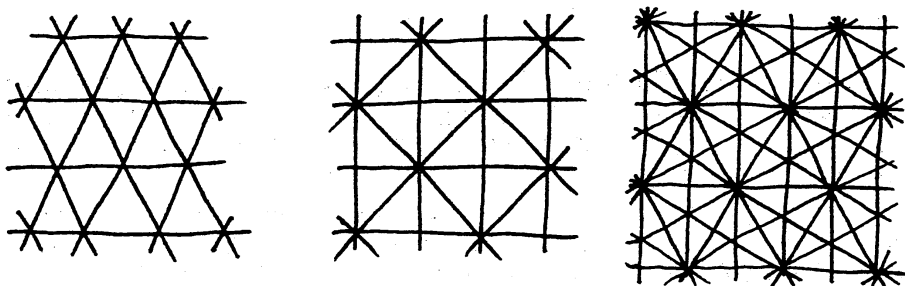
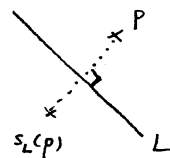
ここで代数関数とは、2変数既約多項式により与えられる関係式 $F(x, y) = 0$ を $y = f(x)$ と解いて得られる関数のことです。（例えば $y = \sqrt{x}$ は $F(x, y) = y^2 - x = 0$ を解いて得られますから、これは代数関数です。）ここでは Schwarz のこの仕事を紹介します。

1. 鏡映群

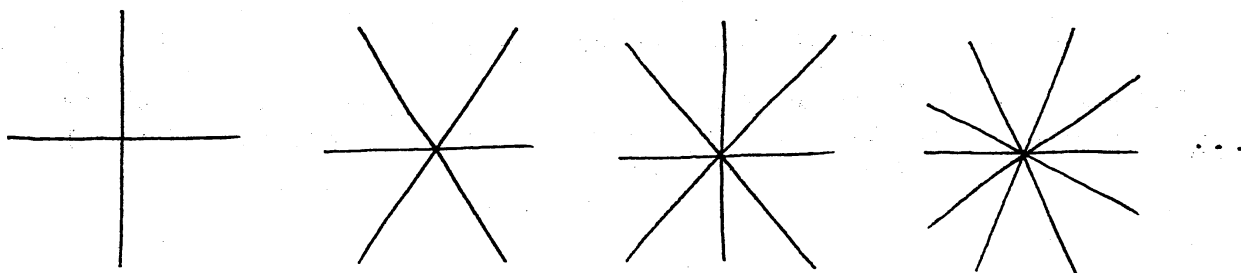
1.1. ユークリッド幾何学における鏡映群

1.1.1. 鏡映群. 平面 $\mathbb{R}^2$ 中の直線 L に関する鏡映を s_L とする. (いくつかの) 鏡映から生成される変換群を (平面の) 鏡映群という. L を s_L の鏡映面という.

1.1.2. 例.

($\mathbb{R}^2$ の中の鏡映面の集合の例)

1.1.3. 例. 2直線 L_1 と L_2 が角度 π/n で交わるとする. このとき $s_1 := s_{L_1}$ と $s_2 := s_{L_2}$ から生成される鏡映群を $I_2^{(n)}$ と書き2面体群と呼ぶ.



1.1.4. 練習問題. $I_2^{(n)} = \{(s_1 s_2)^i, (s_1 s_2)^i s_1 \mid i = 0, 1, \dots, n-1\}$. さらに, この $2n$ ケの元はすべて異なる. (ヒント: $s_1^2 = s_2^2 = (s_1 s_2)^n = e$ (=単位元) を示し, これを用いて, これ以外に元がないことを示せ. 次に幾何学的に考えて, これら $2n$ ケの元がすべて異なることを示せ.)

1.1.5. 練習問題. 2面体群 $I_2^{(n)}$ には丁度 n ケの鏡映が含まれ, その鏡映面は (1.1.3) の図のようになる.

1.1.6. 練習問題. 2直線 L_1 と L_2 が角度 θ で交わるとする. このとき $s_1 := s_{L_1}$ と $s_2 := s_{L_2}$ から生成される鏡映群 W が有限群になるなら, 互いに素な自然数 n と k があって $\theta = \pi k/n$.

1.1.7. 練習問題. (前問の続き) このとき $W = I_2^{(n)}$.

1.1.8. 補題. W を平面の有限鏡映群とすると, W に属するすべての変換で動かされない点がある. いいかえると, 平面上にある点 P が存在して W のすべての元 w に対して $w(P) = P$.

証明. 平面上の点 Q を任意にとる. $W = \{g_1, \dots, g_n\}$ とし $P = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i(Q)$ と置くと良い (詳細は省略).

1.1.9. 練習問題. 省略した部分をきちんと証明すること.

1.1.10. 補題. W を平面の有限鏡映群とすると, ある n に対して $W = I_2^{(n)}$. 特に三角形 X の3辺を L_1, L_2, L_3 とすると3つの鏡映 $s_{L_1}, s_{L_2}, s_{L_3}$ から生成される鏡映群 W_X は有限群にはならない.

証明. (1.1.8) のように P をとる. まず直線 L に関する鏡映が W に含まれるなら $P \in L$ となることに注意する. つぎに直線 L_1 と L_2 に関する鏡映がともに W に含まれていて, しかも L_1 と L_2 のなす角度が最小になるように L_1 と L_2 をとる. このとき (1.1.6) より s_{L_1} と s_{L_2} から生成される W の部分群 W' は有限の2面体群であるので, (1.1.5) より W' に属する鏡映の鏡映面の全体 $\{L_1, \dots, L_n\}$ は (1.1.3) の図のようになる. もしも W' に属さない鏡映があれば, その鏡映面 L は P を通り L_i のいずれかとの角度が π/n よりも小さくなるので L_1 と L_2 の取り方に矛盾する. ゆえに W に属する鏡

映はすべて W' に含まれる. 特に W の生成元がすべて W' に含まれるので $W = W'$. 後半は次のようにして示せる. もし W_X が有限群になれば, その鏡映面の全体は (1.1.3) の図のようにになっているはずである. 特に L_1, L_2, L_3 も鏡映面の集合に含まれているはずだが (1.1.3) の図のどの 3 直線も三角形を形作らない. (証明終)

1.1.11. 鏡映群. 3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ 中の平面に関する (いくつかの) 鏡映から生成される変換群を (3次元ユークリッド空間の) 鏡映群という. 同様に n 次元ユークリッド空間の鏡映群というものも定義できる. 有限鏡映群は完全に分類されている (「ブルバキ: リー群とリー環, 第6章」参照). 特に3次元の場合には有限鏡映群は次のもので尽くされる. (鏡映面の集合のみを記述する.)

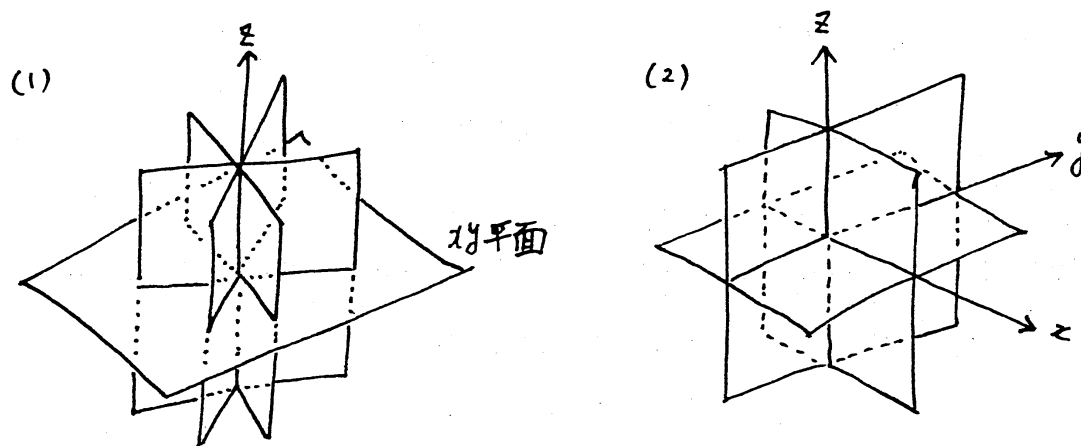
A_3 型: 正4面体の対称面の全体.

B_3 型: 正6面体の対称面の全体. (正8面体でもよい)

H_3 型: 正12面体の対称面の全体. (正20面体でもよい)

$I_2^{(n)} \times A_1$ 型: xy -平面の上に (1.1.3) の図のような直線の集合を考え, これらの直線と z -軸を含む平面を考える. これに xy -平面を付け加えると鏡映面の全体になる.

$A_1 \times A_1 \times A_1$ 型: 3つの座標平面.



1.1.12. 基本領域. この話を通じて種々の鏡映群を考えるが, そのいずれについても (1.1.2) の図や (1.1.3) の図のように鏡映面が全空間をいくつかの開領域 $\{X_0, X_1, \dots\}$ に分割する. そのうちのひとつ X_0 を固定すると次のことが成立する.

(1) $e \neq w \in W \Rightarrow w(X_0) \cap X_0 = \emptyset$.

(2) $\bigcup_{w \in W} w(X_0) = (\text{全空間})$.

このようなとき X_0 は W の作用に関する基本領域であるという. 特に

$$W \ni w \mapsto w(X_0) \in \{X_0, X_1, X_2, \dots\}$$

が全単射になることがわかるので $w \in W$ と $w(X_0)$ を同一視することにより, 群 W を目で見ることができる. (詳細は省略する. 「ブルバキ: リー群とリー環, 第5章」参照.)

1.2. 一次分数変換

1.2.1. 一次分数変換. $S = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ に対して $S(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ と置くと $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 上に $GL_2(\mathbb{C})$ の作用が定まる. $z \mapsto S(z)$ として得られる $\mathbb{P}$ の変換を一次分数変換という. ($S(z)$ のかわりに Sz または $S \cdot z$ と書くこともある.) ただし $GL_n(\mathbb{C}) = \{ (\text{行列式}) \neq 0 \text{ となる } n \times n \text{ 複素行列全体} \}$.

1.2.2. 練習問題. $z \mapsto z + \alpha$ ($\alpha \in \mathbb{C}$), $z \mapsto az$ ($0 \neq a \in \mathbb{C}$), $z \mapsto -z^{-1}$ は一次分数変換である.

1.2.3. 練習問題. 上のようにして $\mathbb{P}$ 上に $GL_2(\mathbb{C})$ の作用が本当に定まることをたしかめること.

1.2.4. n 重推移的. 群 G が集合 X に作用しているとする. $(a_1, \dots, a_n)$ ($a_i \in X, a_i \neq a_j$) と $(b_1, \dots, b_n)$ ($b_i \in X, b_i \neq b_j$) を任意にとるとき, ある $g \in G$ が存在して $ga_i = b_i$ ($i = 1, \dots, n$) となるなら, この作用は n 重推移的であるという.

1.2.5. 補題. (1.2.1) で与えられた $GL_2(\mathbb{C})$ の $\mathbb{P}$ 上の作用は 3 重推移的である.

証明. $\mathbb{P}$ の相異なる 3 点 z_2, z_3, z_4 が与えられたとき、一次分数変換

$$S(z) := \frac{z - z_3}{z - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

は、これらの 3 点をそれぞれ $1, 0, \infty$ に移す。(証明終)

1.2.6. 練習問題. z_2, z_3, z_4 をそれぞれ $1, 0, \infty$ に写す一次分数変換は、この証明で与えた S のみである。

1.2.7. 非調和比.

$$(z_1; z_2; z_3; z_4) := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} / \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4}$$

とおき、これを非調和比 (cross ratio) と呼ぶ。

1.2.8. 補題. 任意の一次分数変換 T にたいして

$$(1) \quad (Tz_1; Tz_2; Tz_3; Tz_4) = (z_1; z_2; z_3; z_4)$$

証明. $S(z) := (z; z_2; z_3; z_4)$ と置く。

$$(Tz_2, Tz_3, Tz_4) \xrightarrow{T^{-1}} (z_2, z_3, z_4) \xrightarrow{S} (1, 0, \infty)$$

であるから (1.2.6) より $ST^{-1}(w) = (w; Tz_2; Tz_3; Tz_4)$. 故に ((1) の右辺) $= S(z_1) = ST^{-1}(T(z_1)) = (Tz_1; Tz_2; Tz_3; Tz_4) = ((1) \text{ の左辺})$. (証明終)

1.2.9. 補題. 任意の一次分数変換によって円は円に写る。(約束: 直線には無限遠点も付け加えることにして、それも円の一つと見なす。)

証明. 任意の一次分数変換によって実軸が円に写ることを示せば十分。

$$(1) \quad T^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \mid Tz = \overline{Tz}\}$$

に注意する. $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$ なら (1) の定義式 (すなわち $\{ \}$ の中の式) は

$$(2) \quad \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\overline{az+b}}{\overline{cz+d}} \text{ すなわち } (a\overline{c} - c\overline{a})|z|^2 + (a\overline{d} - c\overline{b})z + (b\overline{c} - d\overline{a})\overline{z} + (b\overline{d} - d\overline{b}) = 0$$

となる. (2) 式は、 $a\overline{c} - c\overline{a} = 0$ であれば直線を表わし、 $a\overline{c} - c\overline{a} \neq 0$ であれば円を表わす。(証明終)

1.2.10. 補題. 複素球面上の 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円上にあるための必要十分条件は $(z_1; z_2; z_3; z_4) \in \mathbb{R}$.

