

Kac-Moody 型 Lie 環の root 系の特徴づけ

東大 理 岩堀 長慶

上智大 理工 横沼 健雄

一般の Cartan 行列に対応する Kac-Moody 型 Lie 環の root 系を, Lie 環からはなれて, ベクトル空間のある条件をみたす部分集合として記述する問題は, Kac あるいは森田純氏によって取扱われ, 森田氏によって公理が5月のシンポジウムで報告されたが([7]), これは base を用いるものであった. 古典的な場合([1])のような base からはなれた形で公理を与えたいというのが問題の発端である.

ここでは実 root, すなわち base の Weyl 群による orbit に属する元, の集合を Tits cone を用いる幾何学的条件で特徴づけようとするものである.

なお Kac による base-free な root 系の公理が[2]に与えられている.

以下はじめに Lusztig に従って Tits cone について述べる. 次いで §2 において主定理及びその応用, §3 において関連

する事実として Cartan 行列の階数について述べ、最後に主定理の証明の要点を記す。詳細は [5] を参照されたい。

§ 1. Tits cone

主定理の解説のため、Looijenga [3] による generalized root system の理論に従って、Tits cone の定義・性質を述べる。この理論は 5 月に徳山氏によって紹介されたものである ([8])。Looijenga は Tits による Coxeter 群の geometric representation に関連した事実が、一般の Cartan 行列の Weyl 群の自然な表現の場合に成立することから、Tits cone の root 系への応用を示した。

定義. 正方行列 $A = (A_{ij})$ が Cartan 行列 とは、

- 1) $A_{ij} \in \mathbb{Z}$.
- 2) $i \neq j$ ならば $A_{ij} \leq 0$, $A_{ii} = 2$.
- 3) $i \neq j$ に対して, $A_{ij} = 0 \iff A_{ji} = 0$.

と次 Cartan 行列 A が与えられたとき、

$$\begin{cases} V_0 = \text{symbols } \alpha_1, \dots, \alpha_\ell \text{ を basis とする実ベクトル空間} \\ H_0 = \text{symbols } \alpha_1^\vee, \dots, \alpha_\ell^\vee \text{ を basis とする実ベクトル空間} \end{cases}$$

とする。bilinear map

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V_0 \times H_0 \longrightarrow \mathbb{R}$$

を, $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle = A_{ji}$ によって定義する。 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ は一般には

degenerate だが, $V_0, H_0, \langle \cdot, \cdot \rangle$ の適当な拡大 $V, H, \langle \cdot, \cdot \rangle$ とし
 $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times H \rightarrow \mathbb{R}$ は non-degenerate にすることが出来る.
 以下そのような拡大を一つ固定する.

$\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ とし, $\Pi \ni \alpha_i$ に対して V の symmetry

$$r_i: V \longrightarrow V - \langle v, \alpha_i \rangle \alpha_i$$

ととり, Weyl 群 $W = \langle r_1, \dots, r_l \rangle \subset GL(V)$ とおき, W による
 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ の orbit Δ を考え, その元を (実) root とよぶ. r_i は
 transpose によって H に作用する.

$C = \{x \in H \mid \langle \alpha_i, x \rangle > 0, i=1, \dots, l\}$ は open convex cone と

$$\Lambda = \left(\bigcup_{w \in W} w \bar{C} \right) \text{ の内点}$$

とおくと, Λ も open convex cone となり, $\Lambda \in \underline{\text{Tito cone}}$ とよぶ.
 このとき,

$$A \text{ が有限型} \iff \Lambda = H$$

$$A \text{ が Euclid 型} \Rightarrow \Lambda \text{ は半空間}$$

が示されている。(有限型, Euclid 型については [4] 参照)

なお, Vinberg の linear Coxeter group の理論 ([10]) も Tito の
 理論の一般化であるが, Vinberg の Cartan 行列の定義は, 更に
 一般的で整数条件が考慮されていない. これについては, 5
 月のシンポジウムの, 植野・山口・村上 氏の紹介 ([9]) がある.

§2. 主定理とその応用

Tits cone Λ の性質をもって root 系の公理とする, というのが Moody 氏のアイディアである. あらためて状況を述べる.

V, H : 有限次元実ベクトル空間
 $\langle \cdot, \cdot \rangle: V \times H \rightarrow \mathbb{R}$ non-degenerate bilinear form

} とする.

$V - \{0\} \supseteq \Delta$ を, 空でない部分集合とし, 次の条件 (I)(II)(III) を考える.

(I) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対して, α に関する symmetry r_α が存在して $r_\alpha(\Delta) \subseteq \Delta$, すなわち次の条件をみたす $\alpha^\vee \in H$ が存在する.

$$\begin{cases} \langle \alpha, \alpha^\vee \rangle = 2, \\ r_\alpha: v \mapsto v - \langle v, \alpha^\vee \rangle \alpha \end{cases} \text{ は } \Delta \text{ をたもつ.}$$

(II) 任意の $\alpha, \beta \in \Delta$ に対して, $\langle \alpha, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$.

