

程度までは強い分散の効果(0次)による減衰が、 $O(\epsilon)$ の線形成長を上まわると考えられる。いずれにせよ、この問題の明確な答はソリトン系の摂動理論の今後の発展によって与えられると思われる。また、それにより、無限自由度のソリトン系においても、K-A-M面のような準可積分面の存在が、ハミルトン系になる場合には証明されると期待される。

参 考 文 献

- 1) K. Nozaki, Phys. Rev. Lett. **49**, 1883 (1982).
- 2) K. Stewartson and J. T. Stuart, J. Fluid Mech. **48**, 529 (1971).
- 3) G. M. Zaslavsky, Phys. Lett. **69A**, 148 (1978).
- 4) D. J. Kanp and A. C. Newell, Proc. R. Soc. Lond. **A361**, 413 (1978); V. I. Karpman, Physica Scripta **20**, 462 (1979).
- 5) N. R. Pereira and L. Stenflo, Phys. Fluids **20**, 1733 (1977).
- 6) B. V. Chirikov, Phys. Reports **52**, 265 (1979).

非可積分系の孤立波とカオス

静岡大・教養 長 島 弘 幸

1. はじめに

非線形分散波動においては、従来から Korteweg-de Vries 方程式や、変形された Korteweg-de Vries 方程式といった完全積分系は非常に詳しく研究されて来た。これらの完全積分系以外の非線形分散波動方程式は、どのような特徴を有しているのでしょうか？ 一つの簡単な、かつ物理的意味の有する非可積分系は次の様なものがある。

$$u_t + uu_x + (1-s) \delta^2 u_{3x} - s r^2 u_{5x} = 0 \quad (1)$$

ここで、添字はそれに関する偏微分を表わす。また δ^2 と r^2 は数値計算の便宜上それぞれ 4.84×10^{-4} , 7×10^{-7} とする。

$s = 0$ の場合、方程式 (1) は K-dV 方程式となり可積分系となる。また $s = 1$ の場合は K-dV の 3 次の方程式の代りに 5 次の分散項を有する波動方程式となる。

この場合 $s = 0$ 以外は方程式 (1) は次の三個の多項式型の保存密度を有す。

$$\begin{aligned} T_1 &= u \\ T_2 &= \frac{1}{2} u^2 \\ T_3 &= \frac{1}{3} u^3 - (1-s) \delta^2 (u_x)^2 - s r^2 (u_{2x})^2 \end{aligned} \quad (2)$$

これ以外に方程式 (1) は局所的な保存密度

$$T' = xu - \frac{1}{2} t u^2$$

を持つ。また方程式 (1) は $u_t + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta I_3}{\delta u} \right)_x = 0$ と表わされる。

ただし

$$I_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} T_3 dx.$$

方程式 (1) に関しては $s=1$ の場合 孤立波の性質が計算機実験によって、著者らによって調べられており¹⁾ また解のフーリエ係数の空間において適当な初期波形のもとで接近した二点間の距離が指数関数的に増加することが、吉村、渡辺²⁾ に報告されている。

2. リアプノフ数

方程式 (1) の解である、二つの波 u, u' 間の距離 d を次の様に定義する。

$$d(t) = \left[\int_0^h (u(x, t) - u'(x, t))^2 dx \right]^{1/2} \quad (3)$$

ここで、 h は空間範囲であり u は次の周期境界条件を満足する

$$u_{nx}(x) = u_{nx}(x+h) \quad n=0, 1, 2, 3, \dots \quad (4)$$

方程式 $u_t + u^p u_x + K u_{qx} = 0$ の孤立波解が衝突に関して安定な場合には、距離 $d(t)$ は時間 t に比例して増加することが以下の様に示せる。

すなわち、この方程式のソリトン解は

$$u = \lambda f^{(pq)} \left\{ \lambda^{\frac{p}{q-1}} (x - \lambda^p t) + \delta \right\}$$

と書ける。

ただし $f^{(pq)}$ はソリトンの形を記述する関数である。このとき

$$d(t)^2 = \int_0^L (u - u^{\varepsilon_0})^2 dx = \int_0^L \left\{ (1 - e^{\varepsilon_0 \frac{d}{d\varepsilon}})^2 u \right\}_{\varepsilon=0}^2 dx \simeq \varepsilon_0^2 \int_0^L \left(\frac{du}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon_0}^2 dx$$

ここで u を充分離れた N 孤立波解で近似する。

$$u \simeq \sum u_i = \sum \lambda_i f^{(pq)} \left\{ \lambda_i^{\frac{p}{q-1}} (x - \lambda_i^p t) + \delta_i \right\}$$

これより $d(t)$ は t の大きな値に対して

$$d^2(t) = t^2 \varepsilon_0^2 p^2 \int \left(\frac{d f^{(pq)}(\eta)}{d \eta} \right)^2 d \eta \times \sum_i \lambda_i^{\frac{2p}{q-1} + 2p} \left(\frac{d \lambda_i}{d \varepsilon} \right)_{\varepsilon = \varepsilon_0}^2 \quad (5)$$