証明. (1.2.5) の証明中の S により 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 はそれぞれ $(z_1; z_2; z_3; z_4), 1, 0, \infty$ に写される. ゆえに条件が満たされれば、後者の 4 点は同一円上にあり、従って (1.2.9) より前者の 4 点も同一円上にある. 逆に 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 が同一円上にあれば (1.2.9) より $(z_1; z_2; z_3; z_4), 1, 0, \infty$ も同一円上にある. $1, 0, \infty$ を通る円は実軸であるから $(z_1; z_2; z_3; z_4) \in \mathbb{R}$. (証明終)

1.2.11. 練習問題. 2つの任意の円 C_1, C_2 に対し、 C_1 を C_2 に写す一次分数変換 T が存在する。(ヒント: まず $C_2 = \mathbb{R}$ のときに証明すれば十分であることを示す. さらにその場合には C_1 上に 3 点 z_2, z_3, z_4 を取り、この 3 点をそれぞれ $1, 0, \infty$ に写す一次変換 T を考える。)

1.2.12. 補題. 一次分数変換は角度を保つ。

証明. 複素関数論で良く知られているように、一般に解析関数 $w = f(z)$ は $f'(a) \neq 0$ となる点 a の近くでは等角写像を与える。(証明終)

1.3. 複素球面の鏡映

1.3.1. 鏡映 $s_C(z)$. 円 C に対して $\mathbb{R} = T(C)$ となる一次分数変換 T をとり C に関する (複素球面の) 鏡映 $s_C(z)$ を $s_C(z) := T^{-1}(\overline{T(z)})$ により定義する。

この定義では鏡映 $s_C(z)$ が T の取り方に依存しないことを示す必要がある。そのために $s_C(z)$ を具体的に式で書いて見よう。円 C の中心が $a \in \mathbb{C}$ で、半径が R とする。(式で書くと C は

$$(1) \quad |z - a|^2 = R^2 \quad \text{即ち、} \overline{z - a} = \frac{R^2}{z - a}$$

で与えられる。) T を上のように取り、 $z_2 = T^{-1}(1)$, $z_3 = T^{-1}(0)$, $z_4 = T^{-1}(\infty)$ とおく。 $T: (z_2, z_3, z_4) \rightarrow (1, 0, \infty)$ であるから (1.2.6) より $T(z) = (z; z_2; z_3; z_4)$ 。ゆえに

$$\begin{aligned} (s_C(z); z_2; z_3; z_4) &= T s_C(z) = \overline{T(z)} = \overline{(z; z_2; z_3; z_4)} \\ &= \overline{(z - a; z_2 - a; z_3 - a; z_4 - a)} \quad \because (1.2.2) \text{ and } (1.2.8) \\ &= (\overline{z - a}; \overline{z_2 - a}; \overline{z_3 - a}; \overline{z_4 - a}) \\ (2) \quad &= (\overline{z} - \overline{a}; \frac{R^2}{z_2 - a}; \frac{R^2}{z_3 - a}; \frac{R^2}{z_4 - a}) \quad \because (1) \\ &= (a + \frac{R^2}{\overline{z} - a}; z_2; z_3; z_4). \end{aligned}$$

最後の等式は任意の一次分数変換で非調和比が不変である ((1.2.8) 参照。) という事実を、一次分数変換 $w \mapsto a + \frac{R^2}{\overline{w}}$ に適用して得られる。 ((1.2.2) 参照。) 一次分数変換 $w \mapsto (w; z_2; z_3; z_4)$ の逆変換を (2) 式に作用させると次式が得られる。

$$(3) \quad \begin{aligned} s_C(z) &= a + \frac{R^2}{\overline{z - a}} \quad \text{すなわち} \\ (s_C(z) - a)(\overline{z - a}) &= R^2 \end{aligned}$$

1.3.2. 練習問題. 一次分数変換 T と円 C に対し $s_{T(C)} = T s_C T^{-1}$. (ヒント: まず $T(C) = \mathbb{R}$ となることを考える。このとき $s_{T(C)}(z) = \overline{z}$ 。一方 $s_C(z) = T^{-1}(\overline{T(z)})$ と定義したことを思い出すと結果が得られる。一般の場合は、この特別な場合から得られる。)

1.3.3. 補題. w がいくつかの鏡映の積であれば $s_{w(C)} = w s_C w^{-1}$ 。

証明. はじめから w は、ある円 C' に関する鏡映であるとしてよい。一次分数変換 T を $T(C') = \mathbb{R}$ となるように取る。すると (1.3.2) をくりかえし用いて、

$$\begin{aligned} (1) \quad T w T^{-1} &= T s_{C'} T^{-1} = s_{T(C')} = s_{\mathbb{R}} \\ (2) \quad T w s_C w^{-1} T^{-1} &= T w T^{-1} \cdot T s_C T^{-1} \cdot (T w^{-1} T^{-1})^{-1} = s_{\mathbb{R}} s_{T(C)} s_{\mathbb{R}} \\ (3) \quad T s_{w(C)} T^{-1} &= s_{T w(C)} = s_{T w T^{-1}(T(C))} = s_{s_{\mathbb{R}}(T(C))} \end{aligned}$$

(2) = (3) を示せばよい。 $C'' := T(C)$ と置くと示すべきことは

$$(4) \quad s_{\mathbb{R}} s_{C''} s_{\mathbb{R}} = s_{s_{\mathbb{R}}(C'')}$$

1.3.4. 練習問題. (4) 式を示せ。 (ヒント: (1.3.1) の (3) 式を用いよ。計算で証明してもよいが、(1.3.1) の (3) 式の幾何学的な意味を考えれば計算しなくても証明できる。)

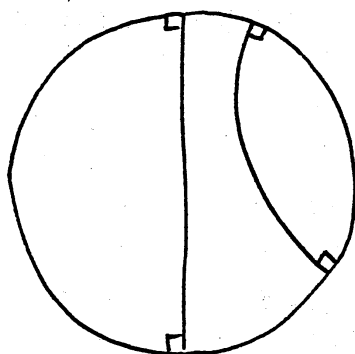
1.3.5. 補題. 円 C に対し、鏡映 $z \mapsto s_C(z)$ は角度を保つ。(ただし符号は除いて考える。)

証明. (1.3.1) のように一次変換 T を用いて $s_C(z) = T^{-1}(\overline{T(z)})$ と表わす。 (1.2.12) より $z \mapsto T(z)$ は角度を保つ。一方 $z \mapsto \overline{z}$ も明らかに角度を保つ。従って結果が得られる。(証明終)

1.3.6. 練習問題. 円 C に対し、鏡映 $z \mapsto s_C(z)$ は円を円に写す。(ヒント: (1.2.9) をもちいて (1.3.5) の証明を真似る。)

1.4. 非ユークリッド幾何学 (双曲幾何) における鏡映群

1.4.1. (非ユークリッド的) 直線. 単位円板 $D = \{x + iy \mid x^2 + y^2 < 1\}$ の (非ユークリッド的) 直線とは単位円 $\partial D = \{x + iy \mid x^2 + y^2 = 1\}$ と直交する円のことで定義する。ただし (1.2) 節と同様、直線



も円の一種とみなす. ユークリッド幾何学でいう普通の意味の直線と区別する必要があるときには 双曲的直線と呼ぶ.

1.4.2. 注意. 2直線は交わらないとき平行であるということにすると, 直線 L とその上にない点 P に対して, P を通り L に平行な直線が無数にひける. 「非ユークリッド幾何学」とよばれる理由である.

1.4.3. 練習問題.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

と置くと, G は群になり, 対応

$$G \ni A = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 i & b_1 + b_2 i \\ b_1 - b_2 i & a_1 - a_2 i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_1 - b_1 & -a_2 - b_2 \\ a_2 - b_2 & a_1 + b_1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$$

により $SL_2(\mathbb{R}) (= \{ (\text{行列式}) = 1 \text{ となる } 2 \times 2 \text{ 実行列全体からなる群} \})$ と同形になる. (ヒント: $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ と置き PAP^{-1} を計算する.)

1.4.4. 練習問題. $T \in G$ による一次分数変換 $z \mapsto Tz$ は単位円板 D をそれ自身に写し, 双曲的直線を 双曲的直線に写す. (ヒント: 前半については, まず (1.2.9) を用いて $T(D)$ はある円の内部, または外部であることを示す. 次に $T(0)$, $|T(1)|$, $|T(-1)|$, $|T(i)|$ を調べると $T(D)$ が決定できる. 後半については (1.2.12) を用いよ.)

1.4.5. 練習問題. $G \cdot 0 = D$. ($G \cdot 0 = \{T0 \mid T \in G\}$) $G \cdot 1 = \partial D$. D の上に G は推移的に作用する. ∂D の上にも G は推移的に作用する. (ただし $\partial D = \{z \mid |z| = 1\}$.)

1.4.6. 練習問題. さらに ∂D 上に G は 2 重推移的に作用する. (ヒント: $P, Q \in \partial D$ とする. $g \in G$ をうまくとると $gP = -1$. $gQ = Q'$ と置く. $a \in \mathbb{R}$ に対し $g_a = \begin{pmatrix} 1 - (ai/2) & -ai/2 \\ ai/2 & 1 + (ai/2) \end{pmatrix}$ と置くと $g_a \cdot (-1) = -1$. a をうまくとると $g_a \cdot 1 = Q'$.)

1.4.7. 練習問題. 任意の 双曲的直線 C に対し, ある $g \in G$ があって $g(C) = \mathbb{R}$. (ヒント: C と ∂D の交点を P, Q とする. $g \in G$ をうまくとって $gP = -1$, $gQ = 1$ とする. このとき $g(C)$ は何か?)

1.4.8. 補題. 双曲的直線に関する鏡映は単位円板 D をそれ自身に写し, 双曲的直線を 双曲的直線に写す.

証明. C を 双曲的直線とし, $C \cap \partial D = \{P, Q\}$ とする. $s_C(\partial D) =: C'$ とすると (1.3.5) と (1.3.6) より C' は C と点 P, Q で直角に交わる円になる. 従って

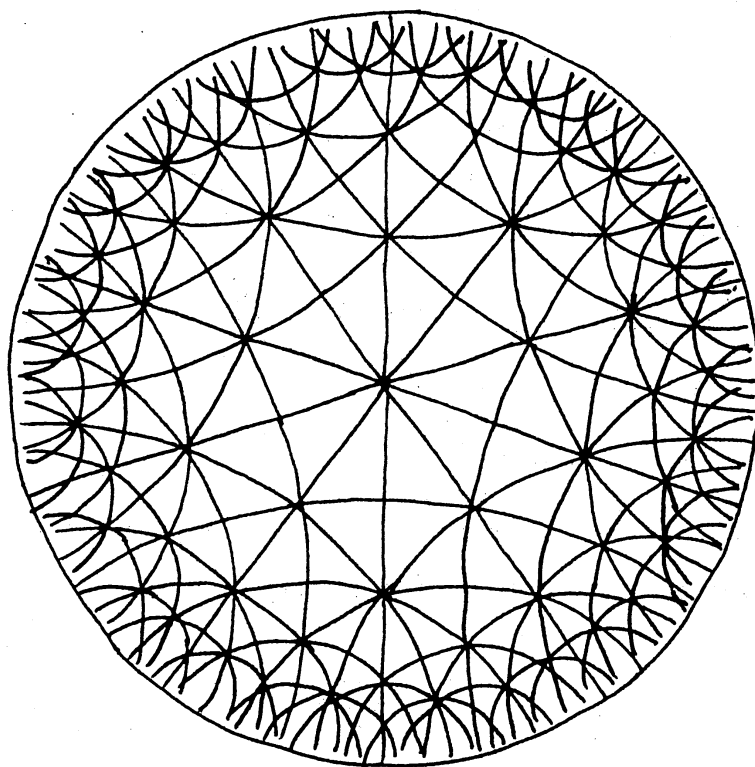
$$(1) \quad C' = \partial D.$$

従って $s_C(D)$ は単位円の内部または外部になる. それが内部であることは $D \cap C$ が s_C で不変であることに注意すればわかる. (1) と (1.3.5) と (1.3.6) より s_C が 双曲的直線を双曲的直線に写すことが解る. (証明終)

1.4.9. 双曲的三角形. 3本の 双曲的直線によって囲まれる図形を三角形, または双曲的三角形と呼ぶ.

1.4.10. 命題. 双曲的三角形 X の辺が 双曲的直線 C_1, C_2, C_3 からなっているものとし, C_i に関する鏡映を s_i とする. s_1, s_2, s_3 から生成される群 W は決して有限群にはならない.

証明. 双曲的三角形を鏡映により写して行くと限りなく円板の境界に近づけることができる. 群 W が有限群であればこのようなことは起こりえない.



注意. 一般に D に含まれる図形 X の面積 $|X|$ を次式で定義する.

$$|X| := \iint_{x+iy \in X} \frac{4dx dy}{(1-x^2-y^2)^2}$$

このとき

- (1) $|D| = \infty$.
 - (2) $g \in G$ に対し $|gX| = |X|$.
 - (3) X が双曲的三角形で、その三頂点の角度が α, β, γ であれば、 $|X| = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)$ がわかる. ((1.5.5) 参照.)
- これらの事実を用いても (1.4.10) が示せる.

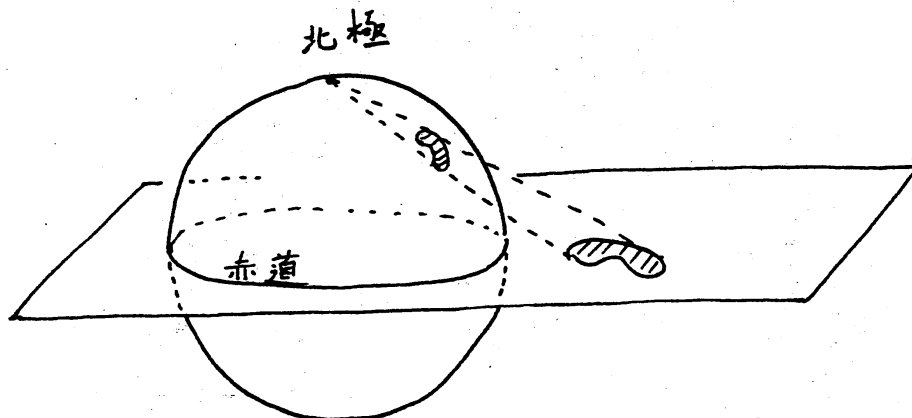
1.5. 非ユークリッド幾何学 (球面幾何) における鏡映群

1.5.1. 単位球面の (非ユークリッド的) 直線とは大円のことと定義する. これを球面直線とも呼ぶ. (注意: 球の中心を通る平面と球面の交わりを大円という.)

1.5.2. 注意. (1.4.2) と同様に 2 直線は交わらないとき平行であるということにすると、直線 L とその上にない点 P に対して、 P を通り L に平行な直線は存在しない。「非ユークリッド的」という理由。

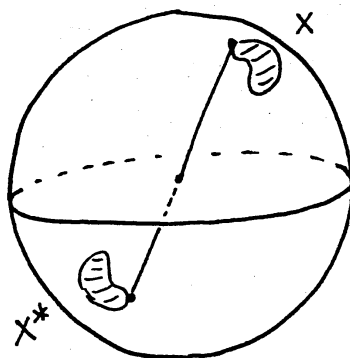
1.5.3. 球面三角形. 3 本の球面直線によって囲まれる図形を球面三角形と呼ぶ。三角形の頂点における角度は自然に定義する。図形 X の面積 $|X|$ は通常のものとする。たとえば全球面の面積は 4π 。球面上の点 P と球の中心に関して対称な点 P^* を対極点 (anti-podal point) と呼ぶ。

1.5.4. 投影図. 球面 S と平面 $\mathbb{R}^2$ が S の赤道を共有するものとし S 上の図形を北極から $\mathbb{R}^2$ に投影する。以下ではこのようにして S 上の図形を平面上の投影図により表わす。このとき北極は無限遠点に対応する。



1.5.5. 注意. (1) 点 P を通る大円は P の対極点 P^* も通ることに注意すると P^* の位置は大円の投影図からよみとれる。

(2) 球面上の図形 X の対極点の全体を X^* とすると $|X| = |X^*|$ 。



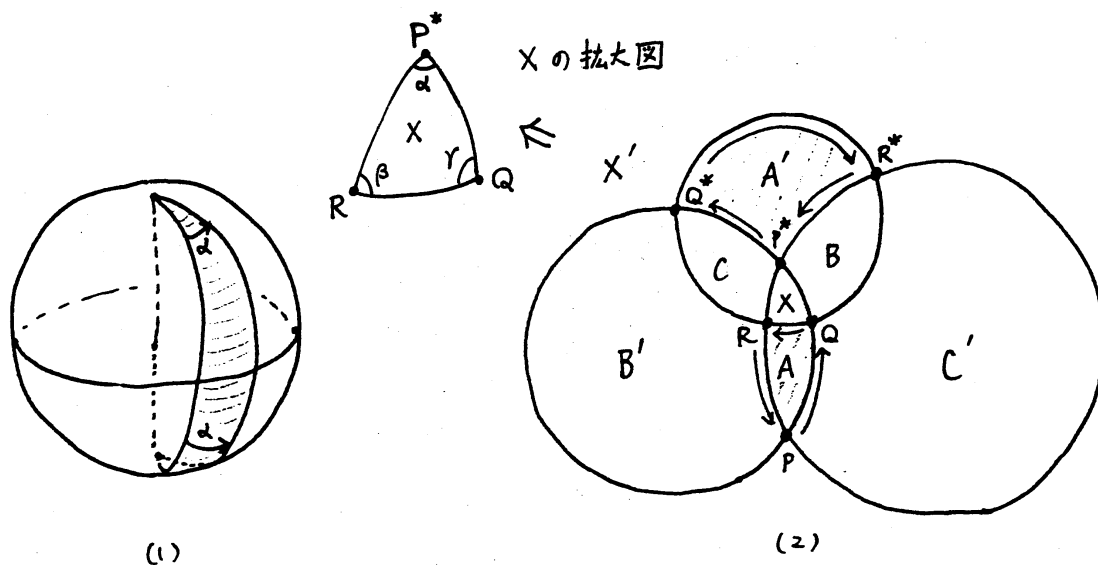
1.5.6. 補題. 球面三角形 X の 3 頂点における角度を α, β, γ とすると $|X| := (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ 。

証明. (1) $\gamma = \pi$ のとき: このときは $\alpha = \beta$ であり、次のページの図 (1) よりあきらかなように $|X| = 4\pi \times (\alpha/2\pi) = 2\alpha = \alpha + \beta = (\alpha + \beta + \gamma) - \pi$ 。

(2) 一般の時: 次のページの図 (2) において点 x を矢印に沿って点 P から点 Q まで動かすと、その対極点 x^* は同じ大円の上を P^* から Q^* まで動く。さらに x を Q から R まで動かすと x^* は Q^* から R^* まで図 (2) のように動く。このようにして A' が A の対極点の全体であることがわかる。ゆえに (1.5.5) の (2) より $|A| = |A'|$ 。同様に $|B| = |B'|$, $|C| = |C'|$, $|X| = |X'|$ がわかる。さらに (1) より次式が得られる。(3) を得るのには (1.5.5) の (2) を用いる.)