$\alpha \in \Delta$ に対して, $H_\alpha = \{x \in H \mid \langle \alpha, x \rangle = 0\}$ とおく. Bourbaki

[1] 第 5 章にならって, 超平面の族 $H_\alpha (\alpha \in \Delta)$ によって, H 上に次のような同値関係 $\sim$ を定義し, その同値類を facette とよぶ.

$$x \sim y \Leftrightarrow \begin{cases} \text{任意の } \alpha \in \Delta \text{ に対して, } x, y \text{ は } H_\alpha \text{ 上} \\ \text{にあるか, } H_\alpha \text{ の同じ側にある.} \end{cases}$$

$W = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Delta \rangle \subset GL(V)$ とおく. W は transpose によって, H 上に作用する.

(III) H 上に W -invariant な open convex cone Λ であって facette の union であり, かつ次の a) も) をみたすものが存在する.

- α) 任意の $x, y \in \Lambda$ に対して, 閉線分 $[x, y]$ は有限個の facette でおおわれる.
- β) 任意の $\alpha \in \Delta$ に対し, W における H_α の pointwise stabilizer は有限群.

実は, 残りの仮定のもとで, (III) α) β) は次と同値であることが証明される。

- α') W は Λ 上に properly discontinuous に作用する.

また (III) β) を用いて, H_α を 1-固有空間とする W 中の involution は, Λ に限ることが示される。

定理を述べるためにいくつかのことは用意する。以下 Δ は (I)(II)(III) をみたすものとする。整数条件 (II) より,
 $R\alpha \cap \Delta \subset \left\{ \pm \frac{1}{2}\alpha, \pm\alpha, \pm 2\alpha \right\}$ がわかる。

$$\Delta_{\text{red}} = \left\{ \alpha \in \Delta \mid \frac{\alpha}{2} \notin \Delta \right\}$$

とおく。 Δ_{red} は同じ cone Λ によって条件 (I)(II)(III) をみたす。

定義. 超平面の族 H_α ($\alpha \in \Delta$) が与えられたとき, 内点をもつ facette を chamber, 唯一つの超平面に含まれる facette を face, また face F が chamber C の face であるとは, $F \cap \bar{C}$ が唯一つの超平面に含まれることをいい, そのような超平面を C の wall とよぶ。

前述 Bourbaki [1] においては, locally finite な超平面の族の場合に facette 等について述べられているが, ここでの状況

にあわせるためには、少し変えなければならない。

定理. $V, H, \langle \cdot, \cdot \rangle, \Delta$ を上述のようにとり、 Δ は条件(I)(II)(III)をみたすものとする。このとき、

1) Λ に含まれる chamber が存在し、 W はそれらの集合上に simply transitive に作用する。 C を Λ に含まれる chamber の一つとし、次のように Δ_{red}^+ , Π を定める。

$$\Delta_{red}^+ = \{ \alpha \in \Delta_{red} \mid \alpha \text{ は } C \text{ 上正} \}$$

$$\Pi = \{ \alpha \in \Delta_{red}^+ \mid H_\alpha \text{ は } C \text{ の wall} \}$$

2) Π は可算集合である。 $\alpha, \beta \in \Pi$ に対し、 $A_{\alpha\beta} = \langle \beta, \alpha \rangle$ とおくと、行列 $(A_{\alpha\beta})$ は Cartan 行列の条件をみたす。

3) Π が有限集合とする。このとき Cartan 行列 $A = (A_{\alpha\beta})$ により base $\Pi' = \{ \alpha' \mid \alpha \in \Pi \}$ から定義される root 系を Δ' , その Weyl 群を W' とすると、 $W \cong W'$ かつ全ての $\alpha \in \Pi$ に対して、 $\pi(\alpha') = \alpha$ となる (W', W) -equivariant な bijection $\pi: \Delta' \rightarrow \Delta_{red}$ が存在する。

定理より得られる結果として、

1) " $\Lambda = H \iff \Delta$: 有限" が容易にみちびかれる。

実際 $\Lambda = H$ ならば、 $0 \in \Lambda$ であり、 0 の stabilizer W は有限群。逆に Δ が有限ならば、 Δ はある有限 root 系 Δ' の image である。 C を Λ の chamber とすると、 W の長さ最大の元 w_0 は $C \rightarrow -C$

にうつし、従って $C, -C \subset \Delta$ より $\Delta = H$.

2) Loosjengaの結果の逆として、 Δ が開半空間、かつ Π が有限集合、 $A = (A_{\alpha\beta})$ が indecomposable ならば、 A は Euclid型であることがわかる。

3) α, β を線型独立な Δ の元とすると、 Δ の plane cut $\Sigma = (R\alpha + R\beta) \cap \Delta$ は、rank 2の root 系である。

$H' = H / (H_\alpha \cap H_\beta)$ とおき、canonical map $H \rightarrow H'$ による Δ の image Δ' を用いて、 Σ が(I)(II)(III)をみたすことを検証する。

§3. Cartan行列の階数

定理において、 Π の有限性についての結果は残念ながら得られていない。一つの材料として次の結果がある。

命題. 1) A を l 次の Cartan 行列、その row rank $= n < l$ とすると、 $V, H, \langle \cdot, \cdot \rangle: V \times H \rightarrow \mathbb{R}$ 及び(I)(II)(III)をみたし A を定める Δ であって、かつ $\dim V = \dim H = n+1$ となるものが存在する。

2) A を l 次の Cartan 行列とすると、

$$\text{row rank の最小値} = \begin{cases} 1 & l=1, 2 \\ 2 & l=3, 4 \\ 3 & l \geq 5 \end{cases}$$

最近の Moody氏からの手紙によれば、G. Maxwell (Univ. B. C.)

