

正則パラメータを持つ超函数の特異性について

千葉大学大学院自然科学研究科
梅津 律之 (Noriyuki Umetsu)

1 序文

論文 [2] にある "second singular support の外での V の陪特性葉に沿った wave front set の伝播定理" : u を b_q の近傍で定義された microfunction とする. そのとき,

$$2\text{-sing supp}_V(u) \cap b_q = \phi, \dot{q} \notin WF_{a,V}(u) \Rightarrow WF_{a,V}(u) \cap b_q = \phi.$$

ここで $b_q = (\{(x; 0, \xi'') \in V; x'' = \dot{x}'', \xi'' = t \dot{\xi}'' (t > 0)\})$ の $\dot{q} (= (\dot{x}; 0, \dot{\xi}'') \in V)$ を含む連結成分) とする: を参考にして, "正則パラメータに関する second analytic wave front set の伝播定理" を証明する.

記号

- M を $\mathbf{R}^n$ の開集合とし, 座標は $x = (x_1, \dots, x_n)$ とする. なお, $x' = (x_1, \dots, x_d), x'' = (x_{d+1}, \dots, x_n), x^\vee = (x_2, \dots, x_d), \tilde{x} = (x_2, \dots, x_n)$ とする.
- $X \subset \mathbf{C}^n$ を M の複素化とし, 座標は $w = (w_1, \dots, w_n) = (x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n) = x + iy$ とする. $w', w'', w^\vee, \tilde{w}$ は上と同様に定める.
- T^*M は M の余接ベクトル空間で, $\dot{T}^*M = T^*M \setminus M$
- T^*M の involutive submanifold V を $V := \{(x; \xi dx) \in \dot{T}^*M; \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_d = 0\}$ で定義する.
- $\xi'' = (\xi_{d+1}, \dots, \xi_n) \in \mathbf{R}^{n-d}$ とする.
- $\eta' = (\eta_1, \dots, \eta_d) \in \mathbf{R}^d$ として, $T_V T^*M$ の点を $(x; \xi'' dx''; \eta' \frac{\partial}{\partial \xi'})$ で表す. $\eta^\vee = (\eta_2, \dots, \eta_d)$ とする.
- $\dot{T}_V T^*M = T_V \dot{T}^*M \setminus V$.
- $B_{\mathbf{C}}(a, r) := \{w \in \mathbf{C}; |w - a| < r\}$.

2 FBI変換と Second analytic wave front set

Definition 2.1 (FBI変換) $u(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数とする. V に沿った u の第2FBI変換 $T_V^2 u(z; \lambda; \mu)$ を次で定義する:

$$T_V^2 u(z; \lambda; \mu) = \int u(x) \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - x'')^2 \right\} dx$$

以下, $z \in \mathbf{C}^n$ とし, $z' = (z_1, \dots, z_d), z'' = (z_{d+1}, \dots, z_n)$ とおく.

Remark 2.2 $K(\subset \mathbb{C}^n)$ を任意のコンパクト集合とする. このとき,
for $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$|T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| \leq C_\varepsilon \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + \varepsilon \lambda \right\}$$

$$(\lambda > 0, 0 < \mu < 1, z \in K)$$

Proof) $\tilde{K}(\supset \operatorname{supp} u)$ なる区分的に滑らかな境界を持つ有界積分領域 $\tilde{K}$ をとり, $\tilde{K}$ の近傍で,

$$u(x) = \sum_{j=1}^N F_j(x + i\Gamma_j 0)$$

$$F_j(w) \in \mathcal{O}(\tilde{K} + i\Gamma_j(\delta)) \quad j = 1, \dots, N$$

各 F_j は $\partial \tilde{K}$ に近傍に解析接続できる

ここで, $\Gamma_j(\delta) := \Gamma_j \cap \{y \in \mathbb{R}^n; |y_k| < \delta, k = 1, \dots, n\}$

となるように $u(x)$ の境界値表示を選び, 各楔 $\tilde{K} + i\Gamma_j(\delta)$ に対し, 積分路 γ_t^j を次のようにとる: 各 j に対して, 定ベクトル $y^j \in \Gamma_j(\delta)$ を 1 つ選んで固定する. また, $\psi: \tilde{K} \rightarrow [0, 1]: C^0$ 級を $\exists \rho > 0$ に対して,

$$\begin{cases} \psi(x) = 1, & \text{for } x \in \{x \in \tilde{K}; |x - \hat{x}| > \rho, \hat{x} \in \partial \tilde{K}\} \\ \psi(x) = 0, & \text{for } x \in \partial \tilde{K} \end{cases}$$

