

特異点の解消と Igusa local zeta-functions

筑波大 数学系 木村達雄 (Tatsuo KIMURA)

$K = p\text{-adic field} \supset O_K \supset \pi O_K$, $\mathbb{F}_q = O_K / \pi O_K$
($q = \text{odd}$, π は仮定する), $U_K = O_K - \pi O_K$: units, として
 $|\cdot|_K$ で K の絶対値で $|\pi|_K = q^{-1}$ となるものを表わす.
($\Rightarrow O_K = \{x \in K; |x|_K \leq 1\}$, $\pi O_K = \{x \in K; |x|_K < 1\}$,
 $U_K = \{x \in K; |x|_K = 1\}$)
 dx : K^n 上の Haar measure で $\text{vol}(O_K^n) = \int_{O_K^n} dx = 1$
なるものとする。

$f(x) \in O_K[x_1, \dots, x_n]$ に対して,

$Z(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx$ を考えると, これは

$t = q^{-s}$ の有理関数になることが知られている (J. Igusa).

J.P. Serre により, $Z(s)$ は Igusa local zeta function

と名付けられた。本論の目的は与えられた $f(x)$ に

対し $Z(s) = \int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx$ の計算法を考えることである。

一番簡単な例は次のように直接計算できる。

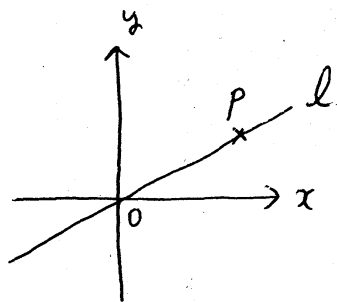
$$\text{Proposition 1. } \int_{O_K} |x|_K^s dx = \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-(s+1)}} \left(= \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-1}t} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{Proof) } \int_{O_K} |x|_K^s dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\pi^k U_K} |x|_K^s dx = \sum_{k=0}^{\infty} q^{-k(s+1)} \int_{U_K} dx \\ &= \frac{1-q^{-1}}{1-q^{-(s+1)}} \quad (d(\pi^k x) = q^{-k} dx, \text{ vol}(U_K) = 1-q^{-1}) // \end{aligned}$$

我々の基本的な考えは特異点の解消 (resolution of singularity of $\{f=0\}$) を用いて、一般の $Z(s)$ の計算を Prop. 1 へ帰着させよう というものである。

そこで blowing up とは何か を簡単に復習してみよう。

$n=2$ の場合, $A^2 = \{(x, y)\}$ の原点 $\{(0, 0)\}$ に



関する blowing up とは,

原点を通る直線 l と, l 上の点 P の組 (P, l) 全体を考えることである。 $\{(P, l)\}$.

$P \neq 0$ なら, l は原点 0 と P を結ぶ直線として unique に定まるから $\{(P, l); P \neq 0\} \cong A^2 - \{(0, 0)\}$

であるが, $P=0 (= (0, 0))$ のところでは l は自由,

即ち $\{l: tx - uy = 0\} = \{(t: u)\} = \mathbb{P}^1$ となり

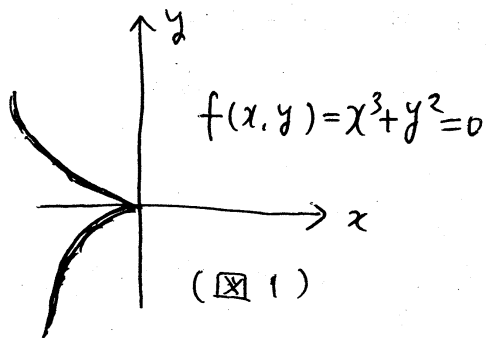
blowing up $\{(P, l)\}$ は原点 $(0, 0)$ のかわりに $\mathbb{P}^1$ を入れ

そのようなもの (即ち原点 0 を P' にぶくろましたもの) である。

$\{(P, \ell)\}$ に於て $\ell \neq \{x=0\}$ ($\Rightarrow u \neq 0$; $y = \frac{t}{u}x$) のところで考えると, ℓ は $y = \frac{t}{u}x$ と表わされ, ℓ 上の点 P は, x 座標で *unique* に定まるから, そこで局所座標として $(x, \frac{t}{u})$ をとることができる。

そこで $\lambda = x$, $\frac{t}{u} = y'$ とおくと, そこでは

$(x, y) = (\lambda, \lambda y')$ となっている。



例として *cusp* の場合,

即ち $f(x, y) = x^3 + y^2 = 0$

を考えてみよう。これは

原点のみ *singularity* を

もっている ($f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$

$= 0 \Rightarrow (x_0, y_0) = (0, 0)$) が 原点を *blowing up*

した $\{(P, \ell)\}$ の $\ell \neq \{x=0\}$ なる部分の局所座標 (λ, y') でみると

$$f(x, y) = x^3 + y^2 = \lambda^3 + (\lambda y')^2 = \lambda^2(\lambda + y'^2)$$

$= 0$ とおき, $f = 0$ の *singularity* は

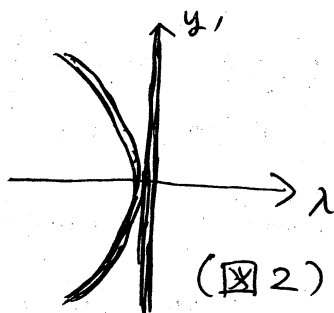


図1 に比べて, 図2 のように

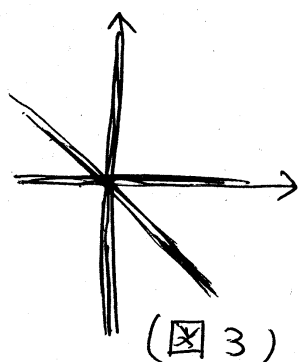
弱まっている。 ($\ell \neq \{y=0\}$

の所では局所座標として

(μ, x') 但し $(x, y) = (\mu x', \mu)$

もとることかできて $f(x, y) = \mu^2(\mu x'^3 + 1) = 0$
 となり, $\mu=0$ も $\mu x'^3 + 1 = 0$ も nonsingular になる)

更に blowing up すると 図 2 は 図 3 のように
 なる. もう 1 回 更に blowing up すると



$\Rightarrow$

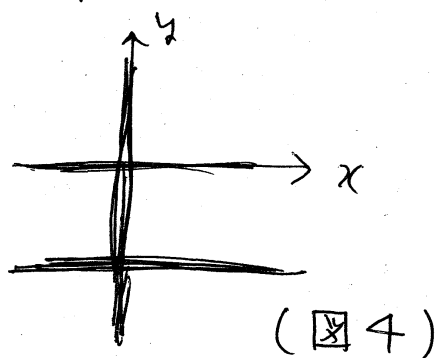


図 4 のようになり $f=0$ の既約成分が
 Transversal に交わる (その tangent が 1 次独立)
 ことがわかる.

