

## 代数解析と Hodge 構造

東大 理 斎藤盛彦

孤立特異点を持つ超曲面  $\{f=0\}$  に対し, Milnor fibration

$$f: X = B_\varepsilon \cap f^{-1}(s) \longrightarrow \mathbb{S}^1$$

は one-parameter family  $\{X_t = f^{-1}(t)\}$  の degenerate する様子を topological に表わすものである (vanishing cycle やその monodromy, etc). それに対し, これらの現象を解析的に考察する手段として, 現在のところ次の二つの理論が知られている。ひとつは

Steenbrink による vanishing cohomology 上の mixed Hodge structure であり, もうひとつは Brieskorn に始まる Gauss-Manin connection である。ところが最近になって, これら二つの理論の間の関係が注目され始め, Scherk - Steenbrink は Gauss-Manin connection に付随して natural に定まる Brieskorn lattice  $\mathcal{H}_{X,0}^{(q)} = \Omega_{X,0}^{n+1} / (df \wedge d\Omega_{X,0}^{n-1})$  より Steenbrink の Hodge filtration  $\{F_{s,i}\}$  が定まることを見い出した。(ただし, 彼らの定式化した命題は少し修正する必要があった, cf [Sa])

これらの関係をもう少し詳しく調べていくと、そこでカギにまつているのは、柏原長5による代数解析の理論であり、Scherk-Steinbrinkの結果はさらに一般的な理論（これは Weil Conjecture の標数 0 version とでもいえる）の一端ではないかという感じをいだかせる。

ここではまず、Weil Conjecture の標数 0 における対応物は何かについて、代数解析の言葉を使って少し説明をした後、Scherk-Steinbrink の結果について、その正しい定式化を与える。なお、上において本質的な問題のひとつは、projective variety  $Y$  の Zariski open set 上で定義された local system  $L$  が polarizable variation of Hodge structure の構造を持つとき、 $L$  から定まる Intersection cohomology sheaf  $\mathcal{IC}_L$  に canonical に (pure) Hodge complex の構造がはいるかということであるが、これはまだ未解決の様である。

## § 1. Constructible sheaf と regular holonomic system

(1.1)  $X$  を  $n$  次元複素多様体、 $A$  を  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$  或  $\mathbb{C}$  とする。

このとき、 $D(A_X)$  を  $X$  上の  $A$ -Module の derived category,  $D_c^b(A_X)$  を  $D(A_X)$  の full subcategory で constructible cohomology を持つ bdd complex からなるものとする。ここで  $X$  上の  $A$ -module の sheaf  $\mathcal{F}$

が constructible というのは、 $X$  の stratification  $X = \bigcup X_i$  (ただし  $\bar{X}_i$  は closed analytic set) があって、 $\mathcal{F}|_{X_i}$  は locally constant かつ  $\forall x \in X$ ,  $\mathcal{F}_x$  は finite  $A$ -module というこゝである。

— 又、 $\mathcal{D}_X$  を  $X$  上の holomorphic differential operator の  $\mathbb{C}$ -sheaf とする。同様に、 $D(\mathcal{D}_X)$  を  $X$  上の  $\mathcal{D}_X$ -module の derived category,  $D_{rh}^b(\mathcal{D}_X)$  を  $D(\mathcal{D}_X)$  の full subcategory と regular holonomic cohomology を持つ odd complex があるものとする。(cf. [K, K])

(1.2) 定理 (柏原, Mebkhout)

$$\mathfrak{D}: D_{rh}^b(\mathcal{D}_X) \xrightarrow{\sim} D_c^b(\mathbb{C}_X) \quad \text{equivalent}$$

ただし、 $\mathfrak{D}$  は  $\mathfrak{D}(\mathcal{M}^\bullet) = DR(\mathcal{M}^\bullet) (= \mathcal{Q}_X^\bullet \otimes_{\mathcal{D}_X} \mathcal{M}^\bullet)$  で与えられる。

( $\mathcal{Q}_X^\bullet$  は  $X$  上の holomorphic differential form の complex)  $\square$

(1.3) 定理  $\mathcal{F} \in D_c^b(\mathbb{C}_X)$  に對し、次は同値。

- 1)  $\exists \mathcal{M}$ : regular holonomic system s.t.  $DR(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{F}^\bullet$ .
- 2)  $\mathcal{F}^\bullet$  は perverse complex.  $\square$

こゝで  $\mathcal{F}^\bullet$  が perverse というのは、次の2つの条件を満たすことである。

- 1)  $\text{codim } \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) \geq i \quad (i \geq 0), \quad \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^\bullet) = 0 \quad (i < 0).$
- 2)  $\text{codim } \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{\bullet*}) \geq i \quad (i \geq 0), \quad \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{\bullet*}) = 0 \quad (i < 0).$

$$(\mathcal{F}^{\bullet*} := \mathcal{R}\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{F}^\bullet, \mathbb{C}_X))$$

