

氏 名	たけ やま よし ひろ 竹 山 美 宏
学位(専攻分野)	博 士 (理 学)
学 位 記 番 号	理 博 第 2421 号
学位授与の日付	平 成 14 年 3 月 25 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 4 条 第 1 項 該 当
研 究 科 ・ 専 攻	理 学 研 究 科 数 学 ・ 数 理 解 析 専 攻
学 位 論 文 題 目	Form factors of $SU(N)$ invariant Thirring model. ($SU(N)$ Thirring 模型の形状因子。)

論文調査委員	(主 査) 教 授 柏 原 正 樹	教 授 齋 藤 恭 司	教 授 三 輪 哲 二
--------	----------------------	-------------	-------------

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は、2次元量子的場の理論の重要な模型の一つである $su(n)$ 不変 Thirring 模型のエネルギー・モメンタムテンソルの形状因子の積分表示を、変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解の積分表示を用いて構成し、形状因子の満たすべき局所性に対応する再帰的關係式に対する証明を与えたものである。

非自明な相互作用を持つ量子的場の理論において、局所場の Green 函数や形状因子を明示的に求める問題は、現代の数理解物理の根本問題のひとつである。この問題に対する解答は時空 2 次元においては、前世紀後半に重要な進展があった。第一に Ising 模型の連続極限の理論が完全に解明され、Green 函数が非線型ホロノミック系の解であることが示された。この場合の形状因子は簡単な三角函数で表示できる。第二に、質量 0 の理論は、共形場の理論として無限次元代数の表現論による構成と、超幾何函数の一般化を用いての Green 函数の表示が得られた。有質量の場合は Ising 模型とそれに関連するいくつかの模型の場合を除くと、Green 函数の表示は得られていない。しかしながら、格子模型からの連続極限、共形場の理論の有質量変形のどちらから考えても可解な理論の存在は明らかである。Smirnov はこの意味での可解な場の理論の最も基本的な場合である sine Gordon 模型についてその形状因子の満たすべき関係式を考え、それを満たす積分表示を構成した。この仕事は、一般化された超幾何函数の満たす微分方程式の差分的一般化である変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の理論や、共形場の理論における primary 場の格子模型における対応物としての q 変形頂点作用素の理論を生み出す決定的な足場を与えた。しかしながら、こうした数学理論が Lie 環論的一般化を達成した後も、形状因子の理論そのものは、対応して進展したわけではない。sine Gordon 模型と同値な $su(2)$ 不変 Thirring 模型の階数を上げた $su(n)$ の場合ですら、そのエネルギー・モメンタムテンソルの形状因子の積分表示は、Smirnov によって局所性条件の証明を省いた形で提出されていただけであった。

以上の状況において、本論文は Smirnov の積分表示が、変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の特殊解として得られること、局所性条件が被積分函数に対する再帰的關係式として書き直すことによって証明できることを示した。

変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の一般解の表示式については、Lie 環が $su(2)$ の場合は多くの研究があり、なおかつその特殊解が Smirnov の形状因子の積分表示とどのように結び付くかはわかっていた。この問題は、形状因子では変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式のパラメタであるレベルが 0 という特殊値を考えねばならないことと、一般解の積分変数の次元が Smirnov 表示の特殊解での積分変数の次元より大きいということの 2 点が技術的な困難であった。 $su(n)$ においてはこの困難が飛躍的に増大するため、直接的な一般化は成功していない。本論文においては、中屋敷が(変形なしの) Knizhnik-Zamolodchikov 方程式において用いた方法、すなわち積分表示の一部を $su(n-1)$ のレベル 1 の解で置き換えるという手法を適用して、レベル 0 の難しさを、より容易なレベル 1 に置き換え、同時に余分な積分変数のほとんどを、 $su(n-1)$ の特殊解の表示の中に解消するというで解決している。Smirnov の表示ではさらに 1 回積分を実行する必要があるが、この技術的問題も本論文で解決された。残る重要な問題は、こうして得られた変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方

式の特解のなかに、局所性条件を満たす函数の無限族を見つけることである。変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の積分表示は、変形なしの場合の積分のサイクルに相当するものは対称多項式となる。したがって、局所性条件は無限族の函数のひとつひとつに対応する対称多項式に対する再帰的關係式となる。問題はこの關係式を満たす対称多項式の無限族を構成することになる。本論文ではこの問題についての一般的な解は得られていないが、Smirnov の与えた表示式、すなわちエネルギー・モメンタムテンソルの場合については、上に述べた1回積分を実行する前の表示を用いて必要となる再帰的關係式の証明を与えた。

論文審査の結果の要旨

2次元量子的場の理論は、可積分系の理論の中心的な問題である。特に本論文の主題である形状因子の理論は、Smirnov が sine Gordon 模型において行った研究がこれまでの最良の結果であり、変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式や q 変形頂点作用素などの、多変数特殊函数論、表現論の新しい発展の導火線となった。しかしながら、そうした数学的進展をもつてしても本来の問題である形状因子の理論は、一気に簡易化されたわけではない。数学的な一般理論が形状因子に直接適用することが困難な理由は、形状因子においては表現のレベルが0の場合が問題になるなど、一般理論におけるパラメタの特解が問題になるためである。中屋敷、Pakuliak, Tarasov は $su(2)$ 変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の一般解の積分表示から出発して Smirnov の形状因子を導き、一般理論とのつながりを明らかにした。申請者は、これまでの研究において、量子的場の理論の模型である $su(n)$ 不変 Thirring 模型への応用を目指して、 $su(n)_q$ 変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解の構成を行なった。基本粒子に対応するベクトル表現のテンソル積の場合の解が必要となる。この場合、表現のレベルが一般の場合は、一般解の表示を得ていた。しかしながら、形状因子の積分表示を一般解のなかに求めようとする、上に述べた困難により直ちに結果を得ることはできない。申請者は本論文において、この困難を乗り越えるために、中屋敷によって示唆された $su(n-1)$ のレベル1の解から $su(n)$ のレベル0の解を構成するという方法を用いた。レベル1で変形パラメタ q が $|q| < 1$ を満たす場合は、表現論的に構成する方法が確立されており、申請者はその結果を形状因子に必要な $q \rightarrow 1$ の極限に置き換えることにより特殊解の族を構成した。この方法は、一般の積分表示に比べて積分変数の数が少ないという利点はあるが、一般解の構成は犠牲になっている。したがって、形状因子がこの解の族の中で求められるかどうかは自明ではない。申請者は、Smirnov が与えたエネルギー・モメンタムテンソルの形状因子が、上記の方法で得られた特殊解のなかに得られることを示し、そのことを用いて Smirnov が証明を与えていなかった局所性条件を証明することに成功した。この結果は、 $su(n)$ 不変 Thirring 模型の局所場の形状因子をすべて求めるという最終目標には到達していないが、最も基本的な場合の完全な結果を与えているという点で高く評価される。局所性条件の証明は q 変形 Knizhnik-Zamolodchikov 方程式の解を構成するだけの問題に比べると、変形された意味の積分のサイクルにあたる対称多項式の、変数の数の異なるものの間の関係をつけねばならないという点で、技術的な困難は大きい。表現論的に q 変形された頂点作用素の積のトレースを用いるという別の方法があるが、そこで得られた表示式と Smirnov の表示との関係は解っていない。したがって、申請者の方法で、Smirnov の表示が得られ、かつ局所性条件が証明できたことは重要な進展である。

以上のように、本申請論文は学位論文として十分な研究であると認められる。なお、申請論文に報告されている研究業績を中心に関連分野について試問した結果、合格と認めた。