一般のときも原点の x_i に関する blowing up
 は $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) = (\lambda x'_1, \dots, \lambda x'_i, \lambda, \lambda x'_{i+1}, \dots, \lambda x'_n)$
 により $(x'_1, \dots, x'_i, \lambda, x'_{i+1}, \dots, x'_n)$ なる局所座標で考
 えることに相当する. blowing up に無関係の変数が入
 っていることもある.

一般に 次の embedded resolution (of singularity
 of $\{f=0\}$) (by H. Hironaka 1964) が知られている.

K 上定義された nonsingular absolutely irreducible
 variety Y と K 上定義された regular map h

$h: Y \rightarrow \mathbb{A}^n$ で 次の3条件をみたすものがある。

- (1) $Y - \{f \circ h = 0\} \cong \mathbb{A}^n - \{f = 0\}$ biregular
- (2) h は (K 上定義された nonsingular center をつ) blowing up の有限回の合成である。
- (3) $\{f \circ h = 0\} = \bigcup_{i \in T} C_i$, $C_i = K$ -irreducible かつ nonsingular で, $\{f \circ h = 0\}$ のところで の交わりは すべて transversal である。

このとき, $(f \circ h) = \sum_{i \in T} N_i C_i$, $(h^* dx) = \sum_{i \in T} (N_i + 1) C_i$ とおく ($()$ は divisor を表す, local にいえば $C_i = \{y_i = 0\}$ とするとき, これは $f \circ h = y_1^{N_1} \cdots y_t^{N_t}$ ($T = \{1, \dots, t\}$), $h^* dx = y_1^{N_1+1} \cdots y_t^{N_t+1} dy_1 \cdots dy_t \cdots dy_n$, という感じである)

$f(x, y) = x^3 + y^2$ の例 でいえば 次のようにする。

$$\begin{array}{ccccccc}
 Y & = & W_1 & \cup & W_2 & \cup & W_3 & \cup & W_4 \\
 & & \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 & & \{\xi_1, \eta_1\} & & \{\xi_2, \eta_2\} & & \{\xi_3, \eta_3\} & & \{x_3, y_3\} \\
 \downarrow h & & & & & & & & \\
 \mathbb{A}^2 & \ni & (x, y) = (\xi_1, \eta_1, \xi_1) = (\xi_2, \xi_2^2 \eta_2) = (\xi_3^2 \eta_3, \xi_3^3 \eta_3^2) = (x_3^2 y_3, x_3^3 y_3)
 \end{array}$$

$$h^* dx = -\xi_1 d\xi_1 d\eta_1 = \xi_2^2 d\xi_2 d\eta_2 = \xi_3^4 \eta_3^2 d\xi_3 d\eta_3 = -x_3^4 y_3 dx_3 dy_3$$

$$f \circ h = \xi_1^2(1 + \xi_1 \eta_1^3) = \xi_2^3(1 + \xi_2 \eta_2^2) = \xi_3^6 \eta_3^3(1 + \eta_3) = \chi_3^6 y_3^2(1 + y_3)$$

$\downarrow h$

$$f = x^3 + y^2$$

$$\{f \circ h = 0\} = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \quad \text{と な っ て あ り}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \{\xi_1 = 0\} = \{y_3 = 0\} \\ C_2 &= \{\xi_2 = 0\} = \{\eta_3 = 0\} \\ C_3 &= \{\xi_3 = 0\} = \{x_3 = 0\} \\ C_4 &= \{\eta_3 = -1\} = \{y_3 = -1\} \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} (N_1, \nu_1) = (2, 2) \\ (N_2, \nu_2) = (3, 3) \\ (N_3, \nu_3) = (6, 5) \\ (N_4, \nu_4) = (1, 1) \end{array} \right)$$

$$\{1 + \xi_1 \eta_1^3 = 0\} = C_2 \cup C_3 \cup C_4, \quad \{1 + \xi_2 \eta_2^2 = 0\} = C_3 \cup C_4$$

である (容易に check できる!)

ここで Denef の結果を一つ紹介する。

$\gamma(O_K)$ を $\text{mod } \pi O_K$ で考え $\gamma(\mathbb{F}_q)$ 上で考えたものを $\overline{\gamma}$ をつけて表わす。

(仮定) $\overline{C_i} (i \in T)$ も $\mathbb{F}_q$ -irreducible, nonsingular で Transversal に交わる。

(注: この仮定をみたさぬ例はいくらでもある。数体 K から出発すれば, 有限個の finite place p を除いてこの仮定がみたされるが, 我々は p -adic field から出発しているので, これをちゃんと仮定しなければならぬ)

このとき, 各 $\overline{C_i}$ に対し 関数 $C_i(s)$ を

$$C_i(s) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(q-1)q^{-N_i s - \nu_i}}{1 - q^{-N_i s - \nu_i}} \quad \text{と おき } T \text{ の subset } I$$

$$\text{に 対して, } Z_I(s) \stackrel{\text{def}}{=} q^{-n} \prod_{i \in I} C_i(s) \quad \text{と おく.}$$

Theorem (Denef) 2. $\bar{a} \in \gamma(\mathbb{F}_q)$ に 対し T の subset $I(\bar{a})$ を $I(\bar{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \{i \in T; \bar{a} \in \bar{C}_i\}$ と 定め

$$Z_{\bar{a}}(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\substack{y \in \gamma(O_k) \\ y \equiv \bar{a} \pmod{\pi}}} |f \circ h|^s |h^* dx| \quad \text{と おく と}$$

$$Z_{\bar{a}}(s) = Z_{I(\bar{a})}(s) \text{ が 成り立つ. } Z(s) = \sum_{\bar{a} \in \gamma(\mathbb{F}_q)} Z_{\bar{a}}(s)$$

$$\text{ゆえ, } Z(s) = \sum_{I \subset T} C_I Z_I(s) \quad \text{但し}$$

$$C_I = \# \{ \bar{a} \in \gamma(\mathbb{F}_q); \bar{a} \in \bigcap_{i \in I} \bar{C}_i, \bar{a} \notin \bigcup_{j \notin I} \bar{C}_j \}$$

