

SIMULTANEOUS FLATTENING OF FROBENIUS AND MINIMAL RESOLUTION

TAKEHIKO YASUDA

ABSTRACT. The F-blowup is an analog of the higher Nash blowup and defined as a subscheme of the Hilbert scheme of points. It is characterized as the universal flattening of Frobenius morphism. Relating it with the G -Hilbert scheme, we obtain non-trivial results. In the toric case, we have an explicit description of the F-blowup. In some cases, an F-blowup is a nice resolution and the sequence of F-blowups stabilizes or is bounded.

1. 高次ナッシュ爆発

まず最初に高次ナッシュ爆発について簡単に説明する. 標数 0 の代数閉体上の (特異点を許す) 代数多様体 X を考える. 点 $x \in X$ の局所環を $(\mathcal{O}_{X,x}, \mathfrak{m}_x)$ と書く. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し, イデアルの冪 $\mathfrak{m}_x^{n+1}$ はクラスター (すなわち, 0 次元部分スキーム) $x^{(n)} \subseteq X$ を定める. これは x の n 次無限小近傍と呼ばれ, 一点 x に被約でないスキーム構造を与えたものだ. このクラスターは X のヒルベルト・スキーム $\text{Hilb } X$ の点と同一視される. そこで次の定義をする.

定義 1.1. X の n 次ナッシュ爆発 $\text{Nash}_n X$ を部分集合 $\{x^{(n)} | x \in X_{\text{sm}}\} \subseteq \text{Hilb } X$ の閉包と定義する. ここで $X_{\text{sm}} \subseteq X$ は非特異点の集合.

$\text{Nash}_n(X)$ の各点は X のクラスターで, 集合としては一点になっているものと同一視される. 従ってスキーム構造を忘れるという忘却写像

$$\text{Nash}_n X \rightarrow X, Z \mapsto Z_{\text{red}}$$

が存在する. この写像はスキームの射で, さらに射影的かつ双有理的となる. そこで次の問題を考えるのは自然だろう.

問題 1.2. 任意の代数多様体 X と十分大きな n について, $\text{Nash}_n X$ は非特異か?

私は 1 次元で肯定的に解決し [Yasuda, a], 一般次元でもそのまま成り立つと予想したが, そうではないようだ. 最近の計算によると, おそらく 2 次元の A_3 特異点が反例になっている.

2. F 爆発

高次ナッシュ爆発の類似物である F 爆発というものを調べていくと, 予想外に興味深い研究対象であることが分かってきた.

2.1. 導入. 標数 $p > 0$ の環 R , イデアル $I \subseteq R$, そして $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を考える. $q := p^e$ とおく. このとき e 次フロベニウス冪 $I^{[q]}$ は $\{f^q | f \in I\}$ で生成される R のイデアルと定義する. 標数 p の代数閉体上定義された代数多様体 X の点 x に対し, $x^{[q]} \subseteq X$ をイデアル $\mathfrak{m}_x^{[q]} \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$ に対応する部分スキームとする.

JSPS research fellow (PD).

定義 2.1. X の e 次 F 爆発 $\mathrm{FB}_e X$ を部分集合 $\{x^{[q]} | x \in X_{\mathrm{sm}}\} \subseteq \mathrm{Hilb} X$ の閉包と定義する.

すなわち, 高次ナッシュ爆発で普通の冪 $\mathfrak{m}_x^{n+1}$ を考えたところを, フロベニウス冪 $\mathfrak{m}_x^{[q]}$ で置き換えただけのものである.