を満たすようにとって, $t\psi(x)y^j \in \Gamma_j(\delta)$ なる t に対して,

$$\gamma_t^j := \{(x + iy); x \in \tilde{K}, y = t\psi(x)y^j\}.$$

すると,

$$\begin{aligned} |T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| &= \left| \int u(x) \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - x'')^2 \right\} \right| \\ &= \left| \int_{\tilde{K}} u(x) \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - x'')^2 \right\} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \left| \int_{\gamma_t^j} F_j(w) \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - w'')^2 \right\} \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \sup_{w \in \gamma_t^j} |F_j(w)| \sup_{w \in \gamma_t^j} \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - w'')^2 \right\} \right| |\gamma_t^j| \end{aligned}$$

ここで, $|\gamma_t^j| = \int_{\gamma_t^j} 1|dw|$ とおく. このとき, $w \in \gamma_t^j$ で,

$$\begin{aligned} &\left| \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - w'')^2 \right\} \right| \\ &= \left| \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} (\operatorname{Im} z' - y')^2 + \frac{\lambda}{2} (\operatorname{Im} z'' - y'')^2 \right\} \right| \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (\operatorname{Re} z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2} (\operatorname{Re} z'' - x'')^2 \right\} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2} 2i(\operatorname{Re} z' - x')(\operatorname{Im} z' - y') + \frac{\mu}{2} 2i(\operatorname{Re} z'' - x'')(\operatorname{Im} z'' - y'') \right\} \right| \\
& \leq \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} (|y'|^2 + 2|y'| |\operatorname{Im} z'|) + \frac{\lambda}{2} (|y''|^2 + 2|y''| |\operatorname{Im} z''|) \right\} \\
& \leq \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} (|y|^2 + 2|y| |\operatorname{Im} z|) \right\} \\
& = \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} (2t\psi(x)|y^j| |\operatorname{Im} z| + t^2(\psi(x))^2 |y^j|^2) \right\} \\
& \leq \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} \exp \left\{ \lambda \left(tn\delta |\operatorname{Im} z| + \frac{t^2 n^2 \delta^2}{2} \right) \right\}.
\end{aligned}$$

また, $j = 1, \dots, N$ に対して,

$$\begin{aligned}
\sup_{w \in \gamma_t^j} |F_j(w)| &= \exists M(t) \\
|\gamma_t^j| &< \exists M' < +\infty \quad (t \in \{t; t\psi(x)y^j \in \Gamma_j(\delta)\})
\end{aligned}$$

なので,

$$\begin{aligned}
& |T_V^2 u(z; \lambda)| \\
& \leq \sum_{j=1}^N M' M(t) \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} \exp \left\{ \lambda \left(tn\delta |\operatorname{Im} z| + \frac{t^2 n^2 \delta^2}{2} \right) \right\} \\
& \leq \sum_{j=1}^N M' M(t) \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + t(AC + B)\lambda \right\} \\
& = NM' M(t) \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + t(AC + B)\lambda \right\}.
\end{aligned}$$

ここで, $A = n\delta, B = \frac{tn^2\delta^2}{2}, C = \sup_{z \in K} |\operatorname{Im} z|$ とする. このとき, $t < \frac{\varepsilon}{AC+B}$ なる t をとれば, $T_V^2 u(z; \lambda)$ の評価を得る. $\square$

Definition 2.3 (Second analytic wave front set) $u(x)$ をコンパクトな台を持つ超関数とし, $\mathring{p} = \left(\mathring{x}; \mathring{\xi}'' dx''; \mathring{\eta}' \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \in T_V T^* M$ とする.

このとき, $\mathring{p} \notin WF_{a,V}^2(u)$ とは,

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists \varepsilon, \exists r, \exists \mu_0 > 0, \exists f:]0, \mu_0[\rightarrow \mathbf{R} : \text{減少関数} \quad \text{s.t.}$$

$$|T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| \leq \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 - \varepsilon \mu \lambda \right\}$$

$$\left| z' - \left(\mathring{x}' - i \mathring{\eta}' \right) \right| < r, \left| z'' - \left(\mathring{x}'' - i \mathring{\xi}'' \right) \right| < r, \lambda > f(\mu)$$

$T_V T^* M$ の部分集合 $WF_{a,V}^2(u)$ は, V に沿った u の second analytic wave front set と呼ばれる.

3 正則パラメータを持つ超函数の特異性

ここでは, "正則パラメータを持つ超函数の第2FBI変換の評価" と "三円定理を使った補題" を挙げ, 主定理を証明する.

Proposition 3.1 $u(x)$ をコンパクトな台を持つ超函数とする. そのとき, u が $\overset{\circ}{x}$ の近傍で x_1 を正則パラメータに持つならば, 次を満たす正の数 δ, R が存在する:
for $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$|T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| \leq C_\varepsilon \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + \varepsilon \lambda \right\}$$

$$(|\operatorname{Im} z_1| < \delta, |\operatorname{Im} \tilde{z}| < R, |\operatorname{Re} z - \overset{\circ}{x}| < \delta, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

ここで, $z^\vee = (z_2, \dots, z_d), \tilde{z} = (z^\vee, z'')$ とする.