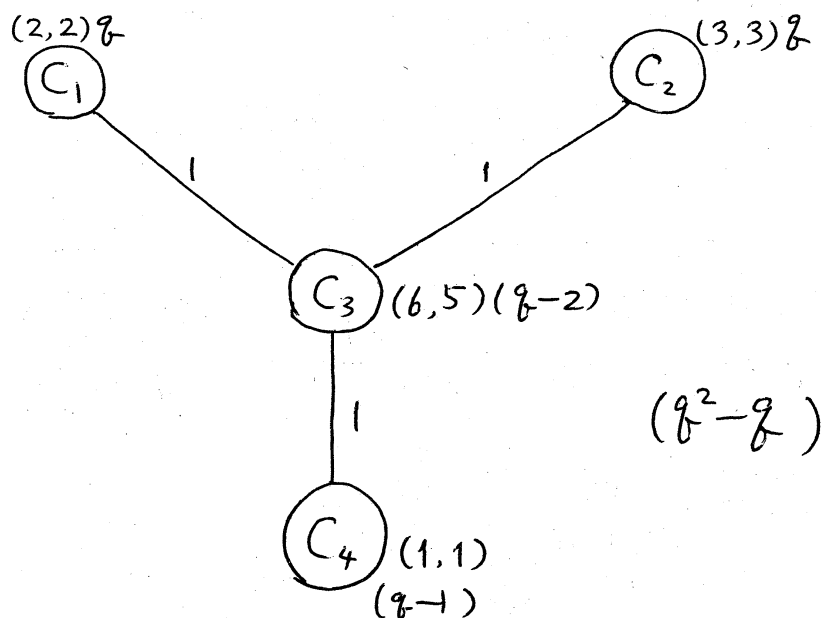
この定理により 6頁の仮定が満たされる $f \in O_k[x_1, \dots, x_n]$ の Igusa local zeta function $Z(s)$ を知るには, 次の Nerve complex with data が重要になる.

$\bar{C}_i$ ($i \in T$) による Nerve complex とは

$$\{\bar{C}_{i_1}, \dots, \bar{C}_{i_p}\} = p\text{-simplex} \Leftrightarrow \bar{C}_{i_1} \cap \dots \cap \bar{C}_{i_p} \neq \emptyset$$

で, 各 p -simplex に 対し data C_I ($I = \{i_1, \dots, i_p\}$) を attach させる. 特に 各 $\bar{C}_i$ に 対しては data (N_i, ν_i) も attach させる. 全体 には $C_\emptyset$ も attach させる.

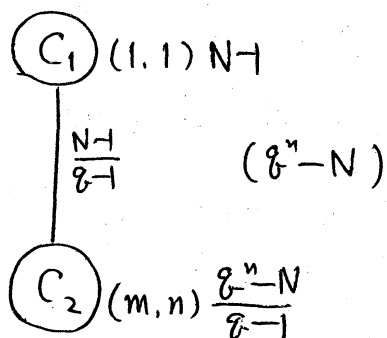
例 134 には $f(x_1, x_2) = x_1^3 + x_2^2$ の Nerve complex with data は



$$Z(s) = q^{-2} \sum_{I \subset \{1, \dots, 4\}} C_I \prod_{i \in I} C_i(s)$$

$$= \frac{(1 - q^{-1}) \{ 1 - q^{-(s+2)} (1 - q^{-s}) - q^{-5(s+1)} \}}{(1 - q^{-(s+1)}) (1 - q^{-(6s+5)})} \quad \text{とある.}$$

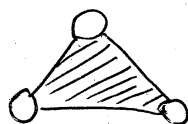
(もう1つの例.) $f(x_1, \dots, x_n) = m$ 次 homogeneous で
 $df(x) \neq 0$ for $\forall x \neq 0$ (i.e. 原点以外の singularity をもたない)
 $N \stackrel{\text{def}}{=} \# \{ \xi \in \mathbb{F}_q^n ; f(\xi) = 0 \}$ とおくと,



$$Z(t) = \frac{(1 - q^{-n}N)(1-t) + (1 - q^{-1})(1 - q^{-n})t}{(1 - q^{-1}t)(1 - q^{-n}t^m)} \quad (t = q^{-s})$$

この二つの例は diagram で表わせるが、一般には complex
ゆえ 平面に書けない。

$$f(x) = \det X \quad (X = 3\text{次行列}) \Rightarrow$$



etc.

我々は $K = p\text{-adic field}$ を与えて、そこから出発して
いるから $f \in O_K[x_1, \dots, x_n]$ の Igusa local zeta 関数
を計算しようとするとき 6頁の(仮定)が満たされないと
Denef の結果は使えないので不便である。

(Denef は 6頁の(仮定)が満たされる $f = \text{homog.}$
of degree d に対しては $Z(s) = \frac{P(T)}{Q(T)}$ ($T = q^{-s}$,
 P, Q は T の多項式) に対し $\deg_T Z(s) \stackrel{\text{def}}{=} \deg P - \deg Q$
が $-d$ に等しい という Igusa conjecture を証明した
が そのときに 7頁の結果(FR)を使ったのである。井草生生
によると 予想の証明よりも、むしろこの FR により Nerve complex
で記述されるという発見(これは Denef では無く井草生生が気付か
れた)の方が重要とのこと)

そこで、実際の計算で役に立つ公式をみつ
けるため まず 次のことを示す。

Lemma 3. $O_K^n - \{0\} \cong D'_1 \sqcup \dots \sqcup D'_n$ (disjoint union)

$$D'_i = \{ (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in O_K^n ; (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}) \in \pi O_K^{i-1}, \lambda_i \neq 0 \} (i=1, \dots, n).$$

Proof. $O_K^n - \{0\} \ni x = (x_1, \dots, x_n)$ に對して $\exists i$ s.t. $\min\{\text{ord } x_1, \dots, \text{ord } x_n\} = \text{ord } x_i (\neq \text{ord } x_j \text{ for } \forall j < i)$ のとき, $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = (\lambda_i x_1^{(i)}, \dots, \lambda_i x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, \lambda_i x_{i+1}^{(i)}, \dots, \lambda_i x_n^{(i)})$ の關係で $(x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)})$ を定めると $(x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in D'_i$. 逆に D'_i の $\forall$ 元 に對し, 上の關係で $(x_1, \dots, x_n)$ を定めると $\min\{\text{ord } x_1, \dots, \text{ord } x_n\} = \text{ord } x_i (\neq \text{ord } x_j \text{ for } \forall j < i)$. (但し $\text{ord } 0 = +\infty$) //

公式 4. $D_i = \{ (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, x_{i+1}^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}) \in O_K^m ; (x_1^{(i)}, \dots, x_{i-1}^{(i)}) \in \pi O_K^{i-1} \}$ とおくと,

$$\int_{O_K^n} |f(x)|_K^s dx = \sum_{i=1}^m \int_{D_i \times O_K^{n-m}} |f(\lambda_i x_1^{(i)}, \dots, \lambda_i x_{i-1}^{(i)}, \lambda_i, \lambda_i x_{i+1}^{(i)}, \dots, \lambda_i x_m^{(i)}, x_{m+1}, \dots, x_n)|_K^s \lambda_i^{m-1} d\lambda_i dx_1^{(i)} \dots dx_m^{(i)} dx_{m+1} \dots dx_n$$

Proof. $\int_{O_K^n} = \int_{O_K^n - \{0\}} + \int_{\{0\}} = \int_{O_K^n - \{0\}} = \int_{D'_1 \sqcup \dots \sqcup D'_n} = \sum_{i=1}^n \int_{D'_i \times O_K^{n-i}}$