- (1) $|X| + |A| = 2\alpha$, i.e., $|A| = 2\alpha - |X|$
- (2) $|X| + |B| = 2\beta$, i.e., $|B| = 2\beta - |X|$
- (3) $|X| + |C| = 2\gamma$, i.e., $|C'| = |C| = 2\gamma - |X|$
- (4) $|X| + |A| + |B| + |C'| = 2\pi$

(1), (2), (3) を (4) に代入して式を整理すると結果が得られる。(証明終)

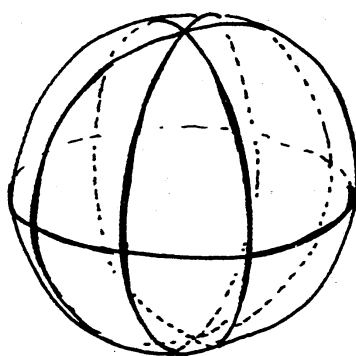
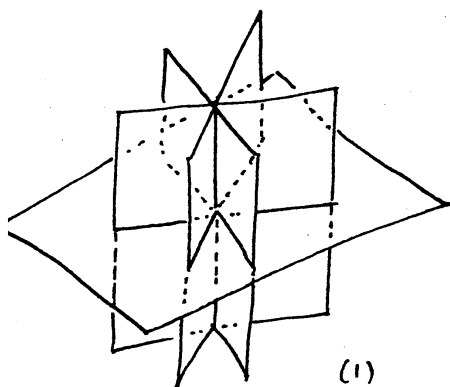


1.5.7. 鏡映. 球面直線 (=大円) C に関する鏡映とはこの大円を通る平面に関するユークリッド幾何学の意味の鏡映と定義する. 従って

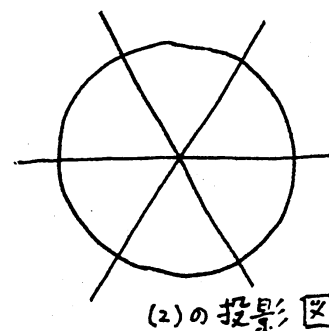
(A) 球面幾何学の意味の鏡映群と

(B) ユークリッド幾何学の意味の鏡映群

とは同じものである. たとえば (B) の意味の有限鏡映群 $I_2^{(3)} \times A_1$ の鏡映面は図 (1) のようになり (A) の意味の鏡映面は図 (2) のようになる. (鏡映面がわかれば鏡映群もわかることを思い出そう. (1.1.12) 参照.)



(2)



(2)の投影図

特に (B) の意味の有限鏡映群 W は (1.1.11) で完全に分類されていたので, (A) の意味の有限鏡映群も完全に分類できることになる. このことを用いると次の定理が得られる.

1.5.8. 定理. 球面三角形 X の辺が 球面直線 C_1, C_2, C_3 からなっているものとし, C_i に関する鏡映を s_i とする. s_1, s_2, s_3 から生成される群 W が有限群になるための必要十分条件は, その3つの頂点に

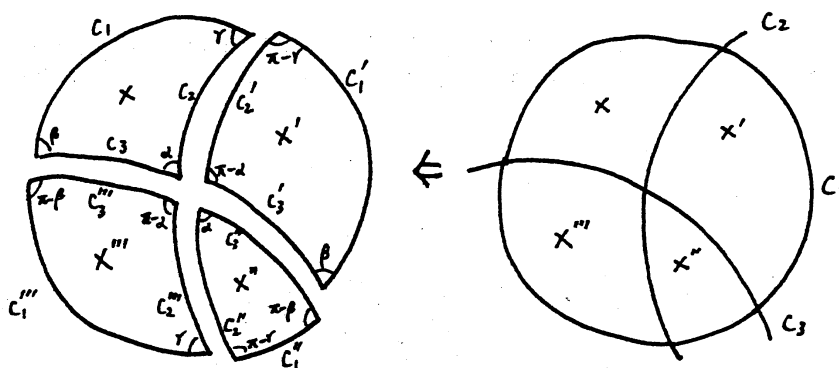
おける角度 λ, μ, ν が次の表のいずれかになることである.

角度の表 (π は省略、 $\lambda \geq \mu \geq \nu$)、 I では $k = 1, 2, \dots, [m/2]$

I	$1/2$	$1/2$	k/m	$I_2^{(m)}$
II	$1/2$	$1/3$	$1/3$	A_3
III	$2/3$	$1/3$	$1/3$	
IV	$1/2$	$1/3$	$1/4$	B_3
V	$2/3$	$1/4$	$1/4$	
VI	$1/2$	$1/3$	$1/5$	H_3
VII	$2/5$	$1/3$	$1/3$	
VIII	$2/3$	$1/5$	$1/5$	
IX	$1/2$	$2/5$	$1/5$	
X	$3/5$	$1/3$	$1/5$	
XI	$2/5$	$2/5$	$2/5$	
XII	$2/3$	$1/3$	$1/5$	
XIII	$4/5$	$1/5$	$1/5$	
XIV	$1/2$	$2/5$	$1/3$	
XV	$3/5$	$2/5$	$1/3$	

付録図 (4) 参照

注意. 下図のようになっていると、例えば C'_1 と C''_1 に関する鏡映は同じものであるから4つの三角形 X, X', X'', X''' のうちのいずれをとってきても、その3辺に関する鏡映から生成される鏡映群は同じものになる. これらの三角形のうち角度の和の最小のもの ((1.5.6) を用いて言い替えると「面積最小のもの」) だけを表に入れた. 同じ理由ですべての頂点での角度 α が $0 < \alpha < \pi$ となっているものに限った.



定理の証明. (1.5.7) で説明した理由により W の鏡映面の全体は

A_3 型 $\rightarrow$ 付録図 (1) ((A) の意味の鏡映面を (1.5.4) のように平面に投影した図.)

B_3 型 $\rightarrow$ 付録図 (2)

H_3 型 $\rightarrow$ 付録図 (3)

$I_2^{(n)} \times A_1$ 型 $\rightarrow$ (1.5.7) の図を参照.

$A_1 \times A_1 \times A_1$ 型 $\rightarrow$ これは自明だから省略する.

(A_3 型などについては (1.1.11) 参照.) C_1, C_2, C_3 はこの鏡映面の一部であるから、それらでかこまれる球面三角形 X の可能性を数え上げるのはむづかしくない. 実際に数え上げる作業は省略するが、その結果が上の表になる. (証明終)

1.5.9. 注意. (1.5.8) では X の頂点の角度しか与えなかったが、実は球面三角形は3頂点の角度を与えれば一意的に定まってしまう. この一般的な証明は省くが3頂角が $(\pi/2, \pi/2, \alpha)$ のときにだけ、この事実を証明しておこう. このときには2つの直角を結ぶ辺 (を含む大円) を赤道としてもよい. すると残りの2辺は経線になる. 一方を経度0としてもよい. するともう一方は経度 α となり球面三角形が一意に定まる. (証明終)

1.6. 複素球面の鏡映群

1.6.1. 前節までの結果の見直し. (1.1.10), (1.4.10), (1.5.8) の各々では、いろいろな幾何学において「三角形」を考え、特にその3辺に関する「鏡映」から生成される群が有限となる場合を分類した:

- (1) ユークリッド幾何と双曲幾何では決して有限にはならない。
 (2) 球面幾何では有限になる場合を (1.5.8) で一覧表にした。
 この節では (1), (2) を用いて次の定理を証明する。

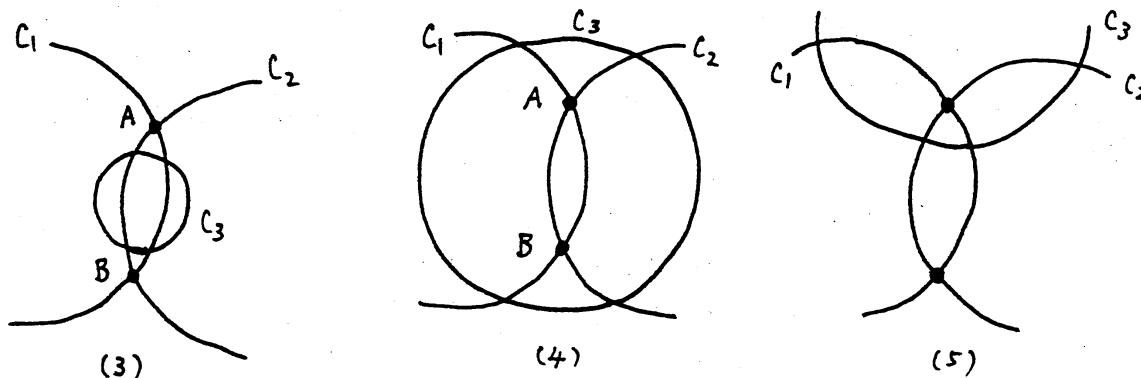
1.6.2. 定理. 複素球面 $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の3つの円 C_1, C_2, C_3 からなる「三角形」 X が与えられたとする。このとき3つの鏡映 $s_{C_1}, s_{C_2}, s_{C_3}$ から生成される鏡映群 W が有限になるための必要十分条件は X の3頂点の角度が (1.5.8) の表のいずれかの (λ, μ, ν) を用いて

$$\begin{aligned} &(\lambda, \mu, \nu) \\ &(\lambda, \pi - \mu, \pi - \nu) \\ &(\pi - \lambda, \mu, \pi - \nu) \\ &(\pi - \lambda, \pi - \mu, \nu) \end{aligned}$$

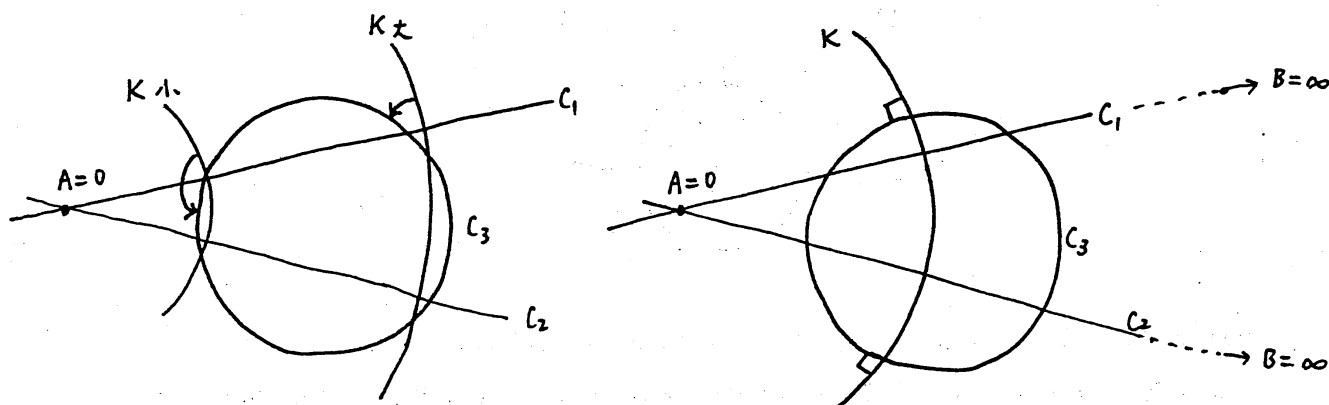
のいずれかと表わせることである。

1.6.3. 証明 (第1段階). C_1 と C_2 の交点を A, B とすると (必要なら A と B はとりかえて) つぎの可能性がある：

- (1) C_1, C_2, C_3 が2点を共有する。
- (2) C_1, C_2, C_3 が1点を共有する。
- (3) A と B はともに C_3 の外部にある。
- (4) A と B はともに C_3 の内部にある。
- (5) A, B のうち一方は C_3 の内部に、他方は C_3 の外部にある。



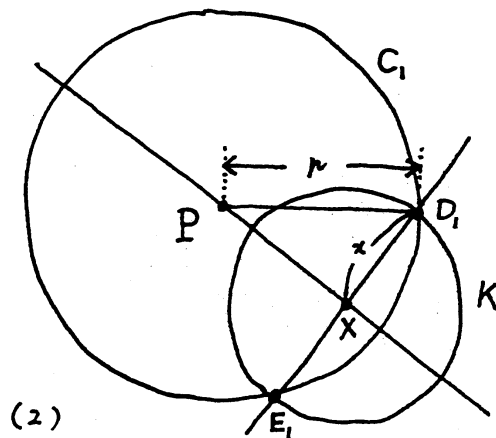
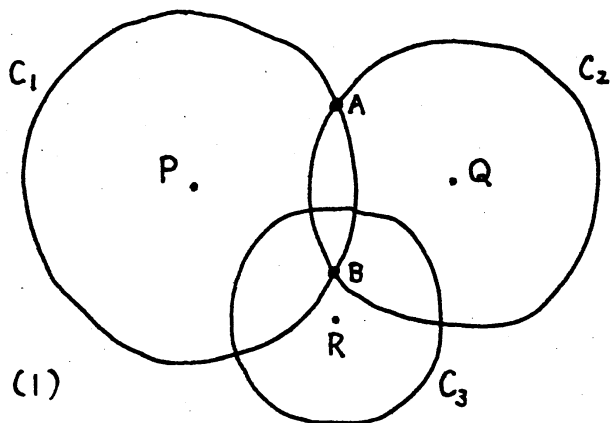
- (1) の時：三角形ができないので考えなくてよい。
 (2) の時：(1.2) で得られたことを用いると初めから $A = \infty$ としてよい。このとき C_1, C_2, C_3 はすべて普通の意味の直線になるから (1.6.1) の (1) より W は決して有限群にはならない。
 (3) の時： C_2, C_3 の交点は2つとも C_1 の内部にあるから C_1, C_2, C_3 の番号をつけかえて (4) に帰着する。
 (4) の時：(1.2.5) より $A = 0, B = \infty$ としてよい。すると下図のようになる。さて 0 を中心とし C_3 と交わる円 K を描く。 K の半径が小さいと C_3 と K の角度は限りなく π に近づき、大きいと限りなく 0 に近づく。この角度は K の半径とともに連続的に変化するので、これが直角になるような K が存在する。



スケールを適当に調節して K は単位円であるとしてよい. すると C_1, C_2, C_3 はすべて双曲的直線になる. ((1.4) 節参照.) 従って (1.4.10) より W は有限群にはならない. こうして (5) の場合だけを考えればよいことがわかった. 以下 (5) の場合だけを考える.