式 (5) と計算機実験との比較を図 1 に示す。

$d(t)$ が充分大きくなると $u(t)$ が有界であることから $d(t)$ もある値 $\bar{d}$ 以上にならないことが予想される。この $\bar{d}$ の値は次の様に求められる。

$$\begin{aligned} d^2(t) &= \int_0^h (u - u^{\varepsilon_0})^2 dx = \int_0^h (u - \bar{u})^2 dx + \int_0^h (u^{\varepsilon_0} - \bar{u})^2 dx + 2 \int_0^h (u - \bar{u})(u^{\varepsilon_0} - \bar{u}) dx \\ &\simeq 2 \int_0^h (u - \bar{u})^2 dx = 2 \int_0^h u^2 dx - 2 h \bar{u}^2 = \bar{d}^2 \end{aligned} \quad (6)$$

ここで

$$\bar{u} = \frac{1}{h} \int_0^h u dx$$

カオス状態の判定条件としては、最大リアプノフ数が正の場合はカオスとすることとする。

最大リアプノフ数 L としては

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n(\tau, \mathbf{x}, \mathbf{d}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (n \tau)^{-1} \sum_{i=1}^n \ln (|\mathbf{d}_i| / |\mathbf{d}|) \quad (7)$$

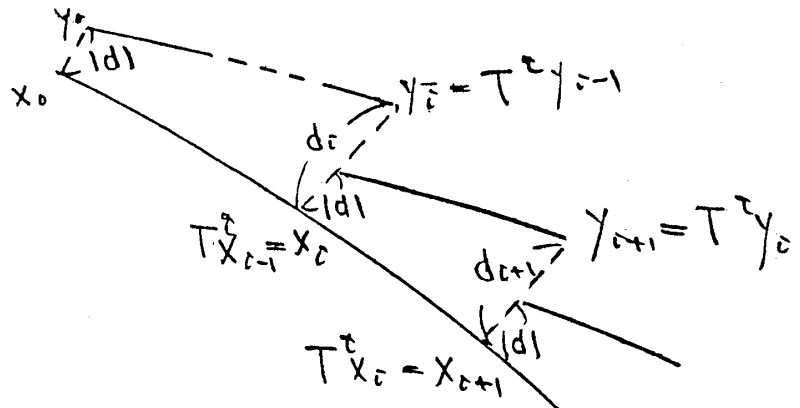
をとる³⁾ (図参照)。

このリアプノフ数が正の場合に、カオスであると判定する。

初期波形は全て次の形で与えた。

$$u(x, 0) = \text{sech}^2 \frac{2 \ln(1 + \sqrt{2}) x}{W_H}$$

$$u^{\varepsilon_0}(x, 0) = \text{sech}^2 \frac{2 \ln(1 + \sqrt{2}) x}{W_H (1 + \varepsilon_0)}$$



3. 結 果

図-1 に K-d V 方程式

($s = 0$) の軌道分離 $d(t)$

の時間的发展の例を示してある。
ここで、式(5)で計算した値を重ね合わせると図中の直線の様になり、両者はきわめてよく一致することが分る。

また $s = 1$ の場合の典型的な例として、 $d(t)$ が時間と共に指数関数的に増加する場合を図-2に示す。この場合の $d(t)$ が一定になったときの値は式(6)で計算したものとよく一致する。ただし図-1, 2では計算の便宜上 $d(t)$ の代りに $d(t)/\Delta x$ をとっている。(ただし Δx は差分の格子点間隔で通常 $1/\Delta x = 50$)。

次に s を 0 から 1 まで変化させた場合の $L(t) = L_n(\tau, x, t)$ の $t = 120$ での値を図-3に示す。

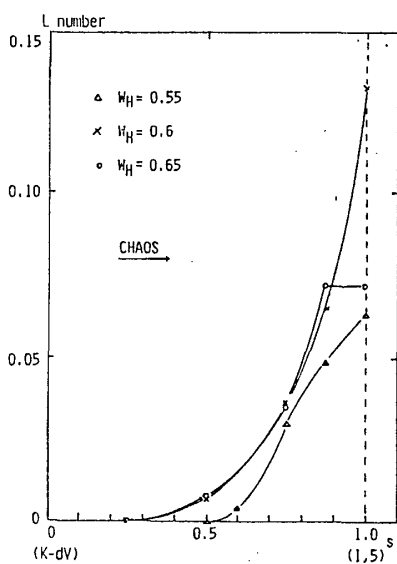


図-3 リアプノフ数と s , $\delta^2 = 4.84 \times 10^{-4}$, $\tau^2 = 7 \times 10^{-7}$ 。
 s は式(1)参照。