以後, 簡単のために X はアフィン代数多様体 $\mathrm{Spec} R$ とする. (F 爆発は開集合への制限, さらにスムーズ射と可換なので, こう仮定しても一般性を失わない.) 部分環 $R^q := \{f^q | f \in R\} \subseteq R$ は e 次相対フロベニウス射 $F^e : X \rightarrow X_e := \mathrm{Spec} R^q$ を定める. 各点 $x \in X$ に対し, $F^e(x)$ 上のスキーム論的ファイバーは $x^{[q]}$ である. F^e は $X_{e,\mathrm{sm}}$ 上で平坦なので, 対応する射 $X_{e,\mathrm{sm}} \rightarrow \mathrm{Hilb} X$ があるが, これは埋め込みになっている. 従って, 自然な双有理写像 $\mathrm{FB}_e X \dashrightarrow X_{e,\mathrm{sm}}$ がある. さらに, これは射影的双有理射

$$\mathrm{FB}_e X \rightarrow X_e$$

に拡張できる. これは写像として忘却写像

$$\mathrm{FB}_e X \rightarrow X, Z \rightarrow Z_{\mathrm{red}}$$

(これはスキームの射ではない) と $F^e : X \rightarrow X_e$ の合成と一致する.

2.2. フロベニウス射の平坦化.

定義 2.2. $f : Y \rightarrow X$ を整スキームの射とする. f の平坦化とは固有双有理射 $X' \rightarrow X$ でファイバー積 $X' \times_X Y$ の既約成分で X' を支配するものに被約スキーム構造を入れたものは X' 上平坦であるもののこと. f の平坦化 $X' \rightarrow X$ が普遍平坦化であるとは, 任意の f の平坦化 $X'' \rightarrow X$ が $X'' \rightarrow X' \rightarrow X$ と分解することをいう.

普遍平坦化は定義より存在すれば一意だ. そして射影的射に対しては存在する. 実際, 射影的射 $f : Y \rightarrow X$ に対し, 相対ヒルベルト・スキーム $\mathrm{Hilb}(Y/X)$ の既約成分として, 普遍平坦化は実現できる.

ここでフロベニウス射の場合を考える. X を再び正標数の (アフィン) 代数多様体とする. Kunz の定理 [Kunz, 1969] より, $F^e : X \rightarrow X_e (e > 0)$ は, ちょうど $X_{e,\mathrm{sm}}$ 上で平坦である.

事実 2.3. $\mathrm{FB}_e X$ は $F^e : X \rightarrow X_e$ の普遍平坦化である.

この事実より, $\pi_e : \mathrm{FB}_e X \rightarrow X_e (e > 0)$ はちょうど $X_{e,\mathrm{sm}}$ 上で同型射となる.

2.3. 修正版 F 爆発. 既に述べたように, $\mathrm{FB}_e X$ は X とではなく X_e と自然に双有理的だった. しかし, それでは異なる e に対する $\mathrm{FB}_e X$ を比べるのに不便なので次の定義をする.

定義 2.4. $\mathrm{FB}'_e X$ を e 次絶対フロベニウス射 $F_{\mathrm{ab}}^e : X \rightarrow X$ の普遍平坦化と定義する.

または, 同じ事だが, 自然な射 $\mathrm{Spec} R^{1/q} \rightarrow X = \mathrm{Spec} R$ の普遍平坦化と定義しても良い. また, $\mathrm{Hilb}(\mathrm{Spec} R^{1/q})$ の部分スキームとして構成することも出来る. $\mathrm{FB}_e X$ と $\mathrm{FB}'_e X$ は $\mathbb{Z}$ 上では同型で, 自然な射 $\mathrm{FB}'_e X \rightarrow \mathrm{FB}_e X$ があり, これはフロベニウス射となる.

2.4. 主要問題.

問題 2.5. X を正標数の代数多様体とする.

- (1) 十分大きな e に対し, $\mathrm{FB}_e X$ は非特異か.
- (2) F 爆発の列 $\mathrm{FB}'_1 X, \mathrm{FB}'_2 X, \dots$ は安定化するか.
- (3) X の全ての F 爆発 $\mathrm{FB}'_e X, e \geq 0$ を支配する X の爆発は存在するか.