1.6.4. C_1, C_2, C_3 が下図 (1) のようになっているとし, その中心をそれぞれ $P = (P_1, P_2)$, $Q = (Q_1, Q_2)$, $R = (R_1, R_2)$ とし, 半径を p, q, r とする. 中心が $X = (X_1, X_2)$ で半径が x の円 K をうまく選ぶと次の条件がみたされることを示そう.

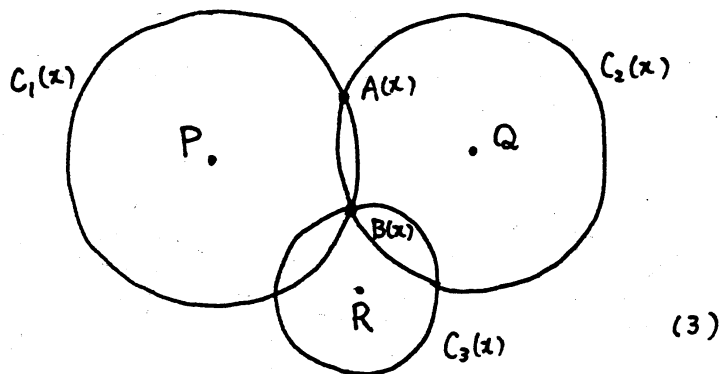
条件. K と C_i ($i = 1, 2, 3$) の交点を D_i と E_i とすると $D_i E_i$ は K の直径の両端になる.



証明. 上図 (2) より C_1 に関する条件は $p^2 - \overline{PX}^2 = x^2$. C_2, C_3 についても同様だから条件は次のように書き換えられる:

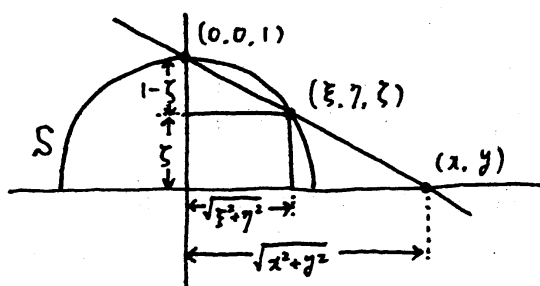
$$\begin{aligned} (1) \quad & (P_1 - X_1)^2 + (P_2 - X_2)^2 = p(x)^2 \\ (2) \quad & (Q_1 - X_1)^2 + (Q_2 - X_2)^2 = q(x)^2 \\ (3) \quad & (R_1 - X_1)^2 + (R_2 - X_2)^2 = r(x)^2 \end{aligned}$$

ただし $p(x) = \sqrt{p^2 - x^2}$, $q(x) = \sqrt{q^2 - x^2}$, $r(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. P, Q, R を中心とし半径が $p(x), q(x), r(x)$ の円を $C_1(x), C_2(x), C_3(x)$ とする. ($x = 0$ のときは元の図形になる.) $C_1(x)$ と $C_2(x)$ の交点を $A(x), B(x)$ とし, x が 0 からスタートして増大するとき $A(x), B(x)$ は A, B からスタートして連続的に変化するものとしよう. この時 $C_i(x)$ の半径はいずれも減少するので x がある値になると $B(x)$ は $C_i(x)$ の周上になる.



$B(x)$ の座標を (X_1, X_2) とすると (1), (2), (3) がみたされる. (証明終)

1.6.5. 投影. (1.6.4) の円 K を赤道とする球面を S とし S の中心 $= (0, 0, 0)$, S の北極 $= (0, 0, 1)$ となるように xyz -座標を決める. 下図のように北極から S 上の点 (ξ, η, ζ) を xy -平面の点 (x, y) に投影する.



断面図

この図より関係式

$$\begin{aligned} 1 - \zeta : \sqrt{\xi^2 + \eta^2} &= 1 : \sqrt{x^2 + y^2} \\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 &= 1 \\ (\xi, \eta) &= \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) \end{aligned}$$

を得る。これを解くと

$$\begin{aligned} (1) \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} &= \frac{1}{x^2 + y^2 + 1} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ x^2 + y^2 - 1 \end{pmatrix} \\ (2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \frac{1}{1 - \zeta} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1.6.6. 補題. (1.6.5) の対応で円は円に対応する。(今まで同様、平面上の直線も円的一种と考える.)
証明. xy -平面内の円は

$$(1) \quad a(x^2 + y^2 - 1) + 2bx + 2cy + 2d = 0$$

とかける。これを $x^2 + y^2 + 1$ で割ってから (1.6.5) の (1) を用いて (ξ, η, ζ) の式に書き換えると

$$(2) \quad a\zeta + b\xi + c\eta + d(1 - \zeta) = 0.$$

故に (x, y) が (1) で定まる円周上を動くとき (ξ, η, ζ) は (2) で定まる平面内にある。 (ξ, η, ζ) はもともと球面 S 上にあったから、このことは (ξ, η, ζ) が一つの円周上にあることを意味する。逆に「 (ξ, η, ζ) が一つの円周上を動くとき (x, y) もある円周上を動く」ことを示すには以上の議論を逆方向にたどればよい。(証明終)

1.6.7. 補題. (1.6.5) の対応は角度を保つ。

証明. $x = a(t)$, $y = b(t)$, $\dot{x} = \frac{da(t)}{dt}$, $\dot{y} = \frac{db(t)}{dt}$ とする。この時

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \frac{2}{(x^2 + y^2 + 1)^2} \underbrace{\begin{pmatrix} -x^2 + y^2 + 1 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 + 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

上のように M を定めると

$${}^t M M = (x^2 + y^2 + 1)^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

さてベクトル

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \quad a' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \quad b' = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}$$

の間につきの関係があったとする：

$$M \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix}, M \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \end{pmatrix}$$

${}^t(x, y)$ が a または b の時 ${}^t(\xi, \eta, \zeta)$ はそれぞれ a' または b' と同じ方向を向いているから、 a, b のなす角度と a', b' のなす角度が等しいことを示せばよい。

$$\begin{pmatrix} |a'|^2 & (a', b') \\ (a', b') & |b'|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_2 & a'_3 \\ b'_1 & b'_2 & b'_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \\ a'_3 & b'_3 \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} {}^t M \right) \left(M \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \right) \\ = (x^2 + y^2 + 1)^2 \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + 1)^2 \begin{pmatrix} |a|^2 & (a, b) \\ (a, b) & |b|^2 \end{pmatrix}$$

ここで $\alpha = (x^2 + y^2 + 1)^2$ と置くと、

$$\cos \theta' = \sqrt{\frac{(a', b')^2}{|a'|^2 |b'|^2}} = \sqrt{\frac{(\alpha(a, b))^2}{\alpha |a|^2 \cdot \alpha |b|^2}} = \cos \theta \quad (\text{証明終})$$

1.6.8. 系. xy -平面上の C_1, C_2, C_3 は S 上の大円に対応する. これを C'_1, C'_2, C'_3 と C_i と C_j が交わる角度は C'_i と C'_j の間の対応する角度に等しい. (とすると)

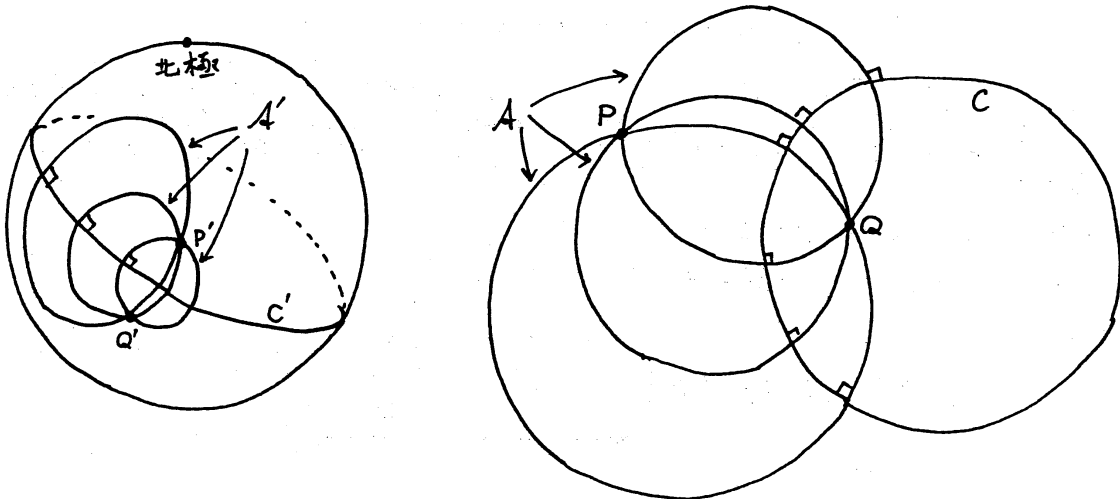
証明. 次のことに注意しよう：

- (1) 円周上の交点について $C_i \cap K = C'_i \cap K$. ($\because$ 投影のしかたより.)
- (2) $C_i \cap K$ は K の直径の両端であった. ((1.6.4) 参照.)
- (3) C'_i は球面 S 上の円周. ((1.6.6) 参照.)

これらより前半を得る. 後半は (1.6.7) より従う. (証明終)

1.6.9. 補題. S 上の点 P', Q' が大円 C' に関して鏡映の位置にあるとする. これらを xy -平面に投影して 2 点 P, Q と円 C が得られたとすると P, Q は C に関して鏡映の位置にある. (すなわち「 $s_C(P') = Q'$ 」ならば $s_C(P) = Q$ 」.)

証明. 大円 C' と直角に交わる円で P', Q' を通るものが無限に存在する. その全体を A' とし、これを xy -平面に投影する. (1.6.6) と (1.6.7) より A' の投影図 A は C と直交する円の全体になる.



A に属するすべての円は P, Q 2 点を通り、しかもこのような点は P, Q のみである. A の C に関する鏡映像 $s_C(A)$ を考える. (1.3.5) と (1.3.6) より $s_C(A)$ も C と直交する円の全体になる: $A = s_C(A)$. しかるに $\{s_C(C_1) \mid C_1 \in A\}$ の共有する点は $s_C(P)$ と $s_C(Q)$ のみであるから $\{s_C(P), s_C(Q)\} = \{P, Q\}$. 故に $s_C(P) = Q$. (証明終)

2. 基本群、多価関数、モノドロミー表現

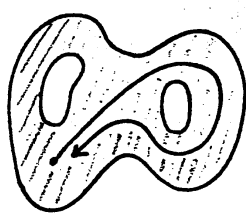
2.1. 基本群

2.1.1. 基本群. X を平面内の領域とする. この時 X の中にひとつの点 p を固定して p からスタートして X の中を動き p に戻ってくる道を考える. 図 (1) 参照. このような道 C が X の中で連続的に別の道 C' に変形できるとき $C \sim C'$ と書き, C と C' はホモトピックであるという. 互いにホモトピックな道は同じものとみなして, その全体を $\pi_1(X, p)$ または略して $\pi_1(X)$ と書き X の基本群またはホモトピー群と呼ぶ. まったく同様に, 曲面の基本群, あるいはもっと一般に位相空間の基本群が考えられる. $\pi_1(X)$ にはつぎのようにして群の構造が入る.

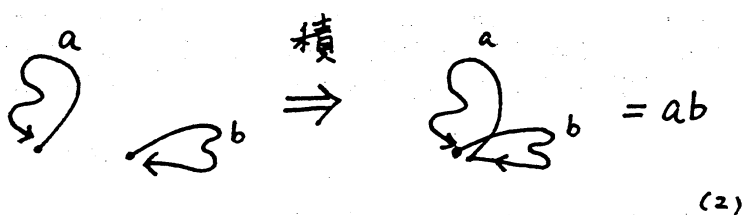
積: 図 (2) 参照.

単位元: p から “スタート” して全然動かないで p に “戻ってくる” 道. これを e と書く.

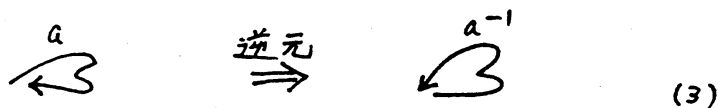
逆元: 図 (3) 参照.



(1)



(2)



(3)

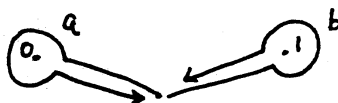
2.1.2. 単連結領域. $\pi_1(X) = \{e\}$ となる領域 X を単連結であるという.

2.1.3. 例. 開円板は単連結領域. $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (=複素平面 $\mathbb{C}$ から 0 を除いた領域) を X とすると, $\pi_1(X) = \mathbb{Z}$ (=整数全体からなる加法群).

2.1.4. 例. $X = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ とする. 下図のように道 a, b を定めると $\pi_1(X)$ の元は

$$a^{m_0} b^{n_1} a^{m_1} \dots b^{n_{k-1}} a^{m_{k-1}} b^{n_k} \quad (n_1, m_1, \dots, n_{k-1}, m_{k-1} \neq 0)$$

という形に一通りに書ける. (このような群を a と b から生成される自由群という.)



2.1.5. 例. ドーナツの表面を X とする. (のように $a, b \in \pi_1(X)$ を決めるとき $aba^{-1}b^{-1} = e$.
付録図 (5))

2.2. 多価関数.