Perverse complex がある  $D_c^b(\mathbb{C}_X)$  の full subcategory を  $\text{Perv}(\mathbb{C}_X)$  とすれば、定理 (1.3) は 更に  $\mathfrak{D}$  より regular holonomic system の abelian

category は  $\text{Perv}(\mathbb{C}_X)$  と equivalent であることを意味する。

(1.4) 命題  $Y \subset X$  の irreducible closed analytic subset ( $\text{codim } Y = l$ ),  $L \in Y$  の <sup>smooth</sup> Zariski open subset  $U$  上で定義された local system とする。このとき  $\mathcal{F}^* \in \text{Perv}(\mathbb{C}_X)$  が unique に存在して次の条件を満たす。

$$1) \quad \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^*) \subset Y, \quad \mathcal{F}^*|_U \simeq L[-l] \text{ in } D_{\mathbb{C}}^b(U)$$

$$2) \quad \text{codim } \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^*) > i \quad (i > l)$$

$$2^*) \quad \text{codim } \text{supp } \mathcal{H}^i(\mathcal{F}^{*-}) > i \quad (i > l)$$

さらに  $DR(m) \subset \mathcal{F}^*$ ,  $Z := Y - U$  とおくと、上の条件は次の

3つの条件と同値

$$1)' \quad m|_{X-Z} \simeq L \otimes_{\mathbb{C}} B_{U|X-Z} \quad (B_{U|X-Z} = \mathcal{H}_{[U]}^l(\mathbb{C}_{X-Z}))$$

$$2)' \quad \mathcal{H}_Z^0(m) = 0$$

$$2^*)' \quad \mathcal{H}_Z^0(m^*) = 0 \quad (m^* := \text{Ext}_{\mathbb{C}_X}^n(m, \mathcal{O}_X) \otimes_{\mathbb{C}_X} (\Omega_X^n)^{\otimes -1}) \square$$

定義 上の  $\mathcal{F}^*$  (及び  $m$ ) を  $L$  (及び  $m := L \otimes B_{U|X-Z}$ ) の minimal extension といい、 $\pi_L$  (及び  $\pi m$ ) と書く。

( $\pi_L$  は intersection cohomology sheaf と呼ばれる)

(1.5)  $f: X \rightarrow Y$  を complex manifold の間の proper holomorphic map とする。このとき、積分  $\int_f: D_{r,h}^b(\mathcal{O}_X) \rightarrow D_{r,h}^b(\mathcal{O}_Y)$  が

$$\int_f m := Rf_* (\mathcal{O}_{Y \leftarrow X} \bigoplus_{\mathbb{C}_X} m) [\dim Y - \dim X]$$

で定義され、重により  $\int_f$  と  $Rf_*$  は同一視される。

$$(i.e. \quad \pi_Y(\int_f m) \simeq Rf_*(\pi_X m))$$

(1.6) 定理 (Deligne, Gabber, Beilinson, Bernstein) (cf [G.M])

$f: Z \longrightarrow Y$   $\in$  algebraic manifold の間の smooth projective morphism ( $m := \dim Z - \dim Y$ ),  $X \in Z$  の irreducible closed sub variety とする。このとき、2次が成り立つ。

$$(1.6.1) \quad Rf_* \pi \mathbb{C}_X \simeq \bigoplus_{\alpha} \pi L_{\alpha} [l_{\alpha}] \quad \text{in } D_c^b(\mathbb{C}_Y)$$

ただし,  $\pi \mathbb{C}_X$  は  $\mathbb{C}_{X_{\text{reg}}}$  の minimal extension,  $\pi L_{\alpha}$  は  $Y$  の sub variety  $V_{\alpha}$  の open dense sub set 上の local system  $L_{\alpha}$  の minimal extension である。さらに,  $\text{Loc}(V, l) := \bigoplus_{\substack{V_{\alpha}=V \\ l_{\alpha}=l}} \pi L_{\alpha} [l_{\alpha}]$  とおくと

$\exists \Lambda: \text{Loc}(V, l) \longrightarrow \text{Loc}(V, l+2)$  が存在して

$$\text{Loc}(V, l) [2m] \xrightarrow{\sim} (\text{Loc}(V, -2m-l))^* \quad (\text{Poincaré duality})$$

$$\Lambda^l: \text{Loc}(V, -m-l) \xrightarrow{\sim} \text{Loc}(V, -m+l) \quad (\text{Hard Lefschetz})$$

が成り立つ。

□

[G.M] によれば、証明には標数  $p$  の理論 (Weil Conjecture) を使うと書いてある。我々の目標は当然上の命題を標数 0 の範囲内で証明することであるが、それには今の Hodge Theory (または harmonic theory) ではとても手が届かないという身もある。標数  $p$  では Gabber によい Intersection cohomology sheaf  $I_X$  は pure 型に  $Rf_* I_X$  も pure (cf (2.2)), して pure complex に因する一般論から (1.6.1) の分解はでてくるらしい。そこで標数 0 においても pure complex にあたる概念を定義したいが、それはなかなかうまくいかない。Frobenius が local に定義されたのに

并して、Hodge 構造は何らかの global な対象と結びついてしか意味を持ちにくいというのがその最大の理由であろう。ただ  $\pi^*L$  については、generic には  $L$  が polarizable variation of Hodge structure の構造を持つと定式化してもよさそうに思われる。当に問題は、Hodge filtration に対応する  $L \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\text{dR}}$  の good filtration を canonical に  $\pi^*(L \otimes_{\mathbb{Q}} B_{\text{dR}})$  に持ち込める方法があるかであるが、これはよくわからない。ただ、孤立特異点の Gauss Manin connection の計算は、これに對して何らかの示唆を与えるものと思われる。