Proof) $\rho > 0$ に対し一般に,

$$\begin{cases} \Omega_\rho^1 := \{x_1 \in \mathbf{R}; |x_1 - \overset{\circ}{x}_1| < \rho\} \\ \tilde{\Omega}_\rho := \{\tilde{x} \in \mathbf{R}^{n-1}; |x_j - \overset{\circ}{x}_j| < \rho, j = 2, \dots, n\} \\ \Omega_\rho := \{x \in \mathbf{R}^n; |x_j - \overset{\circ}{x}_j| < \rho, j = 1, \dots, n\} \\ U_\rho^1 := \{w_1 \in \mathbf{C}; |w_1 - \overset{\circ}{x}_1| < \rho\} \end{cases}$$

とする. $u(x)$ が $\overset{\circ}{x}$ の近傍で x_1 を正則パラメータに持つので, 次を満たす正の数 ρ が存在する:

$$\exists \hat{u}(w_1, \tilde{x}) \in \mathcal{BO}(U_{3\rho}^1 \times \mathbf{R}^{n-1}) \text{ s.t.}$$

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \hat{u} \subset U_{3\rho}^1 \times \tilde{\Omega}_\rho \\ u(x) = \hat{u}(w_1, \tilde{x})|_{\{\operatorname{Im} w_1=0\}} \quad \text{on } \Omega_\rho. \end{cases}$$

このとき,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x) &:= \chi_{\Omega_\rho^1}(x_1) \times (\hat{u}(w_1, \tilde{x})|_{\{\operatorname{Im} w_1=0\}}) \\ &= \chi_{\Omega_\rho^1}(x_1) \times \hat{u}(x) \end{aligned}$$

と定める. 定義の仕方より,

$$\begin{cases} \operatorname{supp} \tilde{u} \subset \tilde{\Omega}_\rho \\ u = \tilde{u} \quad \text{on } \Omega_\rho \end{cases}$$

であることに注意. $T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)$ を評価しよう.

$$\begin{aligned} & T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu) \\ &= \int_{\mathbf{R}} \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z_1 - x_1)^2 \right\} \chi_{\Omega_\rho^1}(x_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \hat{u}(x_1, \tilde{x}) \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - x^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - x'')^2 \right\} d\tilde{x} \right) dx_1 \\
& = \int_{\mathbf{R}} \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z_1 - x_1)^2 \right\} \chi_{\Omega_\rho^1}(x_1) \\
& \quad \times \left[\left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} \hat{u}(w_1, \tilde{x}) \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - x^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - x'')^2 \right\} d\tilde{x} \right) \Big|_{\{\text{Im } w_1=0\}} \right] dx_1
\end{aligned}$$

このとき,

$$v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu) := \int_{\mathbf{R}^{n-1}} \hat{u}(w_1, \tilde{x}) \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - x^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - x'')^2 \right\} d\tilde{x}$$

とおく. v の特異スペクトルを評価すると, $\text{SS}(v) = \phi$ となる. 故に

$$v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu) \in \mathcal{O}(U_{3\rho}^1 \times \mathbf{C}^{n-1} \times \mathbf{C} \times \mathbf{C})$$

なので,

$$T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu) = \int_{\Omega_\rho^1} \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z_1 - x_1)^2 \right\} v(x_1, \tilde{z}; \lambda; \mu) dx_1$$

Cauchy の積分公式より,

$$= \int_{\tilde{\Omega}_{\tilde{\rho}}^{\circ}} \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z_1 - w_1)^2 \right\} v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu) dw_1$$

Step 1 まず, $w_1 \in U_\rho^1$ での $v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu)$ の評価を与える. $\hat{u}(w_1, \tilde{x})$ は次のような境界値表示をもつ:

$\forall \tilde{\Gamma}_1, \dots, \forall \tilde{\Gamma}_N \subset \mathbf{R}^{n-1}$: open convex cones s.t. $\text{Int}(\tilde{\Gamma}_1^\circ) \cup \dots \cup \text{Int}(\tilde{\Gamma}_N^\circ) = \mathbf{R}^{n-1}$

に対して, $\exists \delta > 0, \exists F_k(w) \in \mathcal{O}(U_{2\rho}^1 \times \tilde{\Omega}_{2\rho} + i\tilde{\Gamma}_k(\delta))$ ($k = 1, \dots, N$) s.t.

$$\hat{u}(w_1, \tilde{x}) = \sum_{k=1}^N F_k(w_1, \tilde{x} + i\tilde{\Gamma}_k 0)$$