(1) は後で見るように、一般には否定的だが、特別な場合には単に非特異となるだけでなく、最小特異点解消やクレパント特異点解消を与える。(2) については、 X が正規なら常に正しいのではないかと予想している。(3) は常に正しいのではないかと予想している。もちろん (2) が正しいければ、(3) も正しい。これらの問題に、以下では商特異点とトーリック特異点の場合に部分的な回答を与える。

3. G ヒルベルト・スキームとの関係

M を非特異代数多様体で有限群 G が有効に作用しているものとする。標数 p は位数 $|G|$ を割り切らないとする。

定義 3.1 ([Ito and Nakamura, 1999]). G ヒルベルト・スキーム $\mathrm{Hilb}^G M$ を部分集合 $\{\text{自由 } G \text{ 軌道}\} \subseteq \mathrm{Hilb} M$

の閉包と定義する。

任意の点 $Z \in \mathrm{Hilb}^G M$ は長さ $|G|$ のクラスターで G 作用で安定なものとなる。

$X := M/G$ を商多様体とする。各 $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、自然な写像

$$\psi_e : \mathrm{Hilb}^G M \rightarrow \mathrm{FB}_e X$$

が次のように構成できる。 $q := p^e$ とおく。 $\mathcal{I}_Z \subseteq \mathcal{O}_M$ を Z の定義イデアルとしたとき、 $Z^{[q]} \subseteq M$ をフロベニウス冪 $\mathcal{I}_Z^{[q]}$ で定義されるクラスターとする。これは長さが $q^{\dim M} \cdot |G|$ で、再び G 作用で安定である。そこで商スキーム $Z^{[q]}/G$ を取ることができ、これは X のクラスターとなる。簡単に $Z^{[q]}/G \in \mathrm{FB}_e X$ が分かる。そこで写像 ψ_e を $\psi_e(Z) := Z^{[q]}/G$ で定義する。 ψ_e はスキームの射として、次のように分解する。

$$\psi_e : \mathrm{Hilb}^G M \xrightarrow{F^e} (\mathrm{Hilb}^G M)_e \xrightarrow{\phi_e} \mathrm{FB}_e X.$$

ここで F^e は $\mathrm{Hilb}^G M$ の相対フロベニウス射、 ϕ_e は射影的双有理射。これに ϕ_e に対応して、 X の爆発間の射 $\phi'_e : \mathrm{Hilb}^G M \rightarrow \mathrm{FB}'_e X$ がある。

系 3.2. 商多様体 X に対し問題 2.5(3) の答えは肯定的。

定理 3.3. G はアーベル群で $q = p^e > |G|$ と仮定する。このとき ϕ_e と ϕ'_e は同型射。

系 3.4. G はアーベル群で $\dim M = \dim X = 2$ とする。このとき、十分大きな e について、 $\mathrm{FB}'_e X$ は X の最小特異点解消。

これは [Ito and Nakamura, 1996, Kidoh, 2001] の結果と定理 3.3 から従う。また、直接 $\mathrm{FB}_e X$ を計算して、これを証明することも出来る。この方法だと、2次元非正規孤立トーリック特異点で正規化しても特異なものについても、 F 爆発で最小特異点解消が得られることが分かる。正規化して非特異になるものは、最小特異点解消を一点爆発したものになる。

系 3.5. G はアーベル群、 $\dim M = \dim X = 3$ 、 X はグレンシュタインとする。このとき、十分大きな e について、 $\mathrm{FB}'_e X$ は X のクレパント特異点解消。

これは [Nakamura, 2001] の結果と定理 3.3 から従う。

系 3.6. 一般に正規代数多様体の F 爆発は正規とは限らない。

これには次の例がある：[Craw et al., 2006, Example 5.7] k を標数 $p > 0, p \neq 5$ の代数閉体とする。 $G \subseteq GL(6, k)$ を対角行列 $\mathrm{diag}(\omega, \omega, \omega, \omega, \omega, \omega)$, $\mathrm{diag}(1, \omega, 1, \omega^3, \omega^4, \omega^3)$, $\mathrm{diag}(\omega^3, \omega^2, \omega^4, \omega^2, \omega, \omega)$, $\mathrm{diag}(\omega, 1, \omega, 1, 1, 1)$ で生成される有限部分群とする。ここで $\omega \in k$ は 1 の原始 5 乗根。このとき $G \curvearrowright \mathbb{A}_k^6$ に付随する G ヒルベルト・スキームは非正規。したがって十分大きな e に対し、 $\mathrm{FB}_e(\mathbb{A}_k^6/G)$ は非正規。

4. トーリック多様体のF爆発

トーリック多様体のF爆発を明示的に記述する方法について述べる.