## §2 Weil Conjecture と Mixed Hodge Structure

(2.1)  $X_0 \in \mathbb{A}_g^1$  上 finite type の scheme,  $\mathcal{F}_0$  は  $X_0$  上の constructible  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -sheaf とする。(cf. [CWII(1.1)]) このとき、 $\mathcal{F}_0$  が punctual に pure of weight  $n$  というのは 任意の closed point  $x_0 \in |X_0|$  と  $x_0$  上の geometric point  $x \in X(\mathbb{F})$  に對し、Frobenius  $F_{x_0}^* := F_x^{*\omega_{x_0}} : \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{F}_x$  のすべての固有値が代数的数で  $n$  の共役はどれを絶対値  $N(x_0)^{n/2}$  を持つことである。(  $N(x_0) := \#k(x_0)$  ) 又、 $\mathcal{F}_0$  が punctual に pure な  $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$ -sheaf の extension をくり返して得られることを mixed といい、さらにこれらの punctual な weight がどれも  $n$  以下の時、mixed of punctual weight  $\leq n$  ということになる。

次に、 $K \in D_c^b(X)$  に対し、 $K$  が mixed of weight  $\leq n$  とは、

任意の  $i$  に対し、 $\mathcal{H}^i(K)$  が mixed of punctual weight  $\leq n+i$  かつ、

$K$  が pure of weight  $n$  とは、 $K$  が mixed of weight  $\leq n$  かつ

$DK$  が mixed of weight  $\leq -n$  なることとする。(cf [CWII(4.2)])

( $DK := R\mathcal{H}om(K, K_X)$ ,  $K_X := Ra^! \bar{Q}_e$  dualizing sheaf,  $a: X_0 \rightarrow \text{Spec } \mathbb{F}_p$ )

(2.2) 定理 (Deligne [CWII(4.2.3)])

$f: X \rightarrow Y$  が  $\mathbb{F}_p$  上 finite type の schemes の morphism で

$K \in D_c^b(X)$  が mixed of weight  $\leq n$  とする。このとき、

$Rf_! K$  は mixed of weight  $\leq n$ 。 □

系 さらに  $f$  が proper で  $K \in D_c^b(X)$  が pure of weight  $n$  なら、 $Rf_* K$  は pure of weight  $n$ 。 □

上の系から、 $X$  が  $\mathbb{F}_p$  上 proper で smooth な場合の Weil Conjecture が得られる。又、 $X$  が singular な場合でも、irreducible で normal なら、Intersection cohomology sheaf  $I_X$  を使えば、Gabber の purity より、Weil Conjecture の主要結果はそのまま成り立つことになる。

(2.3) [THI] によれば、Weil Conjecture に対応するのは mixed Hodge structure である。

定義  $A \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  または  $\mathbb{R}$  とする。このとき、 $A$ -mixed Hodge structure とは、finite  $A$ -module  $H_A$ ,  $H_{A \otimes \mathbb{R}} \simeq H_A \otimes \mathbb{R}$  上の finite increasing

filtration  $W$  (weight filtration),  $H_{\mathbb{C}} \simeq H_A \otimes_{\mathbb{A}} \mathbb{C}$  上の finite decreasing filtration

$F$  (Hodge filtration) かつ成り. これは次の条件を満たす.

(2.3.1)  $(Gr_n^W(H_{A\otimes\mathbb{Q}}), Gr_n^W(F))$  は  $A\otimes\mathbb{Q}$ -Hodge structure of weight  $n$  ( $\forall n \in \mathbb{Z}$ ). (即ち  $Gr_n^W(H_{\mathbb{C}}) = \bigoplus_{p+q=n} H^{p,q}$  なる直和分解が存在して,  $Gr_n^W(F^p) = \bigoplus_{p' \geq p} H^{p',q}$  かつ  $H^{p,q} = \overline{H^{q,p}}$  が成り立つ。)

定義 topological space  $X$  上の cohomological  $A$ -mixed Hodge complex とは,  $K_A \in D^+(A_X)$ ,  $K_{A\otimes\mathbb{Q}} \in D^+(A\otimes\mathbb{Q}_X)$ ,  $K_{\mathbb{C}} \in D^+(\mathbb{C}_X)$  及び  $K_{A\otimes\mathbb{Q}}$  の filtration  $W$ ,  $K_{\mathbb{C}}$  の filtrations  $W, F$  かつ成り, 次を満たす。

- (2.3.2) i)  $H^*(X, K_A)$  は finite  $A$ -module と  $H^*(X, K_A) \otimes \mathbb{Q} \cong H^*(X, K_{A\otimes\mathbb{Q}})$ .  
 ii)  $K_{A\otimes\mathbb{Q}} \cong K_A \otimes \mathbb{Q}$  in  $D^+(A\otimes\mathbb{Q}_X)$ ,  $(K_{\mathbb{C}}, W) \subseteq (K_{A\otimes\mathbb{Q}}, W) \otimes \mathbb{C}$  in  $D^+F(\mathbb{C}_X)$  (i.e. filtered quasi iso). (ただしこれらの同型は given とする)  
 iii)  $(Gr_n^W(K_{A\otimes\mathbb{Q}}), Gr_n^W(F))$  は cohomological  $A\otimes\mathbb{Q}$ -Hodge complex of weight  $n$  ( $\forall n$ ). つまり,  $Gr_n^W(F)$  による  $H^*(X, Gr_n^W(K_{\mathbb{C}}))$  の spectral sequence は  $E_1$ -degenerate して,  $(H^i(X, Gr_n^W(K_{A\otimes\mathbb{Q}})), Gr_n^W(F))$  は  $A\otimes\mathbb{Q}$ -Hodge structure of weight  $n+i$  ( $\forall i$ ) となる。