ここで, $\tilde{\Gamma}_k(\delta) := \tilde{\Gamma}_k \cap \{\tilde{y} \in \mathbf{R}^{n-1}; |y_j| < \delta, j = 2, \dots, n\}$ である. さらに, $F_k(w)$ は $U_{2\rho}^1 \times (\tilde{\Omega}_{2\rho} \setminus \tilde{\Omega}_\rho)$ の近傍まで正則にのびる. 実際に, v を計算してみる.

$$v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu) = \sum_{k=1}^N \int_{\gamma_t^k} F_k(w_1, \tilde{w}) \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - w^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2 \right\} d\tilde{w}$$

ここで, γ_t^k は次のような積分路である: 各 k に対して, 定ベクトル $\tilde{y}^k \in \tilde{\Gamma}_k(\delta)$ を 1 つ選んで固定する. また, $\psi: \tilde{\Omega}_{\frac{3}{2}\rho} \rightarrow [0, 1]: C^0$ 級を

$$\begin{cases} \psi(\tilde{x}) = 1, & \text{for } \tilde{x} \in \tilde{\Omega}_\rho \\ \psi(\tilde{x}) = 0, & \text{for } \tilde{x} \in \partial\tilde{\Omega}_{\frac{3}{2}\rho} \end{cases}$$

を満たすようにとって, $t\psi(\tilde{x})\tilde{y}^k \in \tilde{\Gamma}_k(\delta)$ なる t に対して

$$\gamma_t^k := \{(\tilde{x} + i\tilde{y}); \tilde{x} \in \tilde{\Omega}_{\frac{3}{2}\rho}, \tilde{y} = t\psi(\tilde{x})\tilde{y}^k\}$$

とおく.すると,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\gamma_t^k} F_k(w) \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - w^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2 \right\} d\tilde{w} \right| \\ & \leq |\gamma_t^k| \sup_{\tilde{w} \in \gamma_t^k} |F_k(w)| \times \sup_{\tilde{w} \in \gamma_t^k} \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z^\vee - w^\vee)^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2 \right\} \right|. \end{aligned}$$

ここで, $|\gamma_t^k| = \int_{\gamma_t^k} 1 |d\tilde{w}|$ とおく. Remark 2.2 の $T_V^2 u(z; \lambda; \mu)$ の評価の証明と同様にして,

$$\begin{aligned} & \leq |\gamma_t^k| \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} \sup_{\tilde{w} \in \gamma_t^k} |F_k(w)| \\ & \quad \times \sup_{\tilde{w} \in \gamma_t^k} \exp \left\{ \frac{\lambda}{2} (t^2(n-1)^2\delta^2 + 2t(n-1)\delta |\operatorname{Im} \tilde{z}|) \right\} \end{aligned}$$

このとき, $w_1 \in U_\rho^1$ なので

$$\sup_{w_1 \in U_\rho^1} \sup_{\tilde{w} \in \gamma_t^k} |F_k(w_1, \tilde{w})| \leq \sup_{(w_1, \tilde{w}) \in U_\rho^1 \times \gamma_t^k} |F_k(w)| = {}^3M(t)$$

また, $t\psi(\tilde{x})\tilde{y}^k \in \tilde{\Gamma}_k(\delta)$ なる t に対して, $|\gamma_t^k| < {}^3M' < +\infty$ なので, あるコンパクト集合 $\tilde{K} (\subset \mathbb{C}^{n-1})$ に対して, $A = (n-1)\delta, B = \frac{t(n-1)^2\delta^2}{2}, C = \sup_{\tilde{z} \in \tilde{K}} |\operatorname{Im} \tilde{z}|$ とおくと,

$$\begin{aligned} & |v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu)| \\ & \leq NM'M(t) \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + t(AC + B)\lambda \right\} \end{aligned}$$

したがって, $\tilde{K}$ を $\mathbb{C}^{n-1}$ の任意のコンパクト集合とすると,

for $\forall \varepsilon > 0, \exists C_\varepsilon > 0$ s.t.

$$\begin{aligned} |v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu)| & \leq C_\varepsilon \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + \varepsilon\lambda \right\} \\ & (w_1 \in U_\rho^1, \tilde{z} \in \tilde{K}, \lambda > 0, 0 < \mu < 1) \end{aligned}$$

Step 2 $T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)$ の評価

$$T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu) = \int_{\overset{\circ}{x}_1 - \rho}^{\overset{\circ}{x}_1 + \rho} \exp \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z_1 - w_1)^2 \right\} v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu) dw_1$$