4.1. セッティング. $M := \mathbb{Z}^d$ を階数 d の自由アーベル群, $A \subseteq M$ を有限生成部分モノイドで M を群として生成するものとする. このとき A に付随するトーリック多様体を $X := \text{Spec } k[A]$ で定義する. 代数幾何で通常考えるトーリック多様体と違い, 正規であることは仮定しない. これは代数的トーラス $T := \text{Spec } k[M]$ を稠密開部分多様体として含んでいる. その非常に標準的な構成から, 各F爆発 $\text{FB}_e X$ と $\text{FB}'_e X$ は X への T 作用を受け継ぐ, 従って, 再びトーリック多様体となる.

$N := M^\vee$ を M の双対とする. このとき各 $w = (w_1, \dots, w_d) \in N$ に対し, 1パラメタ部分群

$$\lambda_w : \mathbb{G}_m \rightarrow T, t \mapsto (t^{w_1}, \dots, t^{w_d})$$

が対応する [Fulton, 1993, §2.3]. $A_{\mathbb{R}} \subseteq M_{\mathbb{R}}$ を A で張られる錐, $A_{\mathbb{R}}^\vee \subseteq N_{\mathbb{R}}$ をその双対錐とする. もし $w \in \text{rel.int. } A_{\mathbb{R}}^\vee \cap N$ なら, 極限 $\lim_{t \rightarrow 0} \lambda_w(t)$ は X の中に存在する. また極限は $w \in \text{rel.int. } A_{\mathbb{R}}^\vee \cap N$ の取り方に依存しない.

4.2. 極限クラスターとイニシャル・イデアル. 各 e に対し, e 次F爆発 $\text{FB}_e X (\cong \text{FB}'_e X)$ は $N_{\mathbb{R}}$ 内の扇 Δ_e で $|\Delta_e| = A_{\mathbb{R}}^\vee$ となるものを定める. ($\text{FB}_e X$ は正規とは限らないので, Δ_e は $\text{FB}_e X$ を定めないことに注意.)

このとき $w \in \text{rel.int. } A_{\mathbb{R}}^\vee \cap N$ に対し, $\text{FB}_e X$ の中での極限 $Z_w := \lim_{t \rightarrow 0} \lambda_w(t)$ は $w \in \text{rel.int. } \sigma$ を満たす錐 $\sigma \in \Delta_e$ と対応する. 各点 $\lambda_w(t) \in T$ はクラスター $\lambda_w(t)^{[q]} \subseteq T$ に対応する. そして Z_w はクラスターの族 $\lambda_w(t)^{[q]}$, $t \in \mathbb{G}_m$ の極限となっている.

$1 \in T$ を単位元, $\mathfrak{a}_e \subseteq k[A]$ をクラスター $1^{[q]} \subseteq X$ の定義イデアルとする. 全ての1パラメタ部分群は 1 を通るので, $\mathfrak{a}_e$ を λ_w に沿って変形していき, Z_w の定義イデアルを求める. $w \in \text{rel.int. } \sigma \cap N$ は $k[A]$ を $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 次数付き環にする. そこで各ローラン多項式 $f \in k[A]$ を

$$f = f_m + f_{m-1} + \dots + f_n, f_m \neq 0, f_i : i \text{ 次斉次式}$$

と斉次式に分解したとき, 最高次の斉次式 $\text{In}_w f := f_m$ を f の**イニシャル形式**という. そして $\mathfrak{a}_e$ の**イニシャル・イデアル**を次で定義する.

$$\text{In}_w \mathfrak{a}_e := \langle \text{In}_w f \mid f \in \mathfrak{a}_e \rangle \subseteq k[A].$$

事実 4.1. $\text{In}_w \mathfrak{a}_e$ は $Z_w \subseteq k[A]$ の定義イデアル.

[Eisenbud, 1995, §15.8] にこの事実の分かりやすい説明がある. ただし, そこでは多項式環のイデアルのみを扱っているが, モノイド環のイデアルについても同様である.