Lemma 3 より //

例 $Z_n(s) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{M_n(O_K)} |\det X|^s \cdot dX = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^{-i}}{1 - q^{-(s+i)}}$

n に関する帰納法で示す。 $n=1$ のときは Prop 1 により正しい。 n 行に関して blowing up する。

$$Z_n(s) = \sum_{i=1}^n \int_{D_i \times O_K^{n^2-n}} \left| \det \begin{pmatrix} \lambda x'_{i1}, \dots, \lambda, \dots, \lambda x'_{in} \\ x_{21}, \dots, x_{2i}, \dots, x_{2n} \\ \vdots \\ x_{n1}, \dots, x_{ni}, \dots, x_{nn} \end{pmatrix} \right|_K^s \lambda^{n-1} d\lambda dx'_{i1} \dots dx_{nn}$$

$$= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{x'_{i1}, \dots, x'_{i,i-1} \in \pi O_K \\ \lambda, x_{k\ell} \in O_K}} \left| \lambda^s \right|_K \cdot \left| \det \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ x_{21} & \dots & 0 & \dots & x_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & 0 & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \right|_K^s \lambda^{n-1} d\lambda dx'_{i1} \dots dx_{nn}$$

(変数変換 えてゐる!)

$$= \sum_{i=1}^n q^{-(i-1)} \int_{O_K} |\lambda|_K^{s+n-1} d\lambda \cdot Z_{n-1}(s)$$

$$= \left(\frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-1}} \right) \left(\frac{1 - q^{-1}}{1 - q^{-(s+n)}} \right) Z_{n-1}(s) = Z_{n-1}(s) \cdot \frac{1 - q^{-n}}{1 - q^{-(s+n)}}$$

$$\Rightarrow Z_n(s) = \prod_{i=1}^n \frac{1 - q^{-i}}{1 - q^{-(s+i)}} \quad //$$

原点に $f=0$ の singularity があるときは 公式 4 を何回かくり返せば, 原点で nonsingular な場合の計算に

帰着する。原点以外の singularity についても 公式 4 の考
え方でやればよい。 $f(x)$ が weighted homogeneous ならば
公式 4 (または それを modify したものを) をくり返すと積分は

$$\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx \quad \text{の形に帰着する。}$$

但し $C_i = \{f_i = 0\}$ は K -irreducible, nonsingular
で C_i ($i \in T = \{1, \dots, t\}$) は transversal に交わる。

ここで $\text{mod } \pi$ による reduction $\overline{C}_i$ ($i \in T$) たちは
もはや同じ条件をみたすとは限らない。

例えば $f_1(x) = x_1$, $f_2(x) = x_1 - \pi$, $f_3(x) = x_1 + \pi y - x_2^2$
とすると $C_i = \{f_i = 0\}$ ($i = 1, 2, 3$) は 既約, nonsingular
で transversal に交わるが $\overline{C}_1 = \overline{C}_2 = \{\overline{x}_1 = 0\}$, $\overline{C}_3 =$
 $\{\overline{x}_1 - \overline{x}_2^2 = 0\}$ となり条件がくずれる。Th 2 の特殊な場合
として次の公理を得る。証明簡単ゆえとておく。

公式 5 (Denef) $\overline{C}_i = \{\overline{f}_i = 0\}$ ($i \in T$) たちも
~~irreducible~~ irreducible, nonsingular で C_i は transversal に
交わる と仮定する。

$$\Rightarrow \int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \sum_{I \subset T} C_I \prod_{i \in I} \frac{(q-1) q^{-N_i s - 1}}{1 - q^{-N_i s - 1}}$$

但し $C_I = \# \{ \overline{a} \in \mathbb{F}_q^n ; \overline{a} \in \bigcap_{i \in I} \overline{C}_i, \overline{a} \notin \bigcup_{j \notin I} \overline{C}_j \}$

証明)
$$\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = \sum_{\bar{z} \in \mathbb{F}_q^n} \int_{\bar{z} + \pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx$$

今 $\bar{z} \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i} = \overline{C_{i_1}} \cap \cdots \cap \overline{C_{i_k}}$, $\bar{z} \notin \bigcup_{j \notin I} \overline{C_j}$

$$\Rightarrow \int_{\bar{z} + \pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \int_{O_K^n} |f_1(\bar{z} + \pi x)^{N_1} \cdots f_t(\bar{z} + \pi x)^{N_t}|^s dx \quad (*)$$

一般に $f_j(\bar{z} + \pi x) = f_j(\bar{z}) + \pi(\cdots)$ と表わせるから

$\bar{z} \notin \overline{C_j} \Rightarrow f_j(\bar{z}) \in U_K \Rightarrow |f_j(\bar{z} + \pi x)| = 1 \text{ for } \forall x$

$$\Rightarrow (*) = q^{-n} \int_{O_K^n} \left| \prod_{i \in I} f_i(\bar{z} + \pi x)^{N_i} \right|^s dx \quad (**)$$

$\bar{z} \in \overline{C_i} \Rightarrow f_i(\bar{z}) = \pi u_i \ (u_i \in O_K)$ と表わせる.

nonsingular という仮定により, 例えは $\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}) \neq 0$ と

すると $f_i(\bar{z} + \pi x) = \pi u_i + \pi \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\bar{z}) \cdot x_j + \pi^2(\cdots)$

$$= \left[x_1 \underbrace{\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(\bar{z}) + \pi(\cdots) \right)}_{\text{unit}} + (x_1 \text{ に無関係な項}) \right] \pi$$

と表わせる. $x_1' = \frac{1}{\pi} f_i(\bar{z} + \pi x) \leftrightarrow x_1$ による変換
 $x_j' = x_j \ (\forall j \neq 1)$

は $O_K^n \leftrightarrow O_K^n$ の bijection τ^n $dx' = dx$ である.

$\overline{f_i}$ ($i \in I$) が $\overline{\xi}$ で transversal に交わる とうう

仮定から $O_K^n \leftrightarrow O_K^n$ bijection

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\text{s.t. } \frac{1}{\pi} f_i(\xi + \pi x) = y_1, \dots, \frac{1}{\pi} f_{i_k}(\xi + \pi x) = y_k$$

$$dx = dy$$

となるものが存在する.

$$\Rightarrow (**) = q^{-n} \int_{O_K^n} \left| \prod_{i \in I} (\pi y_i)^{N_i s} \right| dy$$

$$= q^{-n} \prod_{i \in I} \int_{O_K} (\pi y_i)^{N_i s} dy_i = q^{-n} \prod_{i \in I} \frac{(q-1) q^{-N_i s-1}}{1 - q^{-N_i s-1}}$$

$$\text{Rpt } \overline{\xi} \in \bigcap_{i \in I} \overline{C_i}, \quad \overline{\xi} \notin \bigcup_{j \notin I} \overline{C_j}$$

$$\Rightarrow \int_{\overline{\xi} + \pi O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx = q^{-n} \prod_{i \in I} \frac{(q-1)^{N_i s-1}}{1 - q^{-N_i s-1}}$$