を $\{z_1; |\operatorname{Re} z_1 - \overset{\circ}{x}_1| < \frac{\rho}{4}, |\operatorname{Im} z_1| < \frac{\rho}{4}\}$ で評価してみる. $\overset{\circ}{x}_1 + \rho$ と $\overset{\circ}{x}_1 - \rho$ を結ぶ積分路を γ_{z_1} とし, 次のようにとる: $\varphi: \Omega_\rho^1 \rightarrow [0, 1]: C^0$ 級を

$$\begin{cases} \varphi(x_1) = 1, & \text{for } x_1 \in \Omega_{\frac{1}{2}\rho}^1 \\ \varphi(x_1) = 0, & \text{for } x_1 \in \partial\Omega_\rho^1 \end{cases}$$

を満たすようにとって

$$\gamma_{z_1} := \{(x_1 + iy_1); x_1 \in \overline{\Omega_\rho^1}, y_1 = \varphi(x_1) \operatorname{Im} z_1\}$$

すると

$$|T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)| \leq |\gamma_{z_1}| \sup_{w_1 \in \gamma_{z_1}} |v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu)| \sup_{w_1 \in \gamma_{z_1}} \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z_1 - w_1)^2 \right\} \right|$$

ここで, $|\gamma_{z_1}| = \int_{\gamma_{z_1}} 1 |dw_1|$ とおく. このとき, $x_1 \in \Omega_{\frac{1}{2}\rho}^1$ では, $y_1 = \text{Im } z_1$ なので

$$-\frac{\lambda \mu}{2} (\text{Re } z_1 - x_1)^2 + \frac{\lambda \mu}{2} (\text{Im } z_1 - y_1)^2 \leq 0$$

また, $x_1 \in \bar{\Omega}_\rho^1 \setminus \Omega_{\frac{1}{2}\rho}^1$ では, $|x_1 - \check{x}_1| \geq \frac{1}{2}\rho$ なので,

$$-\frac{\lambda \mu}{2} (\text{Re } z_1 - x_1)^2 + \frac{\lambda \mu}{2} (\text{Im } z_1 - y_1)^2 \leq -\frac{\lambda \mu}{2} \left(\frac{\rho}{4} \right)^2 + \frac{\lambda \mu}{2} \left(\frac{\rho}{4} \right)^2 = 0$$

したがって, ある $C' > 0$ に対して,

$$|T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)| \leq C' \sup_{w_1 \in \gamma_{z_1}} |v(w_1, \tilde{z}; \lambda; \mu)|$$

$\gamma_{z_1} \subset U_\rho^1$ なので, Step 1 より任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 次を満たす $C_\varepsilon' > 0$ が存在する:

$$|T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)| \leq C_\varepsilon' \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\text{Im } z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\text{Im } z''|^2 + \varepsilon \lambda \right\}$$

$$\left(|\text{Im } z_1| < \frac{\rho}{4}, |\text{Re } z_1 - \check{x}_1| < \frac{\rho}{4}, \tilde{z} \in \tilde{K}, \lambda > 0, 0 < \mu < 1 \right)$$

Step 3 $T_V^2(u - \tilde{u})(z; \lambda; \mu)$ の評価

$\tilde{u} = u - \tilde{u}$ とすると, $\tilde{u}$ はコンパクトな台を持つ超関数で, Ω_ρ 上で 0 である. $\tilde{u}(x)$ の境界値表示を

$$\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^N G_j(w), \quad G_j(w) \in \mathcal{O}(\mathbf{R}^n + i \check{\Gamma}_j^\vee 0)$$

とすると

$$\begin{aligned} T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu) &= \int_{\mathbf{R}^n} \tilde{u}(x) \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - x')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - x'')^2 \right\} dx \\ &= \sum_{j=1}^N \int_{\gamma^j} G_j(w) \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - w'')^2 \right\} dw \end{aligned}$$

ここで, 積分路 γ^j は $\exists \delta_1 (> 0)$ に対して,

$$\gamma^j = \{w \in \mathbf{C}^n; |w - x| < \delta_1, x \in \text{supp } \tilde{u}, y \in \check{\Gamma}_j^\vee\}$$

ととる. すると,

$$|T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)| \leq \sum_{j=1}^N |\gamma^j| \sup_{w \in \gamma^j} |G_j(w)| \sup_{w \in \gamma^j} \left| \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} (z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2} (z'' - w'')^2 \right\} \right|$$

ここで, $|\gamma^j| = \int_{\gamma^j} 1|dw|$ とおく. このとき,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left\{ -\frac{\lambda\mu}{2}(z' - w')^2 - \frac{\lambda}{2}(z'' - w'')^2 \right\} \\ = \frac{\lambda\mu}{2}\{(\operatorname{Im} z' - y')^2 - (\operatorname{Re} z' - x')^2\} + \frac{\lambda}{2}\{(\operatorname{Im} z'' - y'')^2 - (\operatorname{Re} z'' - x'')^2\} \end{aligned}$$