$w \in \text{rel.int. } \sigma \cap N$ を動かすと, イニシャル・イデアル $\text{In}_w \mathfrak{a}_e$ は有限個のイデアルの中で変化する. これは $\text{rel.int. } \sigma$ の分割 (扇) を定める. この扇をイデアル $\mathfrak{a}_e$ の**グレブナー扇**という. 話をまとめると, 次のようになる.

定理 4.2. $\text{FB}_e X$ の扇 Δ_e はクラスター $1^{[q]} \subseteq X$ の定義イデアル $\mathfrak{a}_e \subseteq k[A]$ のグレブナー扇である.

G ヒルベルト・スキームに対する同様の事実は [Ito, 2001, Ito, 2002, Craw et al., 2006] で観察されている.

ちなみに $\mathfrak{a}_e$ は二項イデアルとなり, そのグレブナー扇の計算も比較的簡単だと思われる.

4.3. **トーリック F 爆発の列.** 上で述べたように, $\mathrm{FB}_e X$ は非正規かもしれないので, 扇 Δ_e を求めるだけでは不十分だ. しかし, 実際には $\mathfrak{a}_e$ のグレブナー基底を使って, $\mathrm{FB}_e X$ のアフィン・チャートの座標環を求めることができる. 詳しくは [Yasuda, b] を参照. G ヒルベルト・スキームに対して, 同様のことが [Craw et al., 2006] で示されている. このように, $\mathrm{FB}_e X$ は完全に明示的に記述できる. この記述を使い, 問題 2.5(2),(3) に対し, 次の肯定的な回答を示すことができる.

定理 4.3. X をトーリック多様体とする.

- (1) X の全ての F 爆発は, ある一つの爆発に支配される.
- (2) X は正規と仮定する. そのとき列 $\mathrm{FB}'_1 X, \mathrm{FB}'_2 X, \dots$ は安定化する.

REFERENCES

- [Craw et al., 2006] Craw, A., MacLagan, D., and Thomas, R. R. (2006). Moduli of McKay quiver representations ii: Groebner basis techniques. math/0611840. to appear in J. Algebra.
- [Eisenbud, 1995] Eisenbud, D. (1995). *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*, volume 150 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- [Fulton, 1993] Fulton, W. (1993). *Introduction to toric varieties*, volume 131 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ. , The William H. Roever Lectures in Geometry.
- [Ito, 2001] Ito, Y. (2001). G -Hilbert scheme and Gröbner basis. Algebraic Geometry Symposium in Kinosaki.
- [Ito, 2002] Ito, Y. (2002). Minimal resolution via Gröbner basis. In *Algebraic geometry in East Asia (Kyoto, 2001)*, pages 165–174. World Sci. Publ., River Edge, NJ.
- [Ito and Nakamura, 1996] Ito, Y. and Nakamura, I. (1996). McKay correspondence and Hilbert schemes. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 72(7):135–138.
- [Ito and Nakamura, 1999] Ito, Y. and Nakamura, I. (1999). Hilbert schemes and simple singularities. In *New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996)*, volume 264 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 151–233. Cambridge Univ. Press, Cambridge.
- [Kidoh, 2001] Kidoh, R. (2001). Hilbert schemes and cyclic quotient surface singularities. *Hokkaido Math. J.*, 30(1):91–103.
- [Kunz, 1969] Kunz, E. (1969). Characterizations of regular local rings for characteristic p . *Amer. J. Math.*, 91:772–784.
- [Nakamura, 2001] Nakamura, I. (2001). Hilbert schemes of abelian group orbits. *J. Algebraic Geom.*, 10(4):757–779.
- [Yasuda, a] Yasuda, T. Higher Nash blowups. arXiv:math.AG/0512184. to appear in *Compositio Mathematica*.
- [Yasuda, b] Yasuda, T. Universal flattening of Frobenius. arXiv:0706.2700.

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCES, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO, 606-8502, JAPAN

E-mail address: takehiko@kurims.kyoto-u.ac.jp, highernash@gmail.com