公決5

さて 公式5 は $\overline{C}_i$ ($i \in I$) たちが nonsingular で
transversal に交わる (そして既約) の場合 だが,
一般の場合の

$$\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx, \text{ 但し } C_i = \{f_i = 0\} \text{ は}$$

K -irreducible, nonsingular で transversal に交わる,

は どうか? 結論を先にいうと

$$\int_{O_K^n} |f(x)|^s dx = \sum_{\bar{x} \in \mathbb{F}_q^m} \int_{(\bar{x} + \pi O_K^m) \times O_K^{n-m}} |f(x)|^s dx \quad (m \leq n)$$

という公式を有限回 使って 公式5 の場合 に 帰着
させることができる。その証明をするために いくつか
の概念を導入する。(これは講演では 述べなかった部分)

$$A \stackrel{\text{def}}{=} O_K[x_1, \dots, x_n] - \pi O_K[x_1, \dots, x_n]$$

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup \{f \in A; \{f=0\} \text{ は nonsingular} \},$$

$$\xi \in O_K^n \text{ に対して 二つの map } R_\xi: A \rightarrow A \text{ と}$$

(reduction)

$$L_\xi: A \rightarrow A \text{ を 次のように 定義する。}$$

(lifting)

$$f \in A \text{ に対して } f(\xi + \pi x) = \pi^r \cdot (R_\xi f)(x)$$

(但し r は $R_\xi f \in A$ という条件で *unique* に定まる)

により $R_\xi f \in A$ を定める。

$$\text{一方 } f \in A \text{ に対して } \pi^{s'} f\left(\frac{x-\xi}{\pi}\right) = (L_\xi f)(x)$$

(s' は $L_\xi f \in A$ という条件で *unique* に定まる)

により $L_\xi f$ を定める。次の事は容易にわかる。

命題 6 : $R_\xi : A \rightarrow A$ 及び $L_\xi : A \rightarrow A$ は共に
bijection で $R_\xi L_\xi = L_\xi R_\xi = \text{id}_A$

$$\text{さて } \int_{O_K^n} |f(x)|^s dx = \sum_{\bar{\xi} \in \mathbb{F}_q^n} \int_{\xi + \pi O_K^n} |f(x)|^s dx \text{ に対して}$$

$$\int_{\xi + \pi O_K^n} |f(x)|^s dx = q^{-n} \int_{O_K^n} |f(\xi + \pi x)|^s dx = q^{-rs-n} \int_{O_K^n} |R_\xi f(x)|^s dx$$

$$\text{ゆえ } \int_{O_K^n} |f(x)|^s dx \text{ の計算は } \int_{O_K^n} |R_\xi f(x)|^s dx \text{ } (\bar{\xi} \in \mathbb{F}_q^n)$$

の計算に帰着する。

従って,

$f_1(x), \dots, f_t(x)$ (但し $C_2 = \{f_i = 0\}$ は K -irreducible, nonsingular で transversal に交わる) が与えられたとき $t' \in \mathbb{N}$ が存在して $\forall \xi_1, \dots, \xi_{t'} \in O_K^n$ に対して

$R_{\xi_1} f_1, \dots, R_{\xi_{t'}} f_{t'}$ は 公式 5 の条件を

満たすことを示せば良いことになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \in O_K^n \text{ に対し, } f(x) = \sum_d \pi^{a_d} f_d(x - \xi) \text{ と} \\ f(x) \in A \end{array} \right.$$

表わす。ここで $f_d(x - \xi) \in A$ は $x - \xi = (x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n)$ に関して d 次 homogeneous. このとき

命題 7 $\deg \bar{f} = d_0$ とするとき, 次は同値

$$(1) \deg \overline{R_{\xi} f} < \deg \bar{f}$$

$$(2) \exists d < d_0 \text{ s.t. } a_d + d < d_0$$

これは明らかである。とくに $\bar{f} \neq \text{homog w.r.t. } (x - \xi)$

$\Rightarrow \deg \overline{R_{\xi} f} < \deg \bar{f}$, が成り立つ。

$$\deg \bar{f} = 0 \Rightarrow |f(x)| = 1$$

$$\deg \bar{f} = 1 \Rightarrow \bar{f}(x) \text{ nonsingular, irreducible}$$

よって $\deg \bar{f} = d_0 \geq 2$ のとき $R_{\xi_1}, \dots, R_{\xi_t}$ たちの作用によつて $\deg \overline{R_{\xi_1} \cdots R_{\xi_t} f} \leq 1$ とすることが出来る
 こともいへば $\overline{R_{\xi_1} \cdots R_{\xi_t} f}$ nonregular, irreducible
 までいへる. (transversality についてはあとで扱う)

定義 8. $f(x) \in A$ が $\xi \in O_K^n$ に関して special type
 とは, $f(x) = \sum_d \pi^{a_d} f_d(x - \xi)$, $a_d + d \geq d_0$

($= \deg \bar{f}$) for $\forall d < d_0$, と表わすこと.

これは $\deg \overline{R_{\xi} f} = \deg \bar{f}$ と同値である。

定理 9. $F(x) \in A$, $\deg \bar{F} = d_0$ とするとき
 次の条件は同値.

(1) $\xi_i \in O_K^n$ の無限列 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m, \dots$ で
 $\forall m$ に對して $R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F$ は ξ_{m+1} に関して special
 type i.e. $\deg \overline{R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F} = d_0$ for $\forall m$

(2) $\exists \eta \in O_K^n$ s.t. $F(x) = \sum_{d \geq d_0} F_d(x - \eta)$

但し $F_d(x - \eta)$ は $(x - \eta) = (x_1 - \eta_1, \dots, x_n - \eta_n)$ の
 d 次 homogeneous 多項式

証明 (2) $\Rightarrow$ (1) $\xi_1 = \eta$, $\xi_j = 0$ ($\forall j \geq 2$) とすればよい。(1) $\Rightarrow$ (2) が重要である。

$R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F$ は ξ_{m+1} に関して special type だから

$$R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F(x) = \sum_d \pi^{a_{m,d}} f_{m,d}(x - \xi_{m+1})$$

$$\left(\begin{array}{l} \text{但し } f_{m,d} \in A, a_{m,d} > 0 \text{ for } \forall d > d_0, \\ a_{m,d_0} = 0, d + a_{m,d} \geq d_0 \text{ for } \forall d < d_0 \end{array} \right)$$

と表わせる。

このとき $R_{\xi_{m-1}} \cdots R_{\xi_1} F = L_{\xi_m}(R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F)$ を計算しよう。

$$\sum_d \pi^{a_{m,d}} f_{m,d}\left(\frac{x - \xi_m}{\pi} - \xi_{m+1}\right) = \sum_d \pi^{a_d - d} f_{m,d}(x - \xi_m - \pi \xi_{m+1})$$

たゞ $\deg L_{\xi_m}(R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F) = d_0$ に注意すると