であり, $\exists R_1 > 0, \rho - 2\delta_1 > \exists \rho' > 0$ に対して, $|\operatorname{Im} z_1| < \rho', |\operatorname{Im} z^\vee| < R_1, |\operatorname{Re} z' - \overset{\circ}{x}'| < \delta_1$ で,

$$\begin{aligned} (\operatorname{Im} z' - y')^2 - (\operatorname{Re} z' - x')^2 &= (\operatorname{Im} z_1 - y_1)^2 + (\operatorname{Im} z^\vee - y^\vee)^2 - (\operatorname{Re} z' - x')^2 \\ &\leq (|\operatorname{Im} z_1| + |y_1|)^2 + (|\operatorname{Im} z^\vee| + |y^\vee|)^2 - (\operatorname{Re} z' - x')^2 \\ &\leq (\rho' + \delta_1)^2 + (|\operatorname{Im} z^\vee|^2 + 2R_1\delta_1 + \delta_1^2) - (\rho - 2\delta_1)^2 \\ &= |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \rho'^2 + \delta_1(2\rho' + 2R_1 + 2\delta_1) - (\rho - 2\delta_1)^2 \end{aligned}$$

δ_1 をうまくとれば,

$$\leq |\operatorname{Im} z^\vee|^2$$

同様にして, $|\operatorname{Im} z''| < R_2, |\operatorname{Re} z'' - \overset{\circ}{x}''| < \delta_2$ で

$$(\operatorname{Im} z'' - y'')^2 - (\operatorname{Re} z'' - x'')^2 \leq |\operatorname{Im} z''|^2$$

したがって, $\min\{R_1, R_2\} = R, \min\{\rho', \delta_1, \delta_2\} = \delta'$ とすれば, 次を満たす $C > 0$ が存在する:

$$|T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)| = C \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\}$$

$$(|\operatorname{Im} z_1| < \delta', |\operatorname{Im} \tilde{z}| < R, |\operatorname{Re} z - \overset{\circ}{x}| < \delta', \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

故に, $\min\{\delta', \frac{\rho}{4}\} = \delta$ とし, $\tilde{K}$ を適当に決めれば,

$$\begin{aligned} |T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| &\leq |T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)| + |T_V^2 \tilde{u}(z; \lambda; \mu)| \\ &\leq \{C + C_\varepsilon \exp(\varepsilon\lambda)\} \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} \\ &\leq (C + C_\varepsilon) \exp \left\{ \frac{\lambda\mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + \varepsilon\lambda \right\} \end{aligned}$$

$$(|\operatorname{Im} z_1| < \delta, |\operatorname{Im} \tilde{z}| < R, |\operatorname{Re} z - \overset{\circ}{x}| < \delta, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

□

Theorem 3.2 (Hadamard の三円定理) 函数 $f(w)$ が $\rho_1 < |w| < \rho_2$ ($0 \leq \rho_1 < \rho_2$) で正則なとき, $\rho_1 < r < \rho_2$ に対して,

$$M(r) = \sup_{|w|=r} |f(w)|$$

とすれば, $\log M(r)$ は $\log r$ の凸関数である. すなわち,
 $\rho_1 < r_1 < r < r_2 < \rho_2$ ならば,

$$\log M(r) \leq \frac{\log r_2 - \log r}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_1) + \frac{\log r - \log r_1}{\log r_2 - \log r_1} \log M(r_2)$$

が成り立つ.

Lemma 3.3 $\bar{D} = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C}; x^2 + \left(\frac{y}{3/5}\right)^2 \leq 1 \right\}$ とし, $f(z)$ を $\bar{D}$ の近傍で定義された正則関数とする.

$$A = \sup_{z \in \bar{D}} |F(z)|$$

$$B = \sup_{-4/5 \leq x \leq 4/5} |f(x)|$$

とおくと, 次の評価を得る:

$$|f(x + iy)| \leq \sqrt{AB} \quad \left(\left(\frac{x}{3\sqrt{2}/5} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}/5} \right)^2 \leq 1 \right)$$

Proof) $z = z(w) = \frac{2}{5} \left(w + \frac{1}{w} \right)$ とおくと, $1 < |w| < 2$ では, z は長軸 $[-1, 1]$, 短軸 $\left[-\frac{3}{5}i, \frac{3}{5}i\right]$ の楕円から $\left[-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right]$ をくりぬいたものを動く. $F(w) = f(z(w))$ とおくと,

$$\limsup_{|w| \rightarrow 2} |F(w)| \leq A$$

$$\limsup_{|w| \rightarrow 1} |F(w)| \leq B$$

なので, 三円定理により,

$$|F(w)| \leq \sqrt{AB} \quad (1 < |w| < \sqrt{2})$$

故に,

$$|f(x + iy)| \leq \sqrt{AB} \quad \left(\left(\frac{x}{3\sqrt{2}/5} \right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}/5} \right)^2 \leq 1 \right)$$

を得る. □

Theorem 3.4 (正則パラメータに関する second analytic wave front set の伝播定理)