2.2.1. 平方根. 普通 $x \geq 0$ であれば $\sqrt{x}$ は

$$(\sqrt{x})^2 = x, \quad \sqrt{x} \geq 0$$

となるように定義するが、この定義域を複素数にまで拡張することを考えよう。ただし次のことが満たされるようにしたい:

$$(1) (\sqrt{x})^2 = x.$$

$$(2) \sqrt{x} \text{ は } x \text{ の連続関数.}$$

(注意: ここでいう関数は普通の意味の関数である。すなわち変数にひとつの値を代入すると、値がひとつだけ対応するものとする。値が一つしかないことを強調する必要があるときは一価関数という。)

さて曲線 γ が与えられたとき、以上の前提のもとで $\sqrt{x}$ が γ に沿ってどのように変化するか、その様子を調べて見よう。

(A) $x = \varepsilon e^{i\theta} = \varepsilon(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($\varepsilon > 0$) として θ を 0 から π まで動かして得られる曲線を γ とし、 θ を 0 から $-\pi$ まで動かして得られる曲線を γ' としよう。 γ に沿って x が動く時 $\sqrt{x} = \sqrt{\varepsilon} e^{i\theta/2} = \sqrt{\varepsilon}(\cos(\theta/2) + i \sin(\theta/2))$ の値は $\sqrt{\varepsilon}$ から $i\sqrt{\varepsilon}$ に変化する。 ($i = \sqrt{-1}$.) これを記号で

$$\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\gamma} i\sqrt{\varepsilon}$$

と表わすことにしよう。この記号を用いると

$$\sqrt{\varepsilon} \xrightarrow{\gamma'} -i\sqrt{\varepsilon}.$$

要約すると「同じ値からスタートして、わずかに異なる道に沿って $\sqrt{x}$ を連続的に延長しても、2つの道のあいだに 0 がはさまっていればゴールでの値は異なってしまう。」

(B) 次に 1 の近くに二つの点 P, Q をとり、 P から Q に至る二つの曲線 γ, γ' を考える。ただし γ も γ' も、ともに 1 の近くから離れないものとする。 x がこれらの曲線に沿って動くときに $\sqrt{x}$ がどのように変化するか考えよう。まずゴールでの値として二通りの可能性があり、一方の値は $\equiv 1$ 、他方の値は $\equiv -1$ であることに注意しよう。さてスタート地点での値が $\sqrt{P} \equiv 1$ だったとすると、常に $\sqrt{x} \equiv 1$ でなければならず、特に二つの曲線のどちらに沿って延長した場合でもゴールでの値は $\sqrt{Q} \equiv 1$ 。このようにしてゴールでの値の二通りの可能性のうち $\equiv -1$ のものは失格する。従って、どちらの道に沿って延長した場合でもゴールでの値は同じになる。話を分かりやすくするために 1 の近くを考えたが、0 以外の点を固定して、その近くで考えるのなら全く同様である。要約すると「同じ値からスタートして、わずかに異なる道に沿って $\sqrt{x}$ を連続的に延長した時、2つの道のあいだに 0 がはさまっていなければゴールでの値は同じ。」

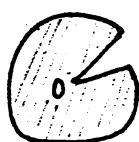
(C) (A) でも (B) でも、わずかな変化のみを考えたが、わずかな変化を無限に積み重ねて行けば任意の連続的な変形が得られるから、変化は「わずか」でなくても同様のことがいえる。したがって

「0 を含まない単連結領域 D の上ではつぎのようにして $\sqrt{x}$ が一価関数として定義できる: まず $x_0 \in D$ を固定し $\sqrt{x_0}$ の値として二つの可能性のうちのどちらかを選ぶ。次に、任意の $x \in D$ に対し x_0 から x に至る道 γ を選ぶ。このとき $\sqrt{x}$ の値は

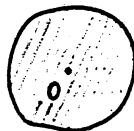
$$\sqrt{x_0} \xrightarrow{\gamma} \sqrt{x}$$

となるように定める。 γ を別のみち γ' に取り替えても γ は γ' に連続的に変形できるので、上に示したことから $\sqrt{x}$ の値は同じになるので、これで矛盾なく定義できたことになる。」

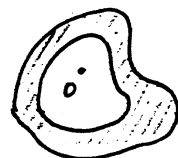
このようにして定義される一価関数のことを $\sqrt{x}$ の (一価の) 枝または branch と呼ぶ。 $x_0 \in D$ とすると、上のような一価の枝は $\sqrt{x_0}$ の値により一意に決まる。



← 一価の枝が存在する.



← 一価の枝が存在しない



2.2.2. 代数関数. もっと一般の代数関数についても同様のことを考えよう：2変数既約多項式

$$F(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_n(x)y^n$$

を考える. ($a_k(x)$ は x の多項式.) $a_k(x)$ を係数と思い y を変数と思って

$$F(x, y) = a_n(x)(y - \varphi_1(x))(y - \varphi_2(x)) \cdots (y - \varphi_n(x))$$

と因数分解しよう. この時 $y = \varphi_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$) が $F(x, y) = 0$ から定まる代数関数である. 今 $x = x_0$ に対して

$$F(x_0, y) = a_n(x_0)(y - \varphi_1(x_0))(y - \varphi_2(x_0)) \cdots (y - \varphi_n(x_0))$$

が重根を持たなかったとする. この時 x_0 の近くを離れることのない道

$$P \xrightarrow{\gamma} Q$$

を任意に考え, x を γ に沿って動かすと, スタートの時に $\varphi_i(P) \equiv \varphi_i(x_0)$ となっていれば, 最後まで $\equiv \varphi_i(x_0)$ となり, ゴールにおいても $\varphi_i(Q) \equiv \varphi_i(x_0)$ となるから $\alpha_i(Q)$ の値は γ という道のとりかたによらない. そこで $F(x_0, y) = 0$ が重根を持たないための条件を考えよう.

2.2.3. 判別式. 多項式 $f(x) = a_0 + a_1y + \cdots + a_ny^n$ に対し

$$\Delta(f) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-2} \prod_{i < j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

と置き, これを f の判別式という. 根と係数の関係を用いると $\Delta(f)$ は $a_0, a_1, \dots, a_n$ の多項式であることがわかる. その具体的な形は:

$$\Delta(a_0 + a_1y) = 1$$

$$\Delta(a_0 + a_1y + a_2y^2) = 4a_0a_2 - a_1^2$$

$$\Delta(a_0 + a_1y + a_2y^2 + a_3y^3) = 27a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - a_1^2a_2^2 - 18a_0a_1a_2a_3.$$

また $a_n \neq 0$ ならば

$$\Delta(f) \neq 0 \Leftrightarrow f(x) \text{ は重根を持たない.}$$

さて2変数既約多項式

$$F(x, y) = a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_n(x)y^n$$

を y の多項式と思って ($a_k(x)$ は係数と思って)

$$\Delta(a_0(x) + a_1(x)y + \cdots + a_n(x)y^n) = \Delta(F) = \Delta(F)(x)$$

と置く.

$$F(c, y) = a_0(c) + a_1(c)y + \cdots + a_n(c)y^n$$

の判別式は $\Delta(F)(c)$ になるから

$$\Delta(F)(c) \neq 0 \Leftrightarrow F(c, y) = 0 \text{ は重根を持たない.}$$

2.2.4. 分岐点. $\{x \mid \Delta(F)(x) = 0\}$ に属する点を ($F(x, y) = 0$ によって定まる代数関数 $y = \varphi_1(x), \dots, y = \varphi_n(x)$ の) 分岐点¹と呼ぶ. 例えば $\sqrt{x}$ の分岐点は 0 のみである. (2.2.1) で示したことは「 0 」を「分岐点」と読み替えれば (2.2.2) の議論により一般の代数関数についても成立することがわかる.

「分岐点を含まない単連結領域の上では $F(x, y) = 0$ により定まる代数関数の一価の枝 $\varphi_k(x)$ ($k = 1, \dots, n$) が定義できる. さらに, $x_0 \in D$ とすると, このような一価の枝は $\varphi_k(x_0)$ の値により一意に決まる.」

¹ただし, これはここだけの用語.

2.2.5. 分岐点の一般化. 分岐点という概念は代数関数でなくても定義できる. たとえば $a (> 0)$ に対して

$$\log(ae^{i\theta}) = i\theta + \log a$$

であるから, x が 0 の周りを正の方向に一周する時, $\log x$ の値は $2\pi i$ だけ変化する. 従って $\log x$ は 0 を含む領域では多価関数になるので, 0 は $\log x$ の分岐点であるということにする. (2.2.4) で示したことは, このように分岐点の定義を一般化しても成立する.

2.3. モノドロミー表現.

2.3.1. $\sqrt{x}$ のモノドロミー表現. また $\sqrt{x}$ に話を戻そう. 正の数 a を含む小さな単連結領域 D の上で $\sqrt{x}$ の二つの枝のうち $\sqrt{1} = 1$ となるものを $\sqrt{x}$ と書くことにすると, もう一方の枝は $-\sqrt{x}$ である. (領域 D が小さいことは大切ではない.) この時, 二つの枝 $\varphi_1(x) = \sqrt{x}$, $\varphi_2(x) = -\sqrt{x}$ からできるベクトル空間

$$V = \{a\varphi_1(x) + b\varphi_2(x) \mid a, b \in \mathbb{C}\} = \{a\varphi_1(x) \mid a \in \mathbb{C}\}$$

を考えよう. (ここでは, ひとつひとつの関数をベクトルとと思っている.) γ を 0 のまわりを正の向きに一周する道とする. 話を具体的にするために γ は $ae^{i\theta}$ ($\theta: 0 \rightarrow 2\pi$) と与えられているものとする. この時 γ に沿って φ_1 を延長すると, 一周して戻ってきたときには φ_1 は $-\varphi_1$ に変わってしまう. ($\because \sqrt{ae^{i\theta}} = \sqrt{a}e^{i\theta/2}$. これは $\theta: 0 \rightarrow 2\pi$ と変化するとき $\sqrt{a} \rightarrow \sqrt{a}e^{2\pi i/2} = \sqrt{a}(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -\sqrt{a}$.) (2.2.1) で導入した記号を用いると

$$\varphi_1 \xrightarrow{\gamma} -\varphi_1.$$

この記号をもう少し簡略にして

$$\gamma(\varphi_1) = \gamma\varphi_1 = -\varphi_1$$

とも書くことにし, 同様のことを他の多価関数についても考えて見よう.

2.3.2. $\log x$ のモノドロミー表現. 前節と同様 D は正の数 a を含む小さな単連結領域とし, D の上で $\log x$ の枝 $\varphi_0(x)$ を $\varphi_0(1) = 0$ となるように定めると他の枝は $\varphi_k(x) = \varphi_0(x) + 2\pi ki$ ($k \in \mathbb{Z}$) で与えられる. ($\because \log 1 = a + bi \Leftrightarrow e^{a+bi} = 1 \Leftrightarrow e^a(\cos b + i\sin b) = 1 \Leftrightarrow a = 0, b = 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$)) 記号を見やすくするために以下では φ_0 のかわりに $\log x$ と書くことにする. V を $\varphi_k = \log x + 2\pi ki$ ($k \in \mathbb{Z}$) から生成されるベクトル空間とする:

$$\begin{aligned} V &= \{\cdots + a_0 \log x + a_1(\log x + 2\pi i) + a_2(\log x + 4\pi i) + \cdots \mid a_k \in \mathbb{C}\} \\ &= \{a \cdot \log x + b \cdot 1 \mid a, b \in \mathbb{C}\} \end{aligned}$$

であるから V は 2 次元のベクトル空間になる. γ は $ae^{i\theta}$ ($\theta: 0 \rightarrow 2\pi$) で与えられているものとし V に属する関数を γ に沿って延長することを考えよう. $\log(ae^{i\theta}) = \log a + i\theta$ であるから

$$\gamma(\log x, 1) = (\log x + 2\pi i, 1) = (\log x, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix}.$$

(ここで左辺は $(\gamma(\log x), \gamma(1))$ を意味する.) 同様にして

$$\gamma^k(\log x, 1) = (\log x + 2\pi ik, 1) = (\log x, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi ik & 1 \end{pmatrix} = (\log x, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix}^k.$$

がわかる. $\log x$ の分岐点 0 を $\mathbb{C}$ から除いた領域を $\Omega (= \mathbb{C} \setminus \{0\})$ とすると, 以上のようにして

$$\pi_1(\Omega) \ni \gamma^k \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2\pi i & 1 \end{pmatrix}^k \in GL_2(\mathbb{C})$$

という準同形写像がえられた.

2.3.3. 一般の多価関数のモノドロミー表現. 一般の多価関数 $\varphi(x)$ を考える. ただし変数 x の動く範囲は $\mathbb{C}$ のなかの領域 U に限るものとする. $\varphi(x)$ の分岐点 0 を U から除いた領域を Ω とし, Ω のなかの単連結領域 D を任意に固定する. D の上の $\varphi(x)$ の枝を $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots\}$ とし, これらから生成されるベクトル空間を V とし, その基底を $\{\psi_1(x), \dots, \psi_n(x)\}$ とすると $\gamma \in \pi_1(\Omega)$ に対し $\gamma\psi_k \in V$. 故に

$$\gamma(\psi_1, \dots, \psi_n) = (\psi_1, \dots, \psi_n)M(\gamma)$$

となる行列 $M(\gamma)$ が見つかる. さらに $\det M(\gamma) \neq 0$ であり

$$\pi_1(\Omega) \ni \gamma \mapsto M(\gamma) \in GL_n(\mathbb{C})$$

は準同形写像であることがわかる². このような行列 $M(\gamma)$ を γ に対応するモノドロミー行列と言い, 準同形写像 $\gamma \mapsto M(\gamma)$ のことをモノドロミー表現と呼ぶ. (もっと一般に群から $GL_n(\mathbb{C})$ への準同形写像のことを表現と言う.) また $M(\pi_1(\Omega))$ をモノドロミー群と呼ぶ.

2.3.4. 補題. 代数関数のモノドロミー群は有限群.

証明. (2.2.2) のように

$$(1) \quad F(x, y) = a_n(x)(y - \varphi_1(x))(y - \varphi_2(x)) \cdots (y - \varphi_n(x))$$

とする. まずスタートの時点で x は D に属しているものとする. 次に y は固定して x だけを $\gamma \in \pi_1(\Omega)$ に沿って動かす. また D に戻ってくるゴールの時点では (1) は

$$(2) \quad \gamma F(x, y) = a_n(x)(y - \gamma \cdot \varphi_1(x))(y - \gamma \cdot \varphi_2(x)) \cdots (y - \gamma \cdot \varphi_n(x))$$

に変わる. しかし $F(x, y)$ は x について一価関数であるから (2) の左辺は $F(x, y)$ に等しく, 従って $\{1, 2, \dots, n\}$ のある置換 σ が存在して

$$(3) \quad \gamma \cdot \varphi_1(x) = \varphi_{\sigma(1)}(x), \dots, \gamma \cdot \varphi_n(x) = \varphi_{\sigma(n)}(x).$$

さて (2.3.3) と同じく V を $\{\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)\}$ から生成されるベクトル空間とする. もし別の $\gamma' \in \pi_1(\Omega)$ にも同じ置換が対応しているなら (3) を見てわかるように

$$\gamma'(\varphi) = \gamma(\varphi) \quad \forall \varphi \in V$$

すなわち $M(\gamma) = M(\gamma')$. 言い替えると $M(\gamma)$ は σ のみで定まるということになる. 従って $M(\gamma)$ としては高々 $n!$ 通りの行列しか出てこない. (証明終)

注意. 以上の証明で置換が重要な役割を果たした. 実はこれは Galois 理論にほかならない.

2.3.5. 練習問題. $\log x$ は代数関数ではない. (ヒント: (2.3.2) と (2.3.4) を用いよ.)

2.3.6. 練習問題. $(\log x)^2$ のモノドロミー表現を求めること. ここでは $U = \mathbb{C}$ とする. (ヒント: (2.3.3) の記号に従い, 次の順序で考えれば良い.)

- (1) $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ を示す. (当たり前と思えば証明しなくても良い.)
- (2) $(\log x)^2$ の枝 $(\log x + 2\pi i k)^2$ ($k \in \mathbb{Z}$) から生成されるベクトル空間の基底を求める.
- (3) (2.3.2) を真似てモノドロミー行列を計算する.)

