

五十嵐儀孝

1) を出し, Scaling Law が破れる事を示した。次に $\epsilon \approx 1$ の場合には s^6 項が分子場からのずれとして重要になり, 対称性も異なるため n 依存性も変ってくる。したがって $d=3$ を議論する場合は (1) のハミルトニアンでは不十分である。

References

- 1) K.G. Wilson, Phys. Rev. Lett 28, 548 (1972).
- 2) N.N. Bogoliubov, D.V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Field (Wiley, 1959).
- 3) A.M. Polyakov, Sov. Phys. JETP 28, 553 (1969).
- 4) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 28, 1036 (1969).
- 5) M. Suzuki, Phys. Rev. Lett. 28, 507 (1972).
- 6) A.A. Migdal, Sov. Phys. JETP 32, 552 (1971).

臨界指数に対する $1/n$ 展開

東大教養 阿 部 龍 蔵

最近, Wilson¹⁾ は臨界指数に対する ϵ 展開 ($\epsilon = 4 - d$, d : 空間の次元数) を求めることに成功した。彼の理論でスピン次元数 n は任意である。ここでは, 逆に d は任意であるとし, 臨界指数を $1/n$ のべきで展開する方法について述べる。 $1/n$ 展開は ϵ 展開と異なり, 系統的な展開が比較的簡単に導かれるが, 簡単のため, 帯磁率の指数 r に注目し, $1/n$ の最低次の項を求める。 ϵ 展開と $1/n$ 展開とは共通の領域 ($\epsilon \ll 1$, $1/n \ll 1$) をもつので, 互いの結果のチェックとしても使いうる。

われわれの出発点は Stanley の理論²⁾ である。彼は j 番目の格子点に n 次元のベクトル

$$\mathbf{S}_j = \{ \sigma_j(1), \sigma_j(2), \dots, \sigma_j(n) \}$$

を対応させる。ただし, 成分 $\sigma_j(m)$ は

$$\sum_{m=1}^n \sigma_j^2(m) = n$$

を満たす連続変数とする。また、磁場のないときのハミルトニアンを

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j$$

とする。帯磁率 χ は (trivial factor を除いて)

$$\chi = \frac{1}{nN} \left\langle \sum_{ij} \mathbf{S}_i \cdot \mathbf{S}_j \right\rangle$$

で与えられる。

Stanley は $n \rightarrow \infty$ の極限で、 χ は Spherical model の値と一致することを示したが、彼の理論を拡張し、 χ に対する補正項を求めると

$$\chi = \chi_0 - \frac{2A}{nN} \sum_{\mathbf{q}} \frac{J(\mathbf{q})}{\nu(\mathbf{q})} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

と表わされる。ただし

$$A = \frac{g^2(0)}{N^{-1} \sum_{\mathbf{q}'} g^2(\mathbf{q}')} , \quad g(\mathbf{q}) = \frac{1}{2t - K(\mathbf{q})}$$

$$\nu(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} g(\mathbf{k}) g(\mathbf{q} - \mathbf{k}) ,$$

$$J(\mathbf{q}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} g^2(\mathbf{k}) [g(\mathbf{q}) - g(\mathbf{q} - \mathbf{k})]$$

であり、また $K(\mathbf{q})$ は $K_{ij} = \beta J_{ij}$ の Fourier 変換である。

d 次元の単純立方格子を考え、最近接相互作用を仮定すると

$$K(\mathbf{q}) = 2K(\cos q_1 + \cdots + \cos q_d)$$

である。 $t = KZ$, $s = 2(z - d)$ とおき

$\nu(\mathbf{q})$ を計算するさい、 $K(\mathbf{q})$ の q^2 まで考慮し

$$g(\mathbf{q}) \simeq \frac{1}{K(s + q^2)} , \quad q^2 = q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_d^2$$