$\dot{p} = \left(\dot{x}; \dot{\xi}'' dx''; \left(0, \dot{\eta}^\vee\right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \in \dot{T}_V^* M$, $I (\subset \mathbb{R})$ は $\dot{x}_1$ を含む开区間で, u はコンパクトな台を持つ超関数とすると $\dot{p} \notin WF_{a,V}^2(u)$ かつ u が $I \times (\dot{x}$ の近傍) で x_1 を正則パラメータに持つならば,

$$\left\{ \left(x_1, \dot{x}; \dot{\xi}'' dx''; \left(0, \dot{\eta}^\vee\right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right); x_1 \in I \right\} \cap WF_{a,V}^2(u) = \emptyset$$

が成り立つ.

Proof) $\overset{\circ}{x}_1$ を含む開区間 J で

$$J \times \left\{ \left(\overset{\circ}{x}; \overset{\circ}{\xi}'' dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}^\vee \right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \right\} \cap WF_{a,V}^2(u) = \phi$$

となるものの最大が存在するので、それを J_0 とする. $J_0 = I$ を示せばよい. $J_0 =]\alpha, \beta[$ において, J_0 は I に真に含まれるとすると,

$$\left(\alpha, \overset{\circ}{x}; \overset{\circ}{\xi}'' dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}^\vee \right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \in WF_{a,V}^2(u)$$

or

$$\left(\beta, \overset{\circ}{x}; \overset{\circ}{\xi}'' dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}^\vee \right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \in WF_{a,V}^2(u)$$

なので,

$$\left(\beta, \overset{\circ}{x}; \overset{\circ}{\xi}'' dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}^\vee \right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \in WF_{a,V}^2(u)$$

として, 背理法を適用する.

u が $I \times (\overset{\circ}{x}$ の近傍) で x_1 を正則パラメータに持つという仮定より, 次を満たす正の数 δ_1, R が存在する: $\forall L > 0, \exists C_L > 0$ s.t.

$$|T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| \leq C_\varepsilon \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 + \varepsilon \lambda \right\}$$

$$(|\operatorname{Im} z_1| < 2\delta_1, |\operatorname{Im} \tilde{z}| < R, |\operatorname{Re} z - (\beta, \overset{\circ}{x})| < 2\delta_1, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

$$\text{このとき, } \left\{ z_1; \left(\frac{\operatorname{Re} z_1 - \beta'}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z_1}{\frac{3\rho}{5}} \right)^2 \leq 1, \beta' = \beta - \frac{\sqrt{17}}{5}\rho \right\} \text{ が } \{ z_1; |\operatorname{Im} z_1| < 2\delta_1, \\$$

$|\operatorname{Re} z_1 - \beta| < 2\delta_1 \}$ に含まれるように $\rho (> 0)$ を選ぶと, $s \in \left[\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho \right]$ に対して, $s \in J_0$ なので,

$$\left(s, \overset{\circ}{x}; \overset{\circ}{\xi}'' dx''; \left(0, \overset{\circ}{\eta}^\vee \right) \frac{\partial}{\partial \xi'} \right) \notin WF_{a,V}^2(u)$$

$$\iff \exists \varepsilon_s, \exists \delta_s, \exists \mu_{0s} > 0, \exists f_s :]0, \mu_{0s}[\rightarrow \mathbf{R} : \text{減少関数} \quad \text{s.t.}$$

$$|T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| \leq \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 - \varepsilon_s \mu \lambda \right\}$$

$$\left(|z_1 - s| < 2\delta_s, \left| (z^\vee, z'') - \left(\left(\overset{\circ}{x}^\vee, \overset{\circ}{x}'' \right) - i \left(\overset{\circ}{\eta}^\vee, \overset{\circ}{\xi}'' \right) \right) \right| < 2\delta_s, f_s(\mu) < \lambda \right)$$

このとき, $\{B_C(s, \delta_s)\}_{s \in [\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho]}$ を見ると, $\left[\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho \right]$ がコンパクトなので, 有限部分被覆 $B_C(s_1, \delta_{s_1}), \dots, B_C(s_N, \delta_{s_N})$ でそれを覆うので,

$$\begin{cases} \min\{\delta_{s_1}, \dots, \delta_{s_N}\} = \delta_2 \\ \min\{\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_N}\} = \varepsilon \\ \min\{\mu_{0s_1}, \dots, \mu_{0s_N}\} = \mu_0 \\ \max_{j=1, \dots, N} f_{s_j}(\mu) = f(\mu) \end{cases}$$

とすると,

$$|T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| \leq \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 - \varepsilon \mu \lambda \right\}$$