これらの2つの概念は次の命題によって結びついている。

(2.4) 命題  $K$  は cohomological  $A$ -mixed Hodge complex とせよ。

このとき,  $H^n(X, K_{A\otimes\mathbb{Q}})$  上の filtration  $W[n]$  及び  $H^n(X, K_{\mathbb{C}})$

上の filtration  $F$  は,  $H^n(X, K_A)$  に  $A$ -mixed Hodge structure を定める。□

Deligne が algebraic variety の cohomology に mixed Hodge structure を定義した方法はすべてこの命題によってゐる。(か(1. (2.3.2)iii) の条件は, かなり強い条件であるが, complex の global な条件

のみしか規定しておらず、Frobeniusにより local に定義された mixed complex の対応物とはとても異なる。定理(2.2) にならうなる。何か local に定義された、 $W$  及び  $F$  に因る良い条件をみつけて、local にその条件を満たしていれば (さらに  $\text{supp } H^*(K_A)$  が projective なる)  $K$  は上の意味で cohomological  $A$ -mixed Hodge complex になる。というのが理想であらう。次節では、その条件に対し、多少の考察を附した。

### §3. Variation of Hodge structure

(3.1) 定義  $M$  を coherent  $\mathcal{O}_X$ -Module とする。このとき、 $M$  の decreasing filtration  $F^\bullet$  が次を満たす時、 $F^\bullet$  を good filtration とする。

- i)  $\forall i \in \mathbb{Z}$   $F^i M$  は coherent  $\mathcal{O}_X$ -Module であり  

$$\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} F^i M = M, \quad F^i M = 0 \text{ for } i \gg 0.$$
- ii)  $\mathcal{O}(k) F^i M \subset F^{i-k} M$  for  $\forall k \geq 0, \forall i \in \mathbb{Z}$ .
- iii)  $\exists i_0 \in \mathbb{Z}$  s.t.  $\mathcal{O}(k) F^i M = F^{i-k} M$  for  $\forall k \geq 0, \forall i \leq i_0$ .  
 (ただし、 $\mathcal{O}(k) = \left\{ \sum_{|\nu| \leq k} a_\nu \partial_1^{\nu_1} \cdots \partial_n^{\nu_n} \right\}$ )

定義  $M_i \in D_{\text{rh}}^b(\mathcal{O}_X)$  を各  $M_i$  が coherent  $\mathcal{O}_X$ -Module となる complex とする。この時  $M_i$  の filtration  $F^\bullet$  が good とは 各  $i$  について  $F^\bullet(M_i)$  が good であるとする。

さるに、 $DR(M)$  の filtration  $F^\bullet$  を

$$(F^k DR(M))^k := \bigoplus_{p+q=k} \Omega_X^p \otimes F^{i-p} M^q$$

で定義する。

定義  $f: X \rightarrow Y$  を projective morphism,  $(M, F^\bullet)$  を上の通りとする。この時、filtered complex  $(\int_+ M, F^\bullet)$  を次の様に定める。

i)  $f$  が smooth な場合は、filtered complex  $(DR_{X/Y}(M), F^\bullet)$  の direct image として定義する。

ii)  $f$  が closed immersion の場合は、local に  $X = \{x_1 = \dots = x_r = 0\}$

として、 $\int_+ M[-1] \simeq M \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}[0, -d_2]$  の filtration を

$$F^i(M \otimes \mathbb{C}[0, -d_2]) = \sum_{\nu} F^{i+l+|\nu|} M \otimes \partial_1^{\nu_1} \dots \partial_2^{\nu_2}$$

により定義する。これは good filtration の性質から、coordinate のとり方によらない。

(3.2) 命題  $f: X \rightarrow Y$ ,  $(M, F^\bullet)$  を上の通りとする。

この時 (1.5) の同型  $DR_Y(\int_+ M) \simeq Rf_* DR_X(M)$

は、filtered complex として同型である。

(3.3) 定義  $X$  を複素多様体,  $A \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$  または  $\mathbb{R}$  とする。

このとき、 $X$  上の variation of  $A$ -Hodge structure of weight  $w$  とは、 $X$  上の  $A$ -local system  $L$ ,  $M := \mathbb{C}_X \otimes_A L$  の decreasing filtration  $F^\bullet$  があり、これは次を満たす。

- i)  $\mathcal{F}^\bullet$  is  $\mathcal{O}_X$ -module  $\mathcal{M}$  of good filtration  
 ii)  $\mathcal{F}^\bullet \mathcal{M}$  is holomorphic vector bundle  $\mathcal{M}$  of subbundle  $\tau$  and,  
 for  $x \in X$  is  $\mathbb{Z}$ ,  $(L_x \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}, \mathcal{F}^\bullet|_{L_x \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}})$  is  $A \otimes \mathbb{Q}$ -Hodge  
 structure of weight  $n + \mathbb{Z}$ .