2.3.7. 練習問題. $\sqrt{x} \log x$ のモノドロミー表現を求めること. ここでは $U = \mathbb{C}$ とする. ((2.3.6) のヒントを参照.)

2.3.8. 練習問題. x^α ($\alpha \in \mathbb{Q}$) のモノドロミー表現を求めること. ここでは $U = \mathbb{C}$ とする. ((2.3.6) のヒントを参照.)

2.3.9. 練習問題. 0 を中心とする単位円板を U とする. U の上で定義された一価関数 $f(x)$ に対して $x^\alpha f(x)$ のモノドロミー表現を求めること. ((2.3.6) のヒントを参照.)

2.3.10. 練習問題. ((2.3.9) の続き) もし $x^\alpha f(x)$ が代数関数なら α は有理数になる. (ヒント: (2.3.4) を用いよ.)

2.3.11. 練習問題. $H_+ = \{x + iy \mid y > 0\}$, $H_- = \{x + iy \mid y < 0\}$ とおく. $\varphi(z) = \sqrt{z}$ の分岐点は $z = 0$ のみだから, これは H_+ , H_- の上で一価の枝を持つ. 最初に H_+ 上の一価の枝を $\varphi(e^{i\theta}) = e^{i\theta/2}$ ($0 < \theta < \pi$) となるように定める.

(1) $\varphi(H_+)$ は何か? 図示せよ.

次に $(-\infty, 0)$ の部分をまたいで $\varphi(z)$ を H_+ から H_- に解析接続する.

(2) このとき $\varphi(H_-)$ は何か?

次に $(0, \infty)$ の部分をまたいで $\varphi(z)$ を H_- から H_+ に解析接続する.

(3) このとき $\varphi(H_+)$ は何か?

²証明は各自が考えて見るとよい.

3. 超幾何関数・超幾何微分方程式

3.1. 超幾何微分方程式

$$(HG) \quad x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y = 0$$

を考えよう。これについては Whittaker-Watson: A Course of Modern Analysis の第 14 章に詳しい。
 $y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ として (HG) の解を求めて見よう:

$$\begin{array}{lll} -\alpha\beta y = -\alpha\beta c_0 - \alpha\beta c_1x & -\alpha\beta c_2x^2 & -\alpha\beta c_3x^3 - \dots \\ \gamma y' = \gamma c_1 \cdot 1 + \gamma c_2 \cdot 2x & + \gamma c_3 \cdot 3x^2 & + \gamma c_4 \cdot 4x^3 + \dots \\ -(\alpha + \beta + 1)xy' = & -(\alpha + \beta + 1)c_1x - (\alpha + \beta + 1)c_2 \cdot 2x^2 - (\alpha + \beta + 1)c_3 \cdot 3x^3 + \dots \\ xy'' = & c_2 \cdot 2 \cdot 1x & + c_3 \cdot 3 \cdot 2x^2 + c_4 \cdot 4 \cdot 3x^3 + \dots \\ -x^2y'' = & -c_2 \cdot 2 \cdot 1x^2 & -c_3 \cdot 3 \cdot 2x^3 - \dots \end{array}$$

この合計が 0 になるように $c_0, c_1, \dots$ を定めたい。 c_n の満たすべき関係式は

$$-\alpha\beta c_n + \gamma c_{n+1}(n+1) - (\alpha + \beta + 1)c_n n + c_{n+1}(n+1)n - c_n n(n-1) = 0$$

すなわち

$$c_{n+1}(n+1)(\gamma + n) = c_n(\alpha + n)(\beta + n)$$

故に $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)$ と置くと

$$(1) \quad F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(\gamma)_n n!} x^n$$

は (HG) の (形式的な) 解になる。しかるにこの無限級数は $|x| < 1$ で収束するので $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ は領域 $|x| < 1$ の解を与える。 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を解析接続して得られる関数を超幾何関数という。

3.2. 注意. (3.1) の議論は $\gamma = 0, -1, -2, \dots$ のときには修正を要する。この種の困難を避けるため以下では常に

$$(1) \quad 1 - \gamma, -\alpha - \beta + \gamma, \alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$$

と仮定する。

3.3. 超幾何微分方程式は 2 階線型方程式であるから 2 つの一次独立な解があって、一般解はその一次結合になるはずである。従って (3.1) の (1) 以外にもう一つ解を見つける必要がある。また (1) は $\{|x| < 1\}$ でしか解を与えなかったが、この領域の外側でも解を具体的に与えたい。実は $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ を用いると、これらの解が以下のように簡単に書ける。

$$\left. \begin{array}{l} u_0(x) = (1-x)^{-\alpha} F(\alpha, \gamma - \beta, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{1-x}) \\ v_0(x) = (1-x)^{-\beta} F(\beta, \gamma - \alpha, -\alpha + \beta + 1; \frac{1}{1-x}) \end{array} \right\} \quad |x-1| > 1 \text{ の 2 つの独立解}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_1(x) = F(\alpha, \beta, \gamma; x) \\ v_1(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; x) \end{array} \right\} \quad |x| < 1 \text{ の 2 つの独立解}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_2(x) = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1; 1-x) \\ v_2(x) = (1-x)^{-\alpha-\beta+\gamma} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, -\alpha - \beta + \gamma + 1; 1-x) \end{array} \right\} \quad |x-1| < 1 \text{ の 2 つの独立解}$$

$$\left. \begin{array}{l} u_3(x) = x^{-\alpha} F(\alpha, \alpha - \gamma + 1, \alpha - \beta + 1; \frac{1}{x}) \\ v_3(x) = x^{-\beta} F(\beta, \beta - \gamma + 1, -\alpha + \beta + 1; \frac{1}{x}) \end{array} \right\} \quad |x| > 1 \text{ の 2 つの独立解}$$

このように置くと $\{u_0, v_0\}$ は $|x-1| > 1$ の 2 つの一次独立な解になり、ほかのペアについても、それぞれの領域での一次独立な解を与える。

3.4. 練習問題. v_1 と u_2 超幾何微分方程式 (HG) の解になることを確かめること。(他の場合についても同様に確かめられるが、計算がほんの少しややこしくなる.)

3.5. 注意. (1) たとえば $v_1(x)$ は $x=0$ で分岐する多価関数になるが、以下の議論では具体的に単連結領域が与えられ、その上に制限して考えるので多価性にまつわる困難は生じない。

(2) $u_i(x), v_i(x)$ ($i=0, 1, 2, 3$) により (HG) の一般解の様子は領域

$$\{|x| \neq 1\} \cup \{|x-1| \neq 1\} = \mathbb{C} \setminus \{e^{\pm \pi i/3}\}$$

の上ではわかった。特にこの領域に限れば分岐点は $\{0, 1\}$ のみであることがわかる。実は微分方程式の一般論 (たとえば微分方程式の中級数による解法) を用いると $\{e^{\pm \pi i/3}\}$ は分岐点ではないことがわかる。こうして (HG) の解は $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\} = \mathbb{P} \setminus \{0, 1, \infty\}$ では分岐しないことがわかった。(∞ は分岐点になる: 一般に「 $f(x)$ が $x=\infty$ で分岐する」とは「 $f(\frac{1}{x})$ が $x=0$ で分岐する」ことと定義する.)

3.6. 注意. (HG) のすべての解がいつ代数関数になるかを調べたいから

$$(1) \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$$

と仮定してよい。((2.3.10) より.) 故に

$$(2) \quad |x| < 1, x \in \mathbb{R} \Rightarrow F(\alpha, \beta, \gamma; x) \in \mathbb{R}$$

3.7. (3.4) で示したように (HG) の解は $\mathbb{P} \setminus \{0, 1, \infty\}$ では分岐しない。特に $H_+ = \{x+iy \mid y > 0\}$, $H_- = \{x+iy \mid y < 0\}$ と置くと $H_{\pm}$ は単連結領域で、その上で (HG) の解が分岐しない。従って (HG) の解 $u_k(z), v_k(z)$ ($k=0, 1, 2, 3$) は H_+ 上の一価関数に解析接続される。さらに全すべての k について $u_k(z)$ と $v_k(z)$ は一次独立である。一般にこのような H_+ 上の一次独立な解 $u(z), v(z)$ を考え

$$\varphi(z) = u(z)/v(z), \quad \varphi_k(z) = u_k(z)/v_k(z) \quad (k=0, 1, 2, 3)$$

と置く。このときすべての k につき $u(z)$ も $v(z)$ も $u_k(z)$ と $v_k(z)$ の一次結合として表わせる:

$$\begin{pmatrix} u(z) \\ v(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_k(z) \\ v_k(z) \end{pmatrix} \quad \exists T_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{C})$$

$$\therefore \varphi(z) = \frac{a_k \varphi_k(z) + b_k}{c_k \varphi_k(z) + d_k} = T_k(\varphi_k(z))$$

(一次分数変換については (1.2) を参照.)

この $\varphi(z)$ による $H_{\pm}$ の像を調べよう。

(A) $x \in \mathbb{R}, x < 0$ のとき:

$$1-x > 0 \quad \therefore (1-x)^{-\alpha}, (1-x)^{-\beta} \in \mathbb{R}$$

$$\therefore u_0(x), v_0(x) \in \mathbb{R}$$

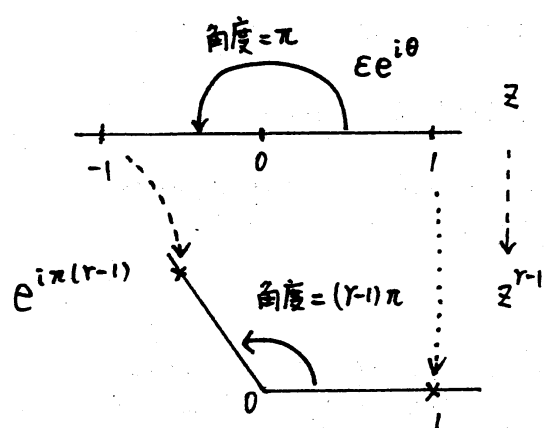
$$\therefore \varphi_0(x) \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \varphi((-\infty, 0)) = T_0(\varphi_0(-\infty, 0)) \subset T_0(\mathbb{R}) =: C_1 (= \text{円周})$$

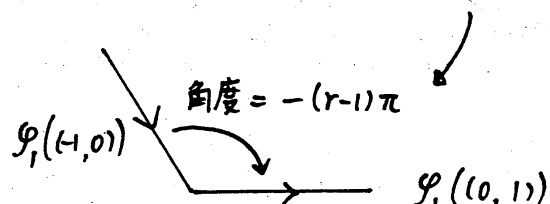
(B) $x \in \mathbb{R}, -1 < x < 1$ のとき

$$(1) \quad \varphi_1(z) = u_1(z)/v_1(z) = z^{\gamma-1} \left\{ \frac{F(\alpha, \beta, \gamma; z)}{F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma; z)} \right\}$$

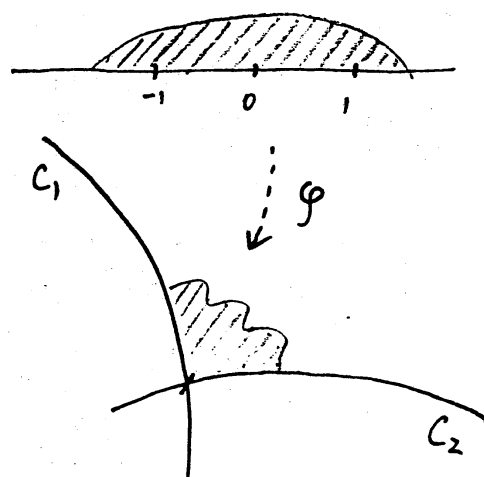
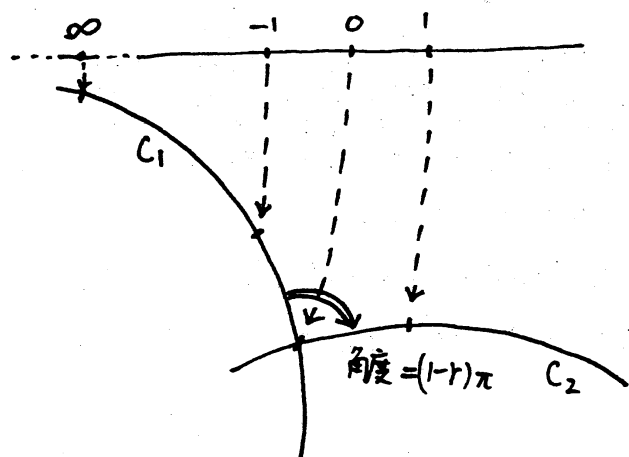
で $\{ \}$ の中は一価関数で $z \in \{x \in \mathbb{R}; |x| < 1\}$ ならば $\{ \} \in \mathbb{R}$ 。さらに z が 0 の近くにあれば $\{ \} \approx 1$ であるから $\{ \} > 0$ 。ここで $u_1(z), v_1(z), \varphi_1(z)$ は、いずれも $H_+ = \{x+iy \mid y > 0\}$ 上の関数であったこと、および $x > 0$ ならば $x^{\gamma-1} > 0$ と約束していたことを思い出そう。 $z^{\gamma-1}$ を H_+ 上の関数と思う。 z を $z = \varepsilon e^{i\theta}$ ($\theta: 0 \rightarrow \pi$) という道に沿って動かすと $z^{\gamma-1} = \varepsilon^{\gamma-1} e^{i\theta(\gamma-1)}$ は $\varepsilon^{\gamma-1}$ からスタートしてゴールでは $\varepsilon^{\gamma-1} e^{i\pi(\gamma-1)}$ という値になる。下図参照。また 0 から両側に出る 2 つの半直線 $\{x > 0\}$ と $\{x < 0\}$ の $z \mapsto z^{\gamma-1}$ による像は、ともに 0 から出る半直線になる。 $\{ \} \in \mathbb{R}, > 0$ であったから $\varphi_1((-1, 0))$ と $\varphi_1((0, 1))$ も半直線になり、その間の角度は $-(\gamma-1)\pi$ になる。



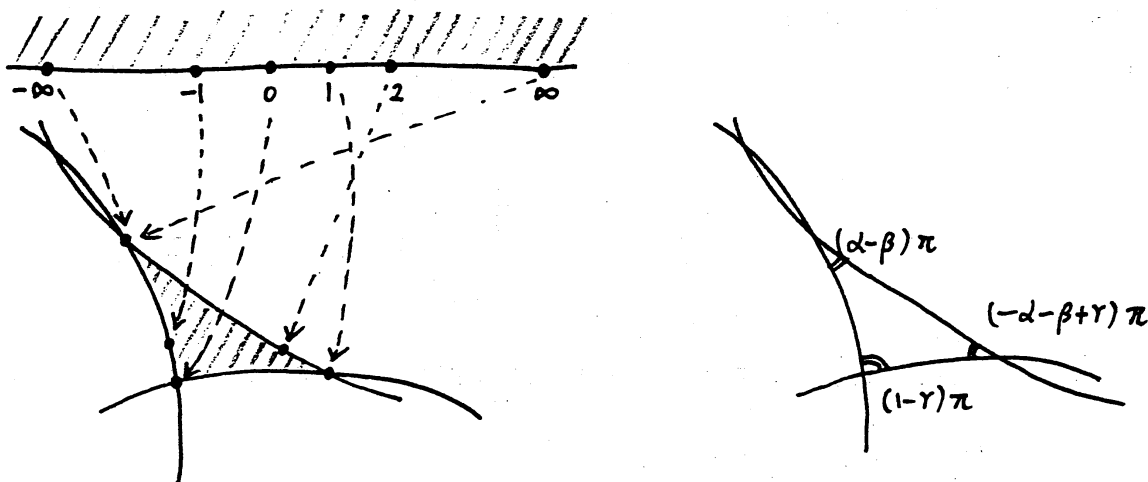
[逆向きに角度を測るので
マイナスをつける.]