今, $\left(z_1 \in \left[\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho \right], \left| (z^\vee, z'') - \left(\left(x^\vee, x'' \right) - i \left(\eta^\vee, \xi'' \right) \right) \right| < 2\delta_2, f(\mu) < \lambda \right)$

$$\Phi_{\bar{z}}(z_1; \lambda; \mu) = \exp \left\{ -\frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 - \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 \right\} T_V^2 u(z; \lambda; \mu)$$

というものを考えて, $\min \{\delta_1, \delta_2\} = \delta$ とすると,

$$|\Phi_{\bar{z}}(z_1; \lambda; \mu)| \leq \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z_1|^2 - \varepsilon \mu \lambda \right\}$$

また, $\left(z_1 \in \left[\beta' - \frac{4}{5}\rho, \beta' + \frac{4}{5}\rho \right], \left| (z^\vee, z'') - \left(\left(x^\vee, x'' \right) - i \left(\eta^\vee, \xi'' \right) \right) \right| < 2\delta, f(\mu) < \lambda \right)$

$$|\Phi_{\bar{z}}(z_1; \lambda; \mu)| \leq C_L \exp(L\lambda)$$

$$(|\operatorname{Im} z_1| < 2\delta, |\operatorname{Im} \bar{z}| < R, |\operatorname{Re} z - (\beta, \hat{x})| < 2\delta, \lambda > 0, 0 < \mu < 1)$$

ここで, Lemma 3.3 を長軸 $[\beta' - \rho, \beta' + \rho]$, 短軸 $[\beta' - \frac{3}{5}\rho i, \beta' + \frac{3}{5}\rho i]$ の楕円に適用すると,

$$|\Phi_{\bar{z}}(z_1; \lambda; \mu)| \leq \sqrt{C_L} \exp \left(-\frac{-L + \varepsilon \mu}{2} \lambda \right) \quad (1)$$

$$\left(\left(\frac{\operatorname{Re} z_1 - \beta'}{(3\sqrt{2/5})\rho} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z_1}{(\sqrt{2/5})\rho} \right)^2 \leq 1, \left| (z^\vee, z'') - \left(\left(x^\vee, x'' \right) - i \left(\eta^\vee, \xi'' \right) \right) \right| < 2\delta, f(\mu) < \lambda \right)$$

L は任意なので, $L = \frac{1}{4}\varepsilon\mu$ とおくと,

$$(1) \text{ の右辺 } = \sqrt{C_{\frac{1}{4}\varepsilon\mu}} \exp \left(-\frac{3}{8}\varepsilon\mu\lambda \right)$$

このとき,

$$g(\mu) = \frac{4}{\varepsilon\mu} \log C_{\frac{1}{4}\varepsilon\mu}$$

とおくと, $g(\mu)$ は減少関数であり, $\lambda > g(\mu)$ で

$$\sqrt{C_{\frac{1}{4}\varepsilon\mu}} \exp \left(-\frac{3}{8}\varepsilon\mu\lambda \right) < \exp \left(-\frac{1}{4}\varepsilon\mu\lambda \right)$$

したがって, $\tilde{f}(\mu) = \max \{f(\mu), g(\mu)\}$, $\varepsilon' = \frac{1}{4}\varepsilon$ とおくと,

$$\begin{aligned} |T_V^2 u(z; \lambda; \mu)| &\leq \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z^\vee|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 - \varepsilon' \mu \lambda \right\} \\ &\leq \exp \left\{ \frac{\lambda \mu}{2} |\operatorname{Im} z'|^2 + \frac{\lambda}{2} |\operatorname{Im} z''|^2 - \varepsilon' \mu \lambda \right\} \end{aligned}$$

$$\left(\left(\frac{\operatorname{Re} z_1 - \beta'}{(3\sqrt{2/5})\rho} \right)^2 + \left(\frac{\operatorname{Im} z_1}{(\sqrt{2/5})\rho} \right)^2 \leq 1, \left| (z^\vee, z'') - \left(\left(x^\vee, x'' \right) - i \left(\eta^\vee, \xi'' \right) \right) \right| < 2\nu, \tilde{f}(\mu) < \lambda \right)$$

故に, $\beta \in J_0$ となって矛盾.

□

参考文献

- [1] 金子 晃
超函数入門上, 東京大学出版会 (1980)
- [2] 岡田 靖則
Second microlocal singularities of tempered and Gevrey classes, J.Fac.Sci.Univ.Tokyo.
Vol.39.No.3.pp.475-505(1992)
- [3] 岡田 靖則, 戸瀬 信之
FBI transformation and second microlocalization -Equivalence between second analytic
wave front sets and second singular spectrums, J. Math. Pures. Appl. Vol.70.pp.427-
453(1991)
- [4] J.M.Bony
Propagation des singularités différentiables pour une classe d'opérateurs différentiels à
coefficients analytiques, Astérisque. Vol.34-35.Soc.Math.de.France. pp.43-92(1976)