さらに, local system of morphism  $S: L \otimes_{\mathbb{Z}} L \rightarrow A$  が  
 存在して次を満たすとき,  $S$  を  $(L, \mathcal{F}^\bullet)$  の polarization といい.

i)  $S$  is  $A$ -bilinear,  $\frac{S(u,v) + (-1)^n S(v,u)}{2}$  (おと  $\mathbb{C}$  まで得た拡張したのをやはり  $S$  で表す.)

ii)  $\forall x \in X, S(H_x^{p,q}, \overline{H_x^{p',q'}}) = 0$  if  $p \neq p', q \neq q'$

$i^p \notin S(v, \bar{v}) > 0$  if  $v \in H_x^{p,q} \quad v \neq 0$

( $\forall x \in X, H_x^{p,q} := \mathcal{F}_x^p \cap \overline{\mathcal{F}_x^q}$ )

### (3.4) 命題 (Deligne of [Zu])

$f: X \rightarrow Y$  is smooth projective morphism,  $(L, \mathcal{F}^\bullet)$  is  
 $X$  of polarizable variation of  $A$ -Hodge structure of weight  $n$   
 とする. この時,  $\int_f^i \mathcal{O}_X \otimes L := \mathcal{H}^i(\int_f \mathcal{O}_X \otimes L)$  に induce  
 した filtration  $\mathcal{F}^\bullet$  is  $R^i f_* L \simeq DR_Y(\int_f^i \mathcal{O}_X \otimes L)$  に  
 polarizable variation of  $A$ -Hodge structure of weight  $n+i$  と  
 なる.  $Rf_* DR_X(\mathcal{O} \otimes L)$  の  $\mathcal{F}^\bullet$  に なる spectral sequence は  
 $E_1$ -degenerate する.

系  $L, (DR_X(\mathcal{O} \otimes L), \mathcal{F}^\bullet)$  is  $X$  of smooth projective の時,  
 cohomological  $A$ -Hodge complex となる.

(3.5) 問題  $Y$  is irreducible projective variety,  $U \subset Y$  is smooth Zariski open subset,  $Z = Y - U$ ,  $(L, F)$  is  $U$ 上の polarizable variation of Hodge structure  $\geq 1$ ,  $Y$  が  $\tau: Y \hookrightarrow X$  で多様体  $X$  に埋め込まれているとする。このとき  $B_{0|X-Z} \otimes L = \int_{\tau|_U} \mathcal{O}_U \otimes L[-1]|_{X-Z}$  の minimal extension を  $\mathcal{M}$  とすると,  $F$  が  $\mathcal{M}|_{X-Z} = B_{0|X-Z} \otimes L$  に induce する good filtration (cf (3.1)) を canonical に  $\mathcal{M}$  にまで extend し,  $(\pi^* L, DR_X(\mathcal{M}), F)$  が cohomological Hodge complex になるようにあることができるか?

最も樂觀的な予想はこの問いが肯定的に解け, しかも (1.6.1) の同型が filtration にみで成り立つ といふのであるが, 計算できる具体例がほとんどないので, 今のところ 何ともいえない。  $L$  として  $\mathbb{Z}$ ,  $F$  として trivial filtration をとった場合は, Intersection cohomology に Hodge structure を入れる問題になるが, その場合は逆に  $Y$  の resolution に定理 (1.6) を適用して, Hodge structure を定義できる可能性がある。(例えば cone の場合など)

次節では, good filtration の extension の例として, 孤立特異点の Gauss Manin system を考察する。

# § 4, Gauss Manin system & mixed Hodge structure

(4.1)  $f \in \mathbb{C}^{n+1}_0$  を孤立特異点を持った正則関数とする。

このとき、 $f$  は多項式としてよく、その次数は任意に大きくとれる。

又、 $\overline{f^{-1}(0)} \subset \mathbb{P}^{n+1}$  は原点以外で smooth と仮定してよい。

定義  $Y := \overline{\{f(x)=x\}} \subset \mathbb{P}^{n+1} \times S$   $p: Z := \mathbb{P}^{n+1} \times S \rightarrow S$  projection

$$X := (B \times S) \cap Y, \quad S := \{ |x| < \eta \}, \quad B = \{ \|x\| < \varepsilon \},$$

$$\bar{f} := p|_Y, \quad f = \bar{f}|_X, \quad i: X \hookrightarrow Y \text{ inclusion.}$$

このとき、 $1 \gg \varepsilon \gg \eta > 0$  があり、 $\bar{f}: Y \rightarrow S$  は  $\overline{f^{-1}(0)}$  点以外で smooth,

$f: X \rightarrow S$  はいわゆる Milnor fibration になる。

$$f': X^* = X \setminus f^{-1}(0) \rightarrow S^* = S \setminus \{0\}$$

は  $\mathbb{C}^n$  fibration になる。

定義  $H_X := R^n f_* \mathbb{C}_X|_{S^*}$   $H_Y := R^n \bar{f}_* \mathbb{C}_Y|_{S^*}$

$H_X$  及び  $H_Y$  は  $S^*$  上の local system であり、それぞれ

monodromy  $\Sigma$   $M_X$  及び  $M_Y$  を持つ。

$\pi: \tilde{S} \ni \tilde{s} \mapsto s = \tilde{s}^c \in S \ni \tilde{H}_Y := \pi^* H_Y$  が unipotent monodromy

を持つ base change  $\times U$ ,  $U \rightarrow S^*$  universal covering

に  $\tilde{s} \neq 1$ ,  $X_\infty := X \times_S U$ ,  $Y_\infty = Y \times_S U$  とおく。