(f_{m,d_0} の係数は π^{-d_0} である)

$$L_{\xi_m}(R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} F) = \sum_d \pi^{a_{m,d} + (d_0 - d)} f_{m,d}(x - \xi_m - \pi \xi_{m+1})$$

以下くり返して

$$F(x) = \sum_d \pi^{a_{m,d} + m(d_0 - d)} f_{m,d}(x - \xi_1 - \pi \xi_2 - \cdots - \pi^m \xi_{m+1})$$

か $\forall m$ に対して成り立つ。左辺は m と無関係ゆえ

$$F(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_d \pi^{a_{m,d} + m(d_0 - d)} \int_{m,d} (x - \xi_1 - \pi \xi_2 - \dots - \pi^m \xi_{m+1})$$

$$\text{今 } \eta = \lim_{m \rightarrow \infty} (\xi_1 + \pi \xi_2 + \dots + \pi^m \xi_{m+1}) \in O_K^n \text{ とおく。}$$

$$F(x) = \sum_d F_d(x - \eta) \text{ と表わしたとき}$$

$$F_d(x - \eta) = \lim_{m \rightarrow \infty} \pi^{a_{m,d} + m(d_0 - d)} \int_{m,d} (x - \xi_1 - \pi \xi_2 - \dots - \pi^m \xi_{m+1})$$

$$\text{ゆえ } d < d_0 \text{ なら } (a_{m,d} \geq 0 \text{ ゆえ }) F_d(x - \eta) = 0$$

$$\Rightarrow F(x) = \sum_{d \geq d_0} F_d(x - \eta) \quad //$$

Corollary 10. $F(x) \in A'$ (i.e. nonsingular, $\in A$)

かつ $\deg \bar{F}(x) = d_0 \geq 2$ とする。このとき自然数 N

が定まって $\forall \xi_1, \dots, \xi_N \in O_K^n$ に対して

$$\deg \overline{R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} F} < \deg \bar{F} (= d_0)$$

(証明) このような自然数 N が存在しなければ、

$\xi_1, \dots, \xi_m, \dots$ なる無限列を適当にとりて定理9の(1)を

みたすようにとれるから、 $F(x) = \sum_{d \geq d_0} F_d(x - \eta)$ ($d_0 \geq 2$)

と表わせる。これは η が $\{F=0\}$ の singular point で

あることを意味するから $F(x) \in A'$ に反する. //

この Cor 10 により, 結局 $\int_{O_K^n} |f_1(x)^{N_1} \cdots f_t(x)^{N_t}|^s dx,$

但し $\{f_i=0\}$ は K -med, non-singular, transversal に
交わり $\deg \bar{f}_i = 1$ ($\Rightarrow \{f_i=0\}$ med, nonsingular)
の計算に帰着した.

注) $R_{\xi}: A' \rightarrow A', L_{\xi}: A' \rightarrow A'$ となっている.

例えば $f \in A'$ に対し $R_{\xi} f \in A'$ をいうには

$F(x) = f(\xi + \pi x)$ が nonsingular をいう.

例えば η が $F(x)$ の singular point なるは,

$F(\eta) = 0$ ($\rightarrow f(\xi + \pi \eta) = 0$), $\forall \frac{\partial F}{\partial x_i}(\eta) = 0$ ($\rightarrow \pi \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi + \pi \eta) = 0$)
 $\Rightarrow \xi + \pi \eta$ が f の singular pt. 矛盾. //

注) $f = \text{既約} \Rightarrow R_{\xi} f = \text{既約}$

$\therefore R_{\xi} f = f_1 \cdot f_2 \Rightarrow f = (L_{\xi} f_1) \cdot (L_{\xi} f_2)$ //

命題 11 $f_1, \dots, f_t$ の $\forall \xi \in O_K^n$ での交わりが
transversal なるは, $\forall \xi$ に対し $R_{\xi} f_1, \dots, R_{\xi} f_t$ の
 $\forall \eta \in O_K^n$ での交わりも transversal である.

証明) $f(\xi + \pi x) = \pi^r \cdot (R_\xi f)(x)$ なる r が存在する。

$x_0 = \xi + \pi \eta$ に於て, $f_1(x_0) = \dots = f_\ell(x_0) = 0$, $f_{\ell+1}(x_0) \neq 0$,
 $\dots$, $f_t(x_0) \neq 0$ とすると $f_1, \dots, f_\ell$ は x_0 で transversal に交わる
 から

$$f_1(x) = a_{11}(x_1 - (x_0)_1) + \dots + a_{1n}(x_n - (x_0)_n) + \text{(}(x - x_0\text{) に関して 2次以上の項)}$$

$$\vdots$$

$$f_\ell(x) = a_{\ell 1}(x_1 - (x_0)_1) + \dots + a_{\ell n}(x_n - (x_0)_n) + \{ \text{2次以上の項} \}$$

と表わしたとき $\text{rank} \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\ell 1} & \dots & a_{\ell n} \end{pmatrix} = \ell$ として

$$f_1(\xi + \pi x) = \pi a_{11}(x_1 - \eta_1) + \dots + \pi a_{1n}(x_n - \eta_n) + \left(\begin{smallmatrix} x - \eta \\ \text{2次以上} \end{smallmatrix} \right)$$

$$\vdots$$

$$f_\ell(\xi + \pi x) = \pi a_{\ell 1}(x_1 - \eta_1) + \dots + \pi a_{\ell n}(x_n - \eta_n) + (\quad)$$

従って

$$\begin{cases} (R_\xi f_1)(x) = a_{11}(x_1 - \eta_1) + \dots + a_{1n}(x_n - \eta_n) + \text{(2次以上の項)} \\ \vdots \\ (R_\xi f_\ell)(x) = a_{\ell 1}(x_1 - \eta_1) + \dots + a_{\ell n}(x_n - \eta_n) + \text{(2次以上の項)} \end{cases}$$

即ち, $R_\xi f_1, \dots, R_\xi f_\ell$ は $\forall \eta$ で transversal に交わる。

そして 明らかに $(R_\xi f_k)(\eta) \neq 0$ ($\ell+1 \leq k \leq t$) //

命題 12 $f(x) \equiv a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i \pmod{\pi^m} \quad (m \geq 1)$

$\xi \in O_K^n \Rightarrow (1) |R_\xi f| = 1$, または

(2) $R_\xi f(x) \equiv a'_0 + \sum_{i=1}^n a'_i x_i \pmod{\pi^{m+1}}$ 但し $\forall a'_i \equiv a_i \pmod{\pi^m}$

$$\text{証明) } f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i x_i + \pi^m \left(\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_{i,j,k} a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \right)$$

$$\Rightarrow f(\xi + \pi x) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i (\xi_i + \pi x_i)$$

$$+ \pi^m \left(\sum_{i,j} a_{ij} (\xi_i + \pi x_i) (\xi_j + \pi x_j) + \sum_{i,j,k} a_{ijk} (\xi_i + \pi x_i) (\xi_j + \pi x_j) (\xi_k + \pi x_k) + \dots \right)$$

$$= (a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i) + \pi \sum_{i=1}^n a_i x_i$$

$$+ \pi^m (F_0(x) + \pi F_1(x) + \dots + \pi^r F_r(x))$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 0次 homog. 1次 homog. r次 homog.