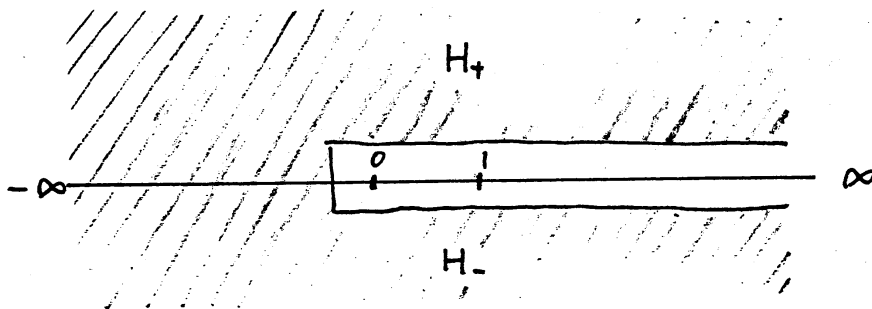
故に (1.2.9) と (1.2.12) より $\varphi((-1, 0)) = T_1(\varphi_1((-1, 0)))$ と $\varphi((0, 1)) = T_1(\varphi_1((0, 1)))$ はともに円弧になり、その間の角度は $-(r-1)\pi$ になる. しかるに $\varphi_1((-1, 0))$ は (A) で考察した $\varphi(-\infty, 0))$ の一部であるから、これは円周 C_1 の一部になる. 故に、次の図のようになる.



同様の議論を繰り返して行くと、下図のように φ が上半面 H_+ を C_1, C_2, C_3 で囲まれた三角形 X に写すことがわかる：



(D) $(-\infty, 0)$ の部分をまたいで $\varphi(z), \varphi_k(z) (k=0, 1, 2, 3)$ を H_+ から H_- に解析接続しよう。



このとき $\overline{\varphi_1(z)}$ は正則関数で

$$\overline{\varphi_1(z)} = \varphi_1(\bar{z}) \quad \forall z \in (-\infty, 0)$$

$$\therefore \overline{\varphi_1(z)} = \varphi_1(z)$$

$$\therefore T_1(\overline{\varphi_1(z)}) = T_1(\varphi_1(z)) = \varphi(z)$$

一方、最後の等式の左辺は s_{C_1} の定義より次に等しい：

$$s_{C_1}(T_1(\varphi_1(z))) = s_{C_1}(\varphi(z))$$

$z \in H_- \Leftrightarrow \bar{z} \in H_+$ に注意すると

$$\varphi(H_-) = s_{C_1}(\varphi(H_+)) = s_{C_1}(X)$$

(E) (D) の議論では $(-\infty, 0)$ の部分をまたいで解析接続したが $(0, 1)$ または $(1, \infty)$ をまたいで解析接続することも可能。このときには、それぞれ $\varphi(H_-) = s_{C_2}(X)$ または $\varphi(H_-) = s_{C_3}(X)$ となる。さらに H_- から H_+ へ逆向きに解析接続するときにも同様の現象が起こる。たとえば最初に (D) のように $(-\infty, 0)$ をまたいで φ を $H_+ \rightarrow H_-$ と解析接続し、次に $(0, 1)$ をまたいで $H_- \rightarrow H_+$ と解析接続すれば、最終的には

$$\varphi(H_+) = s_{C_2}s_{C_1}(X)$$

となる。(注意： φ は多価関数なので、どのように解析接続したかによって $\varphi(H_+)$ は変わり得る。)

$\varphi(H_+)$ の可能性は有限通りしかない. 従って $s_{C_{i_1}} \cdots s_{C_{i_k}} s_{C_{i_1}}(X)$ ($i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, 3\}$) として得られる三角形は有限個しか出てこないはず. 言い替えれば $\langle s_{C_1}, s_{C_2}, s_{C_3} \rangle$ は有限群である. このような三角形 C_1, C_2, C_3 は (1.6) 節で分類できていたから, 超幾何微分方程式 (HG) の解がすべて代数関数になる場合も完全に数え上げることができる.

3.8. 練習問題. 23 ページの図の三角形が 10 ページの表の I の三角形になっているときを考えよう. すなわち

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda = \alpha - \beta = \frac{1}{2} \\ \mu = 1 - \gamma = \frac{1}{2} \\ \nu = -\alpha - \beta + \gamma = \frac{k}{m} \end{array} \right\} \quad \text{すなわち} \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha = \frac{1-\nu}{2} \\ \beta = -\frac{\nu}{2} \\ \gamma = \frac{1}{2} \end{array} \right. \quad \text{ただし } \nu = \frac{k}{m}$$

とする. この時 20 ページで与えた (HG) の解 $u_1(x), v_1(x)$ の具体形は次のようになる.

$$u_1(x) = F\left(\frac{1-\nu}{2}, -\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; x\right) = \frac{1}{2}((1+\sqrt{x})^\nu + (1-\sqrt{x})^\nu)$$

$$v_1(x) = x^{\frac{1}{2}} F\left(1 - \frac{\nu}{2}, \frac{1-\nu}{2}, \frac{3}{2}; x\right) = \frac{1}{2\nu}((1+\sqrt{x})^\nu - (1-\sqrt{x})^\nu)$$

(ヒント: (3.1) の (1) 式と比較せよ. ν が自然数でなくても二項定理が成立することを思い出そう. 「高木貞治: 解析概論 (岩波), p.241」参照.)

3.9. 練習問題. ((3.8) の続き) D は $(1-\varepsilon)^2$ を含む小さな開円板とし, D の上での $(1+\sqrt{x})^\nu, (1-\sqrt{x})^\nu$ の枝を自然に定める. $\pi_1(C \setminus \{0, 1\})$ に属する道 γ, γ' を次のように定める.

$$\gamma = \{z = (1 - \varepsilon e^{i\theta})^2 \mid \theta : 0 \rightarrow 2\pi\},$$

$$\gamma' = \{z = (1 - \varepsilon)^2 e^{i\theta} \mid \theta : 0 \rightarrow 2\pi\}.$$

この時, 次のことを示せ.

$$\gamma((1+\sqrt{x})^\nu, (1-\sqrt{x})^\nu) = ((1+\sqrt{x})^\nu, (1-\sqrt{x})^\nu) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i \nu} \end{pmatrix}$$

$$\gamma'((1+\sqrt{x})^\nu, (1-\sqrt{x})^\nu) = ((1+\sqrt{x})^\nu, (1-\sqrt{x})^\nu) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

これを用いて (3.8) で考えた超幾何関数のモノドロミー群を決定せよ.

3.10. 注意. (3.7) の議論では $\varphi(z)$ が代数関数であることしか用いていないように見えるが, 実は

$$\varphi \text{ は代数関数} \Leftrightarrow u, v \text{ は代数関数} \Leftrightarrow (\text{HG}) \text{ の解はすべて代数関数}$$

が言える.

証明: φ は代数関数であると仮定して u, v は代数関数であることを示そう. $\varphi = u/v$ を微分して

$$\varphi' = (u'v - uv')/v^2 = - \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} v^{-2}$$

ここで分子は Wronskian であるから微分方程式論でよく知られている方法を用いて計算すると

$$\begin{vmatrix} u(x) & v(x) \\ u'(x) & v'(x) \end{vmatrix} = (\text{定数}) \times \exp\left(-\int \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x(1-x)} dx\right) = (\text{定数}) \times x^{-\gamma} (x-1)^{\gamma - (\alpha + \beta + 1)}$$

(たとえば「笠原: 微分方程式の基礎 (朝倉書店), pp.56-57」を参照.) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$ と仮定していたから, Wronskian は代数関数. φ' も代数関数であるから v も代数関数. 故に u も代数関数. (証明終)

3.11. 注意. (3.7) の議論では

(A) 「超幾何微分方程式 (HG) のすべての解が代数関数。」

を前提として、それから

(B) 「 $\langle s_{C_1}, s_{C_2}, s_{C_3} \rangle$ は有限群。」

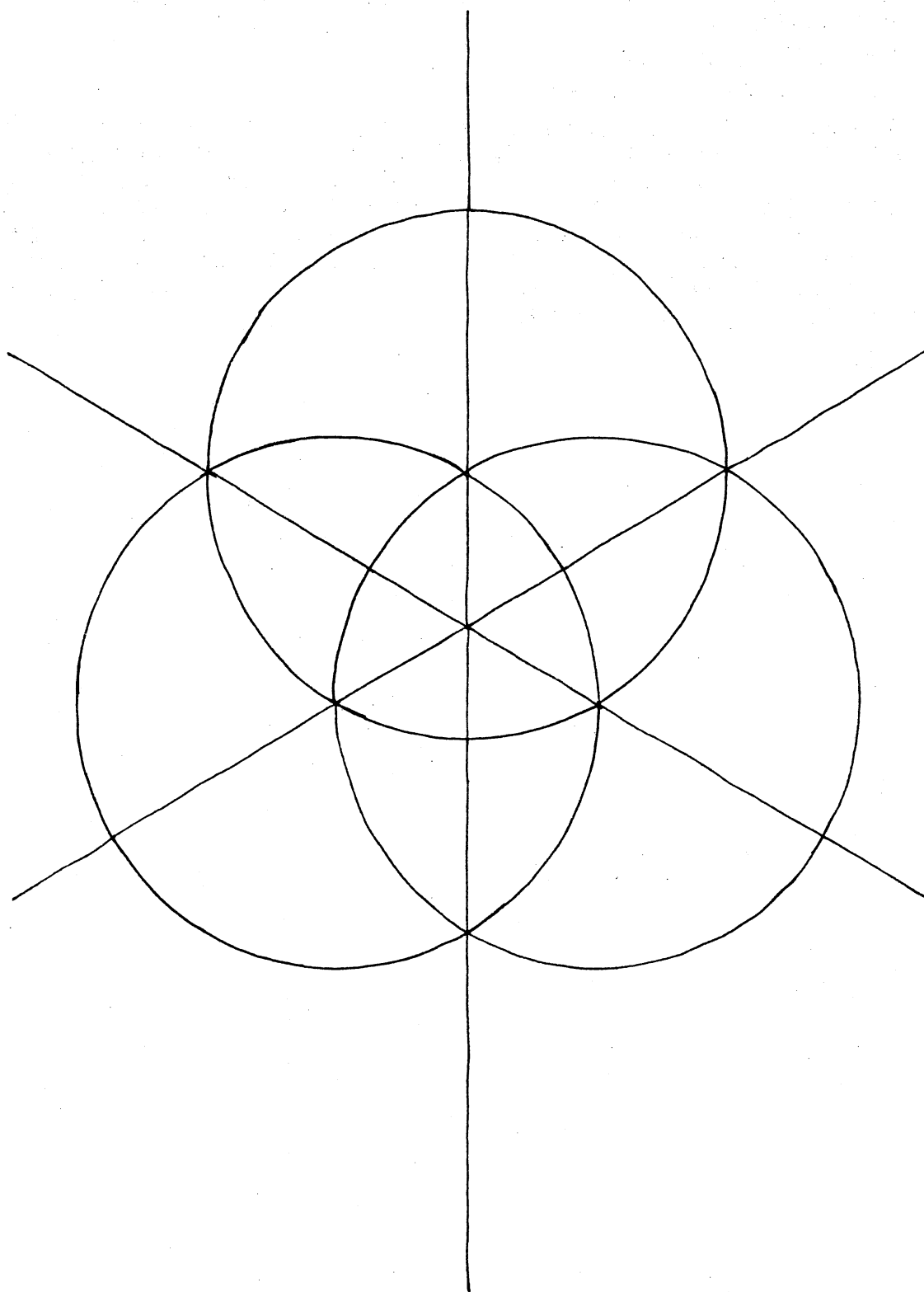
を示した。実は、逆も次のようにして証明できる：超幾何微分方程式 (HG) は確定特異点しか持たないから $u(x), v(x)$ は各点 x_0 で

$$(C) (x - x_0)^\rho \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n$$

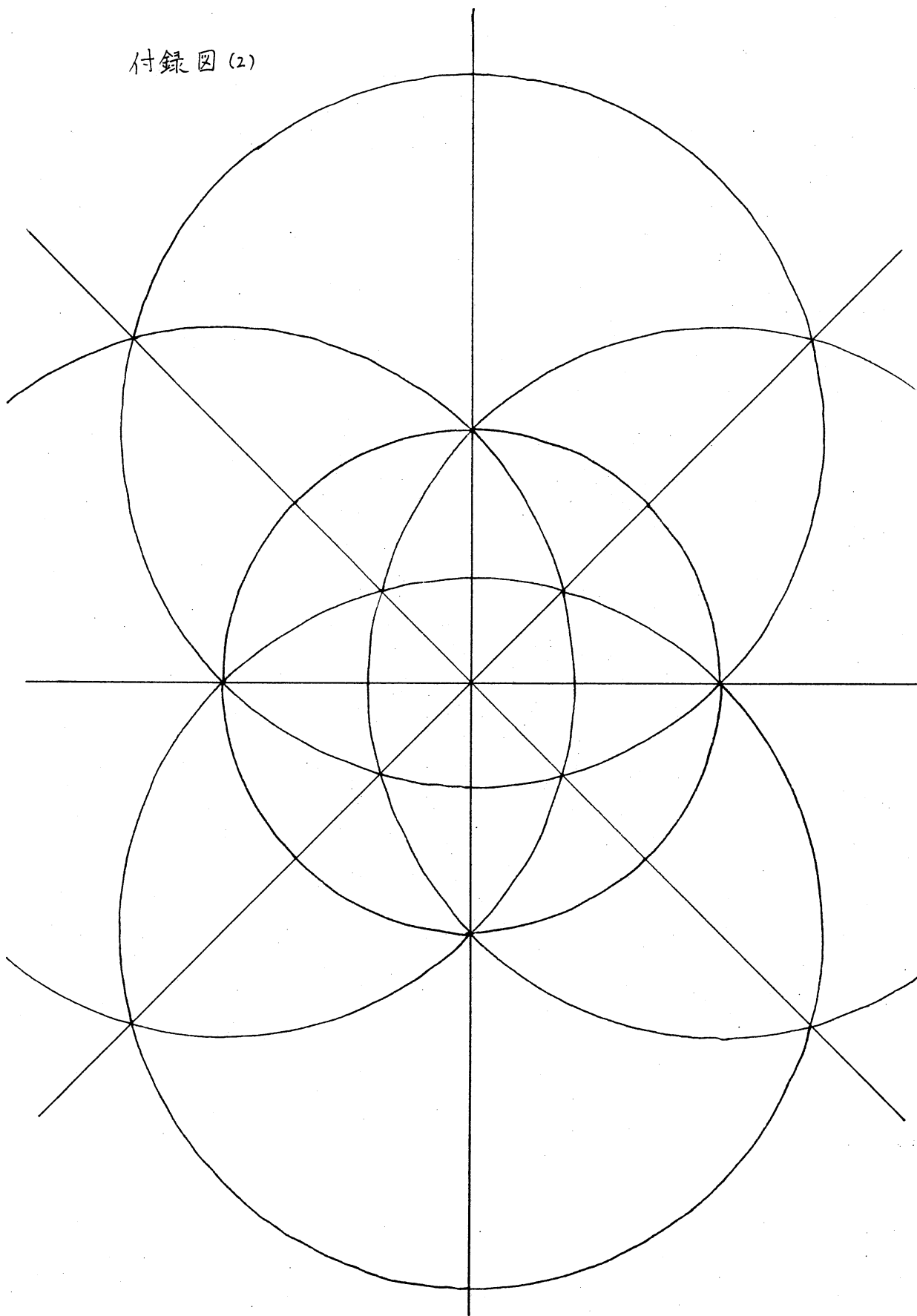
$$(x_0 = \infty \text{ のときは } x^{-\rho} \sum_{n \geq 0} a_n x^{-n})$$