(4.2) 定義  $\mathcal{H}_X := \int_f^n \mathbb{C}_X$ ,  $\mathcal{H}_Y := \int_{\bar{f}}^n \mathbb{C}_Y$ . (cf (1.5))

$f: X \rightarrow S$  の場合、proper ではないが、 $\int_f \mathbb{C}_X \in D_{rh}^b(\mathcal{D}_S)$

となる。  $DR_S(\int_f \mathbb{C}_X) = Rf_* \mathbb{C}_X$ ,  $DR_S(\int_{\bar{f}} \mathbb{C}_Y) = R\bar{f}_* \mathbb{C}_Y$  となる。

(3.1) によれば,  $\mathcal{O}_X$  及び  $\mathcal{O}_Y$  の trivial filtration  $F^\bullet$  (i.e.  $F^0\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_X$ ,  $F^1\mathcal{O}_X = \{0\}$ ) は  $\mathcal{H}_X$  及び  $\mathcal{H}_Y$  に decreasing filtration  $F^\bullet$  を induce する。このとき, 次が成り立つ。(cf [Sa])

(4.3) 定理

i)  $F^n \mathcal{H}_{X,0} \simeq \mathcal{Q}_{X,0}^{n+1} / \det_d \mathcal{Q}_{X,0}^{n-1}$  (Brieskorn lattice)

$\forall i \geq 0, \quad F^{n-i} \mathcal{H}_X = \partial_t^i F^n \mathcal{H}_X.$

ii)  $F^\bullet(\mathcal{H}_Y)$  の各  $s \in S^*$  における制限は  $H^n(Y_s, \mathbb{C})$  の Hodge filtration と一致し,  $(R^* f_* \mathbb{Z}_Y|_{S^*}, F^\bullet|_{S^*})$  は  $S^*$  上の polarizable variation of Hodge structure of weight  $n$  とする。

iii)  $d = \deg f$  が十分大きければ,  $i^*: \mathcal{H}_Y \rightarrow \mathcal{H}_X$  は surjective.

$\text{Ker } i^*$  は locally free  $\mathcal{O}_S$ -module of finite type, i.e.

$$0 \rightarrow \mathcal{K} \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{H}_Y \rightarrow \mathcal{H}_X \rightarrow 0$$

$\pm S$  に  $i^*$  は  $F^\bullet$  に由り, strictly compatible, i.e.

$$i^* F^p \mathcal{H}_Y = F^p \mathcal{H}_X$$

□

注意.  $\mathcal{H}_{X,0}$  は  $\mathcal{H}_{Y,0}$  の microlocalization であり, この場合 microlocalize する事が下段, vanishing cohomology を与えたと一致している。又 iii) の exact sequence は  $\mathcal{H}_X$  に invariant cycle がある場合は split しない。

以下, 定理 (4.3) の iii) が成り立つ様,  $d$  は十分大きいと仮定する。

(4.4)  $j: S^* \hookrightarrow S$  を inclusion とする。このとき、

$$\pi^* H_Y = j_* H_Y \simeq R^n \bar{F}_* \mathcal{O}_Y, \quad DR(\mathcal{H}_Y) = \pi^* H_Y$$

であり、 $\mathcal{F}^*(\mathcal{H}_Y)$  は  $S^*$  上の Hodge filtration を 原点まで  
接続してることになる。故に問題はこの filtration が、

何らかの意味で canonical かどうかである。

例えば、 $\bar{Y} \rightarrow Y$  という bimeromorphic な変換で singular  
fiber だけを変えた場合、 $\mathcal{H}_Y$  は  $\int^m \mathcal{O}_{\bar{Y}}$  の direct factor に  
なるが、このとき、 $\int^m \mathcal{O}_{\bar{Y}}$  の Hodge filtration  $\mathcal{F}^*$  がその直和  
分解と compatible でさうに、 $\mathcal{H}_Y$  に induce された filtration  
が  $\mathcal{H}_Y$  の Hodge filtration と一致するかというのが問題  
である。(これは dual filtration の理論がうまくいけば、成り立ち  
そうに思われる。)

又、 $S^*$  上の variation  $\mathcal{F}^*|_{S^*}$  だけから何とかして  $\mathcal{F}^*$  を  
特徴付けられないかということも当然問題になる。そこで  
Schmid の limit mixed Hodge structure の存在を証明する。

(4.5)  $S^*$  上の local system  $H_Y$  に對し、locally free  $\mathcal{O}_S$ -module  
としての 原点への接続  $\mathcal{H}_Y$  (あるいは  $\mathcal{H}'_Y$ ) が unique に存在し、次  
を満たす。

i)  $\text{Ker } D = H_Y$  とする  $S^*$  上の connection は 原点まで mero-  
morphic に接続され、原点で simple pole を持つ。

ii)  $D$  の原点での residue の固有値は  $(-1, 0]$  (あるいは  $[0, 1)$ ) に含まれる。

さらに、同型  $H^n(Y_0, \mathbb{C}) \cong \mathcal{L}_Y(0) := \mathcal{L}_{Y,0} / t \mathcal{L}_{Y,0}$  が