$$= (a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \xi_i + \pi^m F_0)$$

$$+ \pi \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i + \pi^m F_1(x) \right)$$

$$+ \pi^{m+2} (F_2(x) + \dots + \pi^{r-2} F_r(x))$$

$$\text{もし } a_0 + \sum a_i \xi_i \in U_K \text{ ならば } f(\xi + \pi x) = R_\xi f(x) \text{ で}$$

$$|f(\xi + \pi x)| = 1 \quad \text{即ち (1) になる。}$$

$$a_0 + \sum a_i \xi_i = \pi u \text{ のときは}$$

$$R_\xi f = (u + \pi^{m+1} F_0) + \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i + \pi^m F_1(x) \right)$$

$$+ \pi^{m+1} (F_2(x) + \dots + \pi^{r-2} F_r(x))$$

$$\text{即ち (2) の場合を 得る。} \quad //$$

命題 13 O_K^n の無限列 $\xi_1, \dots, \xi_m, \dots$ で $R_{\xi_{m-1}} \dots R_{\xi_1} f =$

$$a^{(m)} + \sum_{i=1}^k a_i^{(m)} x_i + \sum_{i=k+1}^n a_i^{(m)} x_i + \pi^m F_{m-1}(x),$$

$$|R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} f| \neq 1, \quad a_i^{(m)} \equiv 0 \pmod{\pi^m} \text{ for } \forall m, (k+1 \leq i \leq n)$$

を満たすものがあるとする。 $\eta = \xi_1 + \pi \xi_2 + \dots \in O_K^n$ とおく。

然し $R_\eta f(x) = b + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \pi \{x \text{ の 2 次 以上 の 項} \}$ とする。

証明) まず 次の Lemma を示そう。

Lemma 14 (1) $\forall \xi_1, \dots, \xi_{m+1} \in O_K^n$ に對して

$$\eta = \xi_1 + \pi \xi_2 + \dots + \pi^m \xi_{m+1} \quad \text{と おく}$$

$$R_{\xi_{m+1}} \dots R_{\xi_1} f = R_0^m R_\eta f \quad \text{for } \forall f \in A$$

(2) O_K^n の 無限列 $\xi_1, \xi_2, \dots$ に對し $\eta = \xi_1 + \pi \xi_2 + \dots \in O_K^n$ とおくと $\forall f \in A$ に對して

$$R_0^m R_\eta f = R_{\xi} R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} f \quad \text{with } \xi \equiv \xi_{m+1}(\pi).$$

証明) (2) は $\xi = \xi_{m+1} + \pi \xi_{m+2} + \dots$ とおけば

(1) に 帰着 する。 (1) の 証明: $f(\xi_1 + \pi x) = \pi^{r_1} (R_{\xi_1} f)(x)$

$$(R_{\xi_1} f)(\xi_2 + \pi x) = \pi^{r_2} (R_{\xi_2} R_{\xi_1} f)(x)$$

$$\Rightarrow f(\xi_1 + \pi \xi_2 + \pi^2 x) = \pi^{r_1+r_2} (R_{\xi_2} R_{\xi_1} f)(x)$$

$$= \pi^{r_1+r_2} (R_0 R_{\xi_1+\pi \xi_2} f)(x) \quad \text{以下同様.} \quad //$$

命題 13 の 証明) $|R_{\xi_m} \dots R_{\xi_1} f| \neq 1 \quad (\forall m)$ と いう

仮定より $|R_0^m R_\eta f| \neq 1 \quad (\forall m)$ が Lemma 14 より わかる。

従つて このとき, R_η の 1 次 の 項 と $R_0^m R_\eta$ の 1 次 の 項

は 一致 する。 $R_\eta f$ の $x_i \quad (k+1 \leq i \leq n)$ の 係数 は

$\forall m$ に 對し π^m で 割れる こと を 示 せる こと が 3 = 0. //

定義 15 作用素 R_{ξ} を次のように一般化する。

$1 \leq m \leq n$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m) \in O_K^m$ に対して $R_{\eta} f$ を

$f(\eta + \pi x', x'') = \pi^r (R_{\eta} f)(x)$ で定義する。 r は

$R_{\eta} f \in A$ という条件で unique に定まる。ここで

$x = (x', x'')$, $x' = (x_1, \dots, x_m)$, $x'' = (x_{m+1}, \dots, x_n)$

である。 R_{η} に関しても 21 頁に述べた性質が成り立つ。

定理 16 $f_i(x) = a_i + \sum_{j=1}^m a_{ij} x_j + \pi^m F_i(x) \in A$
 $(i=1, \dots, t)$ が既約, 非特異, で transversal に交わる
 とする。 $F_i(x)$ は x の 2 次以上の項。

このとき, 自然数 N が存在して (1) $|R_{\xi_N} f_i - R_{\xi_1} f_i|_K = 1$
 for some i 又は (2) $\overline{R_{\xi_N} f_i - R_{\xi_1} f_i} (1 \leq i \leq t)$ は
 transversal に交わる。

ここで 各 $k=1, \dots, N$ に対し, 自然数 m_k が定まり

$1 \leq m_k \leq n$ で, ξ_k は $O_K^{m_k}$ の任意の元である。

この定理を示せば我々の目的は達せられる。

t に関する induction. $t=1$ なる明らかなゆえ

$t \leq T-1$ で成り立つとして $t=T$ のときを示す。

Lemma 17 一般性を失うことなく $a_1 = \dots = a_l = 0$ かつ $(\bar{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ としてよい.

Proof. $\text{rank}(\bar{a}_{ij}) = l$ なる変数の1次変換と $f_1, \dots, f_t$ の順序を(必要なら)変えることにより $(\bar{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$ としてよい. $\xi \in O_K^n$ ($\forall$ given) に対し, $f_i(\xi) \not\equiv 0(\pi)$ となる i が存在すれば, $|R_\xi f_i|_K = 1$ かつ $t \leq T-1$ に帰着する. よって $f_i(\xi) \equiv 0(\pi)$ としてよい. Hensel's lemma により $\xi' \equiv \xi(\pi)$ なる ξ' で $f_i(\xi') = 0$ ($1 \leq i \leq l$) となるものがある. ξ は mod π で自由に与えられるか? 最初から $\xi' = \xi$ としてよい. さて 命題 12 より $R_\xi f_i$ ($i=1, \dots, t$) はこの Lemma の条件を満たす. //