という形の展開ができる。（「笠原：微分方程式の基礎（朝倉書店）、§19」を参照。ここでは (3.2) の仮定を用いている。(3.2) の仮定を成立しない場合には $\log$ が出てくるので考察しなくても良いことがわかる。) $\varphi = u/v$ であったから $\varphi(x)$ についても同様の展開ができる。分岐点を含まない単連結領域 D の上での $\varphi(x)$ の一価の分岐の全体を $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ とする。（(B) より分岐は有限個しかない。） $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ の基本対称式は一価関数で、しかも $\mathbb{P} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の各点で (C) という形の展開ができるので $\mathbb{P}$ 上有理型関数になる。このような関数は有理式になることが知られている。（たとえば「吉田洋一：函数論、第2版（岩波）、pp.128–129」参照。）故に $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ は有理式を係数にする代数方程式を満たす。すなわち $\varphi_j(x)$ は代数関数である。

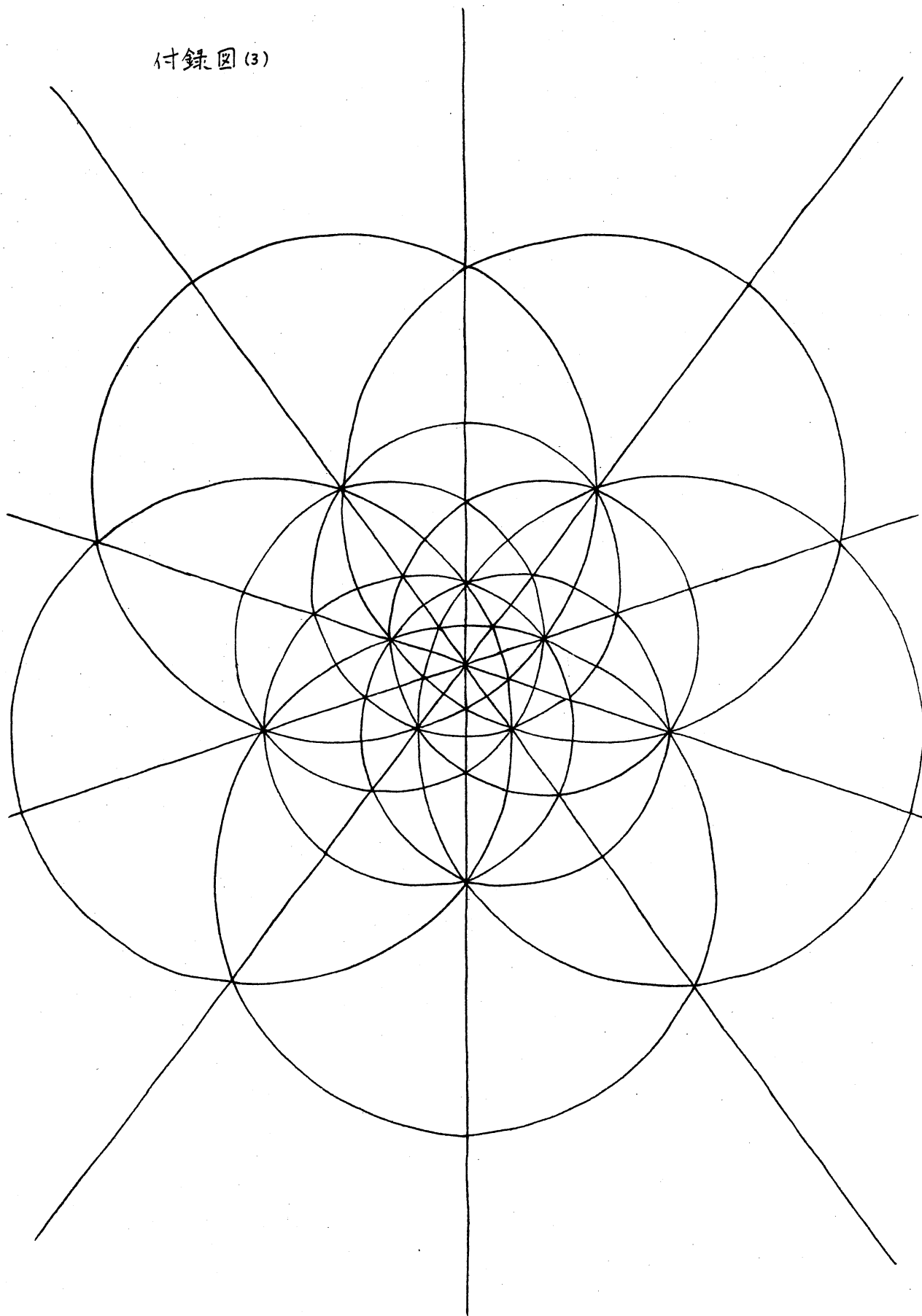
付録図 (1)



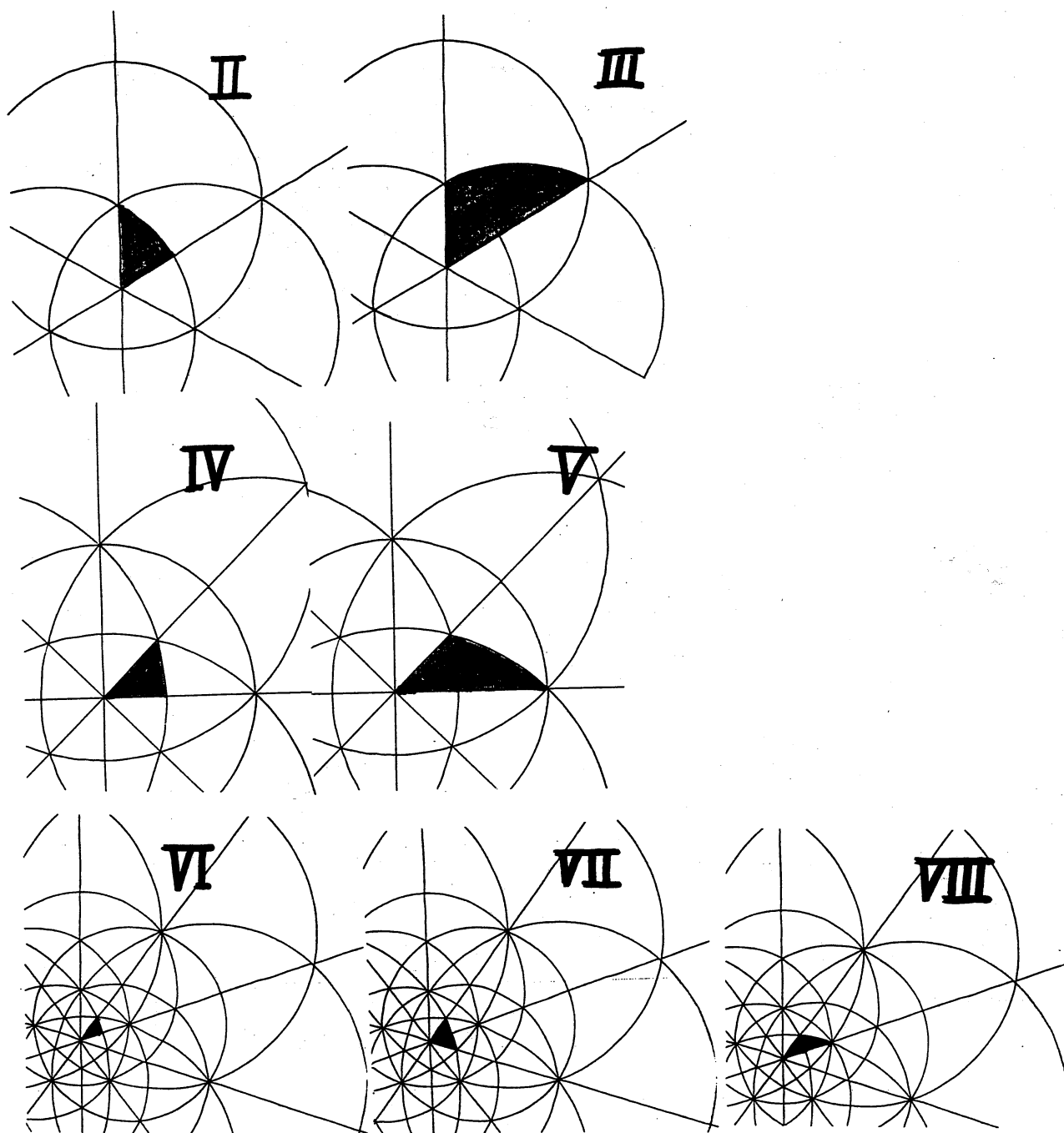
付録図(2)



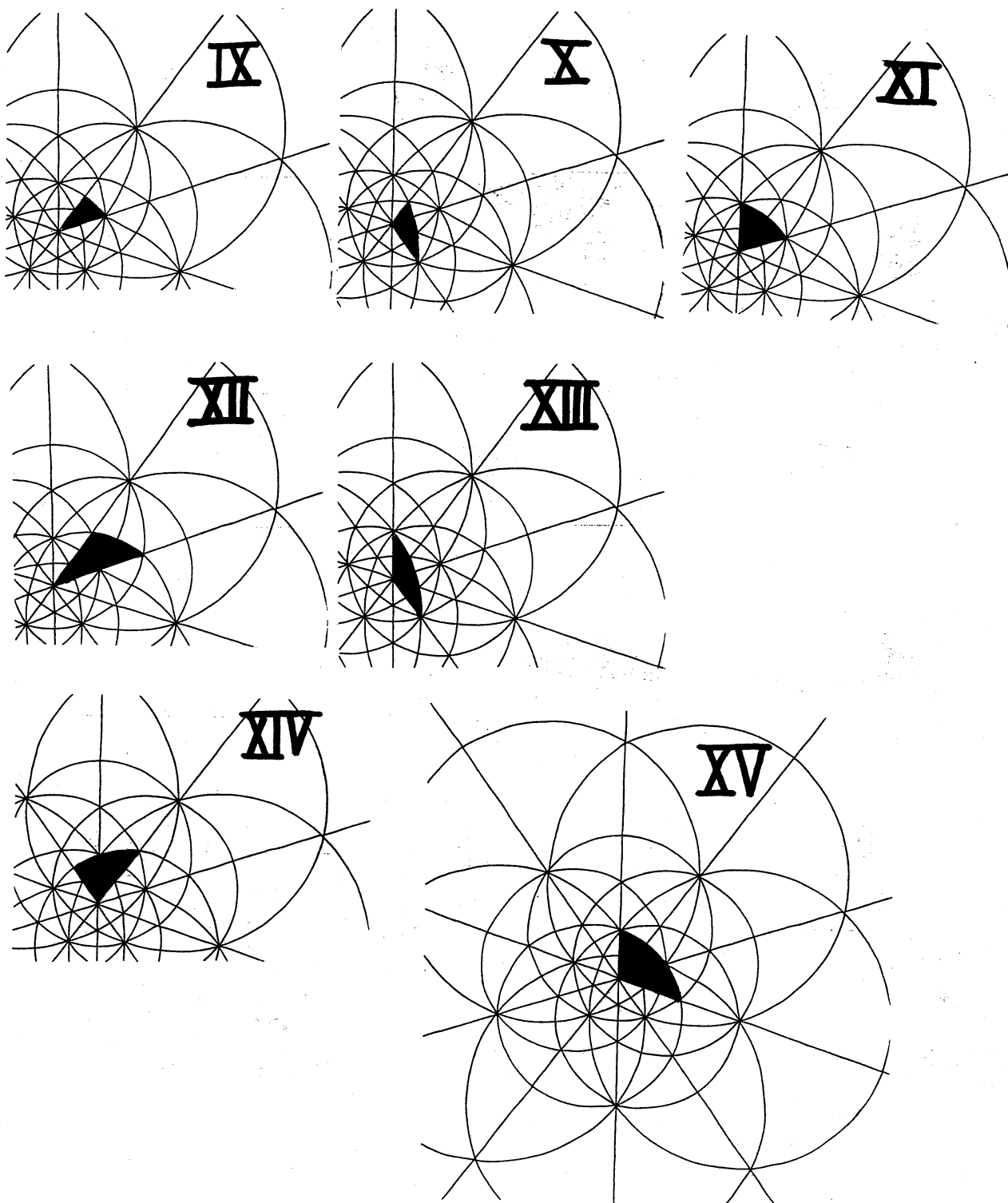
付録図(3)



付録図(4)

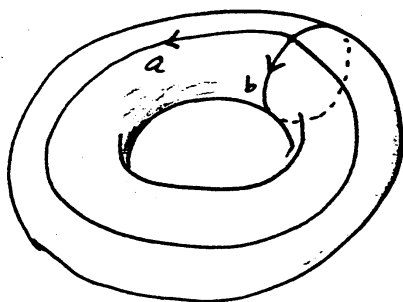


付録図 (4)

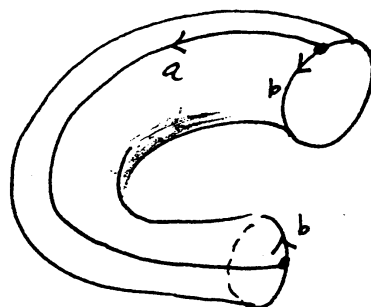


付録図 (5)

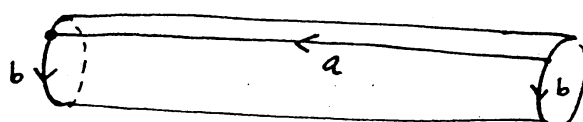
(1)



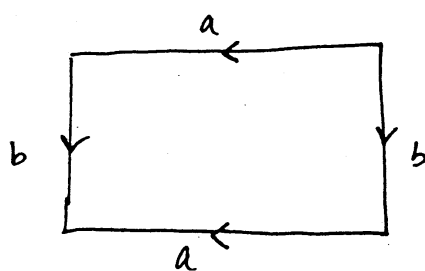
(2)



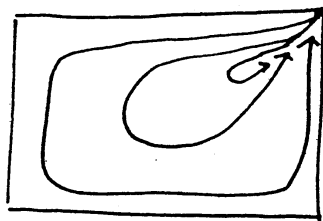
(3)



(4)



(5)



b に沿って
切り開く

a に沿って
切り開く

道 $ab a^{-1} b^{-1}$ を
長方形の内部に
縮める