$u \mapsto \exp(-\log t \log M_Y / 2\pi\sqrt{-1})$  により得られる。

ただし、 $u$  は  $H_Y$  の multivalued section とみなし、 $\log M_Y$  の固有値は  $[0, 1)$  (あるいは  $(-1, 0]$ ) にはいるようにする。

一方  $H_X, \tilde{H}_X := \pi^* H_X, \tilde{H}_Y := \pi^* H_Y$  に對しても同様の extension が得られ、それらを  $\mathcal{L}_X, \tilde{\mathcal{L}}_X, \tilde{\mathcal{L}}_Y$  などで表す。

( $\pi: \tilde{S} \rightarrow S$  は  $\pi^* H_Y$  が unipotent monodromy を持つ特異 covering) (off 11)

#### (4.6) 命題 (Schmid)

$\tilde{S}^* := \tilde{S} - \text{pt}$  上の variation  $\pi^*(\mathcal{F}'|_{S^*})$  は 原点まで  $\tilde{\mathcal{L}}_Y$  の subbundle  $\tilde{\mathcal{F}}'$  として接続され、 $F_S' := \tilde{\mathcal{F}}'|_{\tilde{x}=0}$  と monodromy weight filtration とは  $H^n(Y_0, \mathbb{C}) \cong \mathcal{L}_Y(0)$  に mixed Hodge structure を定める。  $\square$

注意.  $\mathcal{F}'|_{S^*}$  も  $\mathcal{L}_Y$  の subbundle  $\tilde{\mathcal{F}}'$  として接続されるが  $\tilde{F}' = \tilde{\mathcal{F}}'|_{\tilde{x}=0}$  は monodromy decomposition  $H^n(Y_0, \mathbb{C}) = \bigoplus_{\lambda} H^n(Y_0, \mathbb{C})_{\lambda}$  (ただし、 $H^n(Y_0, \mathbb{C})_{\lambda} := \{u \in H^n(Y_0, \mathbb{C}) \mid (M_Y - \lambda)^{n+1} u = 0\}$ ) とは一般に compatible でなく、 $F_S'$  とは一致しない。ただし  $\tilde{F}'$  はあまり意味を持たないにしても、 $\tilde{\mathcal{F}}'$  の方は意味がある。

$H_Y \supset \mathcal{L}_Y \supset \mathcal{F}'' H_Y$  より  $\tilde{\mathcal{F}}'' \supset \mathcal{F}''$  及び  $\tilde{\mathcal{F}}' \supset \mathcal{F}' \cap \mathcal{L}_Y$  は、 $\tilde{\mathcal{F}}'$  の定義からすぐわかる。 故に問題をはたして等号

成り立つかどうかである。(もし等号が成り立つなら, Scherk-Steinbrinkの結果は すぐででくる。)

#### (4.7) 命題 (Steinbrink)

$H^n(X_0, \mathbb{C})$  は canonical に mixed Hodge structure を持ち,  
 $i^*: H^n(Y_0, \mathbb{C}) \rightarrow H^n(X_0, \mathbb{C})$  は mixed Hodge structure の  
 morphism となる。  $\square$

ここで, Scherk-Steinbrink の結果というのは  $H^n(X_0, \mathbb{C})$  の Hodge  
 filtration  $F_{st}^\bullet$  が  $\mathcal{H}_X = \int_f \mathcal{O}_X$  の Hodge filtration  $F^\bullet$  (cf (4.2))  
 から定まるというのであるが, その定め方において 結局は,  
 $F^\bullet$  が monodromy decomposition (cf (4.6) の注意) と compatible で  
 ないことに気付かず, unipotent base change をせずに, 話を  
 進めた。 そこで修正すると 後の様に定式化される。

#### (4.8) 定理

$$F_{st}^\bullet = \text{Im}(\pi^*(F^\bullet \mathcal{H}_X \cap \tilde{\mathcal{L}}_X) \cap \tilde{\mathcal{L}}_X \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_X(1) (= H^n(X_0, \mathbb{C})))$$

ただし,  $\pi^*(F^\bullet \mathcal{H}_X \cap \tilde{\mathcal{L}}_X)$  は  $\pi^* \omega$  ( $\omega \in F^\bullet \mathcal{H}_X \cap \tilde{\mathcal{L}}_X$ ) で生成される  
 $\tilde{\mathcal{L}}_X[\tilde{\pi}^{-1}]$  の  $\mathbb{Q}_3$ -sub Module である。  $\square$

注意. Scherk-Steinbrink の定式化は  $F_{st}^\bullet = \text{Im}(\pi^*(F^\bullet \mathcal{H}_X \cap \tilde{\mathcal{L}}_X \rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_X(1)))$   
 であるが, もしこれが正しいとすれば "semisimple monodromy"  
 を持つ  $f \in \mathbb{C}[x, y]$  (i.e. plane curve) は必ず "quasi homogeneous"  
 になり (∵  $F^\bullet \mathcal{H}_X$  が saturated) 矛盾が生じる。

証明) 定理(4.8)の等式の右辺を  $F_G^\circ$  とでもおく。  $F_G^\circ \subset F_{St}^\circ$

は (4.3)のiii) 及び  $\sum \pi^*(\mathcal{H}_Y)_n d_Y$  が正しいから。

逆は  $\sum \pi^*(\mathcal{H}_Y)_n d_Y$  が今のところわかっていないので少しわかり直さす必要がある。

定義 monodromy decomposition と compatible な  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$