Lemma 18 $a_1 = \dots = a_l = 0$, $(\bar{a}_{ij}) = \begin{pmatrix} I_l & 0 \\ * & 0 \end{pmatrix}$, かつ $\text{rank}(a_{ij}) > l$ とし, 更に ある $j \geq l+1$ に対し $\min_i \text{ord } a_{ij}$ に対して m を十分大きくとれるとすると ある N があって (1) $|R_{\eta_N} \dots R_{\eta_1} f_i| = 1$, 又は (2) $R_{\eta_N} \dots R_{\eta_1} f_i$ に関して $(\bar{a}_{ij}) > l$ となる

∴) $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l) \neq 0 (\pi)$ 例えは $\eta_i \neq 0 (\pi)$ とす

$|R_\eta f_i| = 1 \ (1 \leq i \leq l)$ かつ $\eta = (0, \dots, 0) \in O_K^l$ と

してよい. 但し $a_i \neq 0 (\pi)$ ($\exists i = l+1, \dots, n$) とす

$|R_0 f_i| = 1$ かつ

$$f_i = \pi a_i' + \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j + \sum_{j=l+1}^n \pi a_{ij}' x_j + \pi^m F_i(x)$$

($a_i' = \dots = a_l' = 0, 1 \leq i \leq t$).

$$\text{よって } R_\eta f_i = a_i' + \sum_{j=1}^l a_{ij} x_j + \sum_{j=l+1}^n \pi a_{ij}' x_j + \pi^{m-1} F_i(x)$$

これをくり返せばよい. (x_j ($j = l+1, \dots, n$) の係数の

order があがってくることに注意!) //

ここで Case I と Case II にわけろ.

Case I では Lemma 18 をくり返して適用できるときで

このとき $\text{rank}(\bar{a}_{ij}) = \text{maximal}$ 即ち

$\text{rank}(a_{ij}) = \text{rank}(\bar{a}_{ij})$ としてよい.

Lemma 18 が適用できる Case II は 命題 13 が成り立つときである.

Case I は次のようにして解決する.

命題 19 $f_k(x) = a_k + a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n + \pi^m F_k(x)$

($1 \leq k \leq t$), $a_1 = \dots = a_l = 0$, $\text{rank}(a_{ij}) \ (1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq n)$

$= l = \text{rank}(\overline{a_{ij}}) \quad (1 \leq i \leq l, 1 \leq j \leq n)$. 然しこれは
自然数 N が存在して O_K^n の $\forall$ 元 $\xi_1, \dots, \xi_N$ に対して

(1) $|R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_k|_k = 1$ for $\exists k$, 又は

(2) $\overline{R_{\xi_N} \cdots R_{\xi_1} f_k} \quad (1 \leq k \leq t)$ は transversal に交わる.

Proof. 無限列 $\xi_1, \dots, \xi_m, \dots$ で $\forall m$ と $\forall k=1, \dots, t$
に対して $|R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f_k|_k \neq 1$ なるものが存在すると仮定
する。Hensel's lemma により $\xi'_1 \equiv \xi_1(\pi)$ なる ξ'_1 で
 $f_1(\xi'_1) = \dots = f_l(\xi'_1) = 0$ なるものがある。 ξ_1 は mod π の
自由度があるから $\xi'_1 = \xi_1$ としてよい。同様に繰り返
して $(R_{\xi_m} \cdots R_{\xi_1} f_k)(\xi_{m+1}) = 0$ から $\forall m$ と $\forall k=1, \dots, l$
に対して成り立つとしてよい。

これは $f_k(\xi_1 + \pi \xi_2 + \dots + \pi^m \xi_{m+1}) = 0$ をいふ。

$\eta = \sum_{i=0}^{\infty} \pi^i \xi_{i+1} \in O_K^n$ とおくと $f_k(\eta) = 0 \quad (1 \leq k \leq l)$.

transversal に交わるという条件 と $\text{rank}(\overline{a_{ij}}) = l$ より

$f_k(\eta) \neq 0 \quad (l+1 \leq k \leq t)$. しかし $\eta \equiv \xi_1(\pi)$ より

$f_k(\eta) \equiv 0(\pi) \quad (l+1 \leq k \leq t)$. よって

$R_\eta f_k(x) = a'_k + a'_{k1}x_1 + \dots + a'_{kn}x_n + \pi^{m+1}F'_k(x)$

$(1 \leq k \leq t)$ 但し $a'_k = 0 \quad (1 \leq k \leq l)$, $a'_k \neq 0 \quad (l+1 \leq k \leq t)$, かつ $(\overline{a_{ij}}) = (\overline{a'_{ij}})$. さて,

$t=l$ なる明らかな $R_{\eta} f_k$ は transversal に交わる。

$t > l$ のとき、例えば $a \in \pi^r u$ ($u \in U_K = O_K - \pi O_K$)

とすれば $|R_0^{r+1} R_{\eta} f_t|_K = 1$. Lemma 14 により

これは $|R_{\bar{\zeta}} R_{\bar{\zeta}_{r+1}} \cdots R_{\bar{\zeta}_1} f_t|_K = 1$ ($\bar{\zeta} \equiv \bar{\zeta}_{r+2}(\pi)$)

従って $|R_{\bar{\zeta}_{r+2}} \cdots R_{\bar{\zeta}_1} f|_K = 1$ を意味する。これは

仮定に反する。 //

最後に Case II の場合を扱う。即ち O_K^n の

無限列 $\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_m, \dots$ で $R_{\bar{\zeta}_m} \cdots R_{\bar{\zeta}_1} f_j$ ($j=1, \dots, t$)

の χ_i ($l+1 \leq i \leq n$) の係数 $\equiv 0 \pmod{\pi^m}$ ($\forall m$)

が成り立つとする。 $\eta = \bar{\zeta}_1 + \pi \bar{\zeta}_2 + \dots \in O_K^n$ とおく。

命題 13 により $R_{\eta} f_i = b_i + \sum_{j=1}^l b_{ij} \chi_j + \pi^m$ (2次以上の項) と表わせる。

ある $b_i \neq 0$ なる $b_i = \pi^r u$ ($u \in U_K$) と表わせるが

このとき $|R_0^{r+1} R_{\eta} f_i|_K = 1$, Lemma 14 により

$|R_{\bar{\zeta}} R_{\bar{\zeta}_{r+1}} \cdots R_{\bar{\zeta}_1} f_i|_K = 1$, $\bar{\zeta} \equiv \bar{\zeta}_{r+2}(\pi)$ 即ち

$t \leq T-1$ の場合に帰着する。

$b_i = 0$ ($\forall i=1, \dots, t$) のときは、 $R_{\eta} f_i$ は 0 で transversal に交わるが $t=l$ でなければならぬ。よって $\overline{R_{\eta} f_i}$ は transversal に交わる。 //

参考文献

- [1] J. Denef, On the degree of Igusa's local zeta function, Preprint.
- [2] H. Hironaka, Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero, *Annals of Math.* (1964), 109-326
- [3] J. Igusa, Some results on p -adic complex powers, *Amer. J. Math.* 106 (1984), 1013-1032.
- [4] T. Kimura, Complex powers on p -adic fields and a resolution of singularities, Preprint.