が row rank = 4 の無限次 symmetrizable Cartan 行列の構成法を与えたとのことである。これは Maxwell による level 2 の双曲型 Cartan 行列 (任意の i 行と対応する i 列を除くと連結成分が Euclid 型又は有限型になる Cartan 行列) の性質を用いるものである。

§4. 主定理の証明について

1) 条件(III)a)より, Λ 内で超平面の族 $\{H_\alpha \mid \alpha \in \Delta_{\text{red}}\}$ は, locally finite であることがわかる。 Λ 内の閉線分 I の facette への分解は, 有限個の点をとって開区間に分けるという形になる。

そして任意の $x \in \Lambda$ に対して, x を内点とする独立な n 個の線分をとり, その convex hull の内部で考えることにより, x を中心とする Λ 内の open ball B であって, B と交わる超平面は x を通るようなもの, とすることが出来る。さらに x を内点とする simplex Σ とすると, x を通る超平面は simplex の辺との交点で止まるから有限個, これより

1) 超平面の数は可算無限。

2) Λ 内に chamber が存在。

従って, chamber C は,

$$C = \{x \in H \mid \langle \alpha, x \rangle > 0 \text{ for } \forall \alpha \in \Delta_{\text{red}}^+(C)\}$$

となる, ただし $\Delta_{\text{red}}^+(C)$ は, C 上正な Δ_{red} の元全体の集合。

2) chamber に wall が存在することと示すためにも次の補題は有用である.

補題. $C \in \Lambda$ の chamber とし, $x \in C$, $y \in \Lambda - \bar{C}$ とする. y を中心とし, $\Lambda - \bar{C}$ に含まれるある open ball B とする. $R(x, \theta)$ を, x から $\theta \in B$ への半直線とする. $R = \bigcup_{\theta \in B} R(x, \theta)$ は, C のすくなくとも一つの face を, その face の開集合で切断する.

系. C は face をもつ.

3) $C \in \Lambda$ の chamber, $F = F_\alpha \subset H_\alpha \in C$ の face ($\alpha \in \Delta_{\text{red}}^+(C)$) とすると, $F_\alpha \subset \Lambda$ かつ $F_\alpha = \{x \in H \mid \langle \beta, x \rangle > 0 \text{ for } \beta \in \Delta_{\text{red}}^+(C) - \{\alpha\}, \langle \alpha, x \rangle = 0\}$. さらに $F_\alpha \in \text{face}$ とする chamber は, C と $r_\alpha C$ のみであることがわかる.

4) $W_C = \langle r_\alpha \mid \alpha \in \Pi \rangle$ は, Λ の chamber の集合上に transitive である. これより $\Delta = W_C \Pi$, $W = W_C$ と得る.

5) (Coxeter 群の性質) $S = \{r_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$ とおくと, (W, S) は Coxeter system, かつ W は Λ の chamber の集合上に simply transitive である. これは, $\alpha \in \Pi$ に対して,

$$P_\alpha = \{w \in W \mid wC \text{ と } C \text{ は } H_\alpha \text{ の同じ側にある}\}$$

と定義し, 分割律をためすことにより示される.

残りの部分の証明は, 自然な流れを追えばよい.

参考文献

- [1] N. Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, Chap. IV, V, VI Hermann, Paris, 1968.
- [2] V. G. Kac, Some remarks on representations and infinite root system, Representation II, 311-327, Lecture Notes in Math. 832, Springer, 1980.
- [3] E. Looijenga, Invariant theory for generalized root systems, Inv. Math., 61(1980), 1-32.
- [4] R. V. Moody, Root systems of hyperbolic type, Adv. Math., 33(1979), 144-160
- [5] R. V. Moody and T. Yokonuma, Root systems and Cartan matrices, preprint.
- [6] J. Morita, Roots of Kac-Moody Lie algebras, preprint
- [7] 森田純, Kac の graph 表現論の紹介 I, 数理研講究録 394(1980), 22-33.
- [8] 徳山豪, Invariant theory for generalized root systems, 数理研講究録 394(1980), 99-116.
- [9] 植野義明・山口浩・村上順, Lobachevsky 空間の discrete group について, 数理研講究録 394(1980), 117-149.
- [10] E. B. Vinberg, Discrete groups generated by reflections, Izv. Akad. Nauk SSSR 35(1971) = Math. USSR Izvestiya 5(1971)1083-1119.