の decreasing filtration  $F^\bullet$  に對し,  $\mu$  の有理数  $\{d_i\}$  を

次の様に定め  $F$ -exponent と呼ぶ。 ( $\mu = \dim H^n(X_\infty, \mathbb{C})$ )

$$i) \quad d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_\mu,$$

$$ii) \quad \forall p, \forall \lambda \in \mathbb{C}_\times, \text{ 12 對し,}$$

$$\lambda \neq 1 \Rightarrow \# \{i \mid \exp(-2\pi\sqrt{-1}d_i) = \lambda, [d_i] = n-p\} = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Gr}_F^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_\lambda$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow \# \{i \mid d_i = n+1-p\} = \dim_{\mathbb{C}} \operatorname{Gr}_F^p H^n(X_\infty, \mathbb{C})_1.$$

( $[d_i]$  は Gauss 記号)

又,  $F_{St}$ -exponent のことを単に exponent といい。  $\square$

このとき exponent の duality と斎藤恭司先生の補題

$\det \left( \int_{\gamma_i(\mathbb{A})} \omega_j \right) \sim t^{(n-1)\mu/2}$  より,  $F_{St}$ -exponent は  $F_G$ -exponent の総和は共に  $(n+1)\mu/2$  となり,  $F_G^\circ \subset F_{St}^\circ$  かつ

$F_G^\circ = F_{St}^\circ$  がわかる。 QED

注意 1.  $H^n(X_\infty, \mathbb{C})$  の filtration  $F^\bullet$  を  $F^\bullet := \operatorname{Im}(\pi^*(\sum \mathcal{H}_Y)_n \tilde{\mathcal{L}}_X$

$\rightarrow \tilde{\mathcal{L}}_X(0))$  で定義すると, (4.3)のiii)の exact sequence が split (2.1)

関係上 一般には  $F_{St}^\circ$  とは一致しない。(例えば  $f = x^5 + y^5 + z^5 + x^3y^3$ )

2. Varchenko は asymptotic Hodge filtration  $F_a'$  を

$$F_a^p = \text{Im} (\pi^* (t^{p-n} \overline{F}^n \mathcal{H}_X) \cap \widehat{\mathcal{L}}_X \rightarrow \widehat{\mathcal{L}}_X(0)) \text{ とする様に定義した。}$$

(cf [Va]) (ただし,  $t^{p-n} \overline{F}^n \mathcal{H}_X$  は  $\mathcal{L}_X[t^{-1}]$  の中で考えよ.)

$n=1$  又は  $f$  が quasi homogeneous なら  $F_a'$  は  $F_{St}$  と一致するか  
一般には  $\exists k \leq n-1$  s.t.  $h_\lambda^{k, n+1-k} \neq 0$  ( $\lambda \neq 1$ ) or  $h_\lambda^{k, n+2-k} \neq 0$

と異なる場合には両者は一致しない。 ( $h_\lambda^{P\&} := \dim Gr_F^P Gr_{\text{reg}}^W H^n(X_{\text{ad}}, \mathbb{C})$ )

系 1 Hodge number  $h_\lambda^{P, \&}$  Bv exponent は  $\mu$ -constant deformation で一定 □

系 2  $\widehat{\mathcal{H}}_X^{(u)}$  は Brieskorn lattice  $\mathcal{H}_X^{(0)} = \overline{F}^n \mathcal{H}_X$  の saturation とし,

$R \in \text{res}(t d_t): \widehat{\mathcal{H}}_X^{(u)} / t \widehat{\mathcal{H}}_X^{(u)} \hookrightarrow$  とする。このとき  $n=1$  なら

$\exp(-2\pi i R)$  は monodromy  $M_X$  と conjugate. □

系 2 は,  $N = \log(M_X)_u$  が type  $(-1, -1)$  の morphism として  $H^n(X_{\text{ad}}, \mathbb{C})$  に作用することから得られる。

後書き この原稿を書き終えた後、[Bry] の Part II が公開された。  
内容はかなり重複している所もあるが、級は特に (3.5) の  
内題に対し, regular holonomic system の order という概念を  
使って 1 つの予想を立てている様である,

## References

- [CW] Deligne, P.: La conjecture de Weil. I,II.
- [TH] Deligne, P.: Théorie de Hodge. I,II,III.
- [Bry] Brylinski, J.L.: Modules holonomes à singularités régulières et filtration de Hodge<sup>I</sup><sub>∧</sub>(preprint).
- [GM] Goresky, M. and MacPherson, R.: On the topology of complex algebraic maps (preprint).
- [KK] Kashiwara, M. and Kawai, T.: On holonomic systems of micro-differential equations III (to appear).
- [Sa] Saito, M.: Gauss-Manin system and Mixed Hodge structure (to appear).
- [Sch] Schmid, W.: Variation of Hodge structure. Inv. Math. 22.
- [SS] Scherk, J. and Steenbrink, J.: On the mixed Hodge structure on the cohomology of the Milnor fiber (preprint).
- [St] Steenbrink, J.: Mixed Hodge structure on the vanishing cohomology. Proc. Nordic Summer School, Oslo (1976).
- [Va] Varchenko, A.: Asymptotics of holomorphic forms define mixed Hodge structure. Dokl. Akad. Nark. SSSR 255-5.
- [Zu] Zucker, S.: Hodge theory with degenerating coefficients. Ann. Math. 109.