と近似する。その結果、 $\nu(\mathbf{q})$ は

$$\nu(\mathbf{q}) = \frac{1}{K^2 2^d \pi^{d/2}} \frac{\Gamma[2-(d/2)]}{[s+(q^2/4)]^{2-(d/2)}} F\left(2-\frac{d}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right)$$

と計算される。ただし、 $F(\alpha, \beta, r, x)$ は超幾何関数。また $x = q^2 / (4s + q^2)$

Spherical model に対する exponent を $r_0 [=2/(d-2)]$ とすれば $A \propto \epsilon^{-r_0-1}$ 。
また $4s \lesssim q^2$ のとき

$$\frac{J(\mathbf{q})}{\nu(\mathbf{q})} \propto \left[-\frac{C}{2q^2} + 3 \frac{s^{(d/2)-1}}{q^d} + (\text{高次の項}) \right]$$

で示される。 r の補正は第2項より生じ、matching の条件から (鈴木氏の報告参照)
 $2 < d \leq 4$ に対して

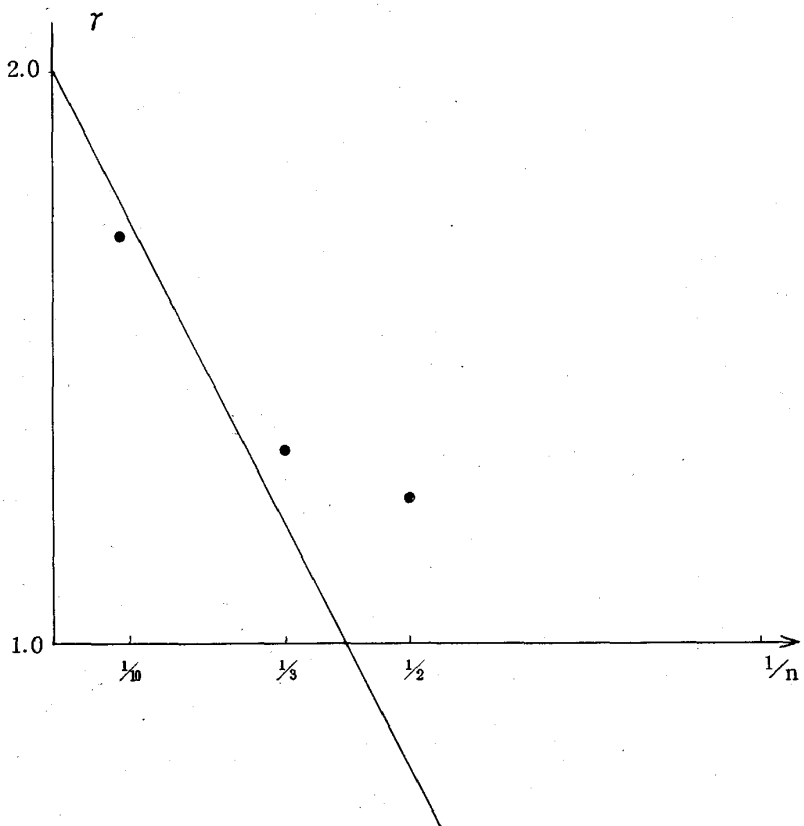
$$r = \frac{2}{d-2} - \frac{6}{n} \frac{\sin(d\pi/2) \Gamma(d-1)}{(2-d)\pi [\Gamma(d/2)]^2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

がえられる。 $d=4-\epsilon$ とおき、 ϵ 展開すると、Wilson の式を $1/n$ まで展開したものと完全に一致する。とくに、 $d=3$ では

$$r = 2 - \frac{24}{\pi^2 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となる。この結果を図示すると

図の直線で現わされる。丸印は Stanley³⁾ の数値計算の結果である。



文 献

- 1) K. G. Wilson, Phys. Rev. Letters 28 (1972), 548.
- 2) H. E. Stanley, Phys. Rev. 176(1968), 718.
- 3) H. E. Stanley, Phys. Rev. Letters 20 (1968), 589.