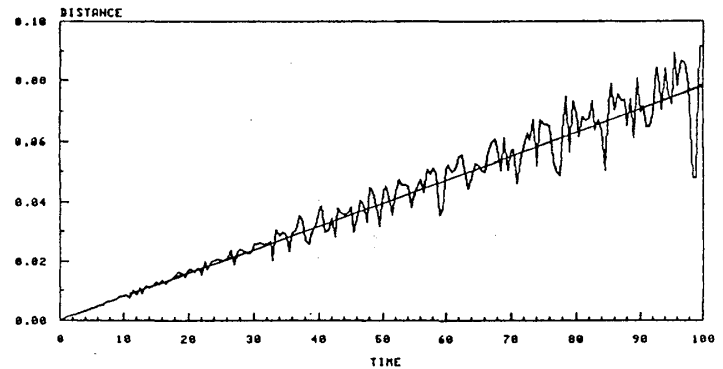


図-1. K-dV方程式における $d(t)/\Delta x$ 。直線は式(5)より求める。この図の場合のみ $\delta^2 = 1 \times 10^{-4}$ 。
 $W_H = 0.6$ 。

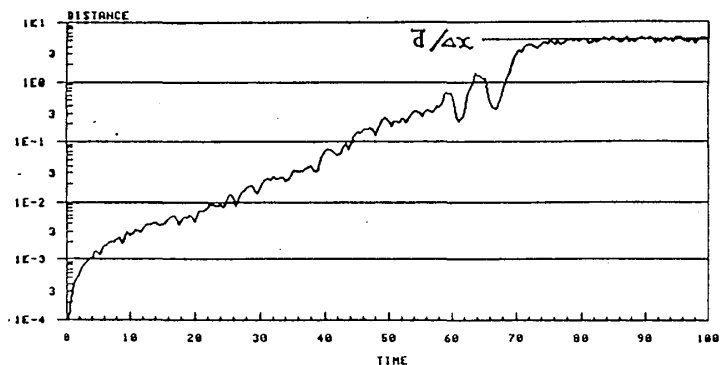


図-2. $s = 1$ (すなわち分散項は空間5階微分のみ)における $d(t)/\Delta x$ 。 $\bar{d}/\Delta x$ は式(6)で計算。 $W_H = 0.6$, $\Delta x = 1/50$ 。

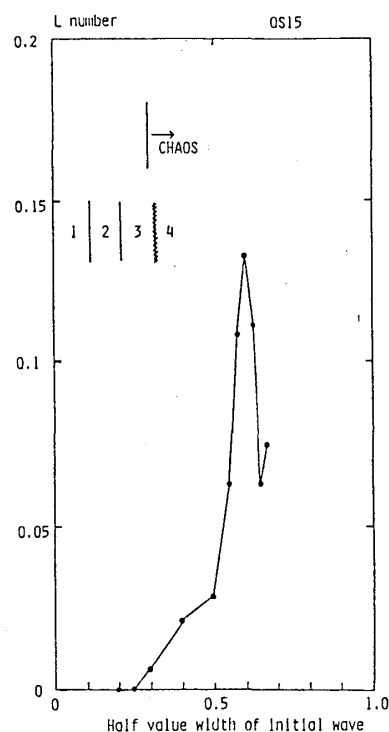


図-4 リアプノフ数と W_H , $s = 1$ 。

この図よりK-dV方程式に5階微分の項が付加される度合が増すにつれカオス状態へ移行することが分る。

また図-4には $s=1$ の場合(5階の空間微分のみ)について、初期波形の半値幅 $\mathcal{W}_H$ を変化させた場合の最大リアプノフ数 L の変化を示してある。 L は $\mathcal{W}_H$ が増加するとある値で正となる。この L が正となり始める $\mathcal{W}_H$ の値は、孤立波が3個生成する初期波形であり、5階微分を有する系では孤立波の三体衝突は不安定である事実を反映しているものと考えられる。¹⁾

結論として、この系においては、初期波形で定まる s_0 以上で L は正となり、カオス状態となり、カオス状態は非可積分系の孤立波の個性を保存しない衝突によって生ずる。

参 考 文 献

- 1) H. Nagashima and M. Kuwahara: J. Phys. Soc. Jpn. **50** (1981) 3792.
- 2) K. Yoshimura and S. Watanabe: J. Phys. Soc. Jpn. **51** (1982) 3028.
- 3) G. Benettin, L. Galgani and J. Strelcyn: Phys. Rev. **A14** (1976) 2338.

相 関 関 数 の 理 論

東大・教養物理 十 河 清

§1. はじめに

量子可積分系の研究にとって、量子逆散乱法(QISM)という手法は、次のようなめざましい良い特徴を持っている。(1) Bethe statesの代数的構成(Bethe仮説の代数化!)を可能にする。(2) S行列の因子化理論をとおして新しい可積分系を発見できる。(3) 量子Gelfand-Levitan方程式を基にして相関関数の計算を可能にする。

1次元量子系と2次元古典系とのよく知られた対応があるので、上掲QISMの特徴(1)によって、基底状態エネルギー(分配関数)、素励起スペクトル(相関距離)など従来計算されてきたものを容易に再現することができる。¹⁾ また(2)の手法によって、新しく解けるモデルがつぎつぎと提出されてきている。²⁾

本稿の目的は、上掲(3)QISMによる相関関数の理論の現状を報告することである。ここではほとんど全ての性質(分配関数、秩序度、相関関数)が調べられている2次元Isingモデルを例にして、Sato-Miwa-Jimboの理論³⁾、McCoy-Wuの理論⁴⁾を述べる。これら2次元Isingモデル、1次元XYモデル、不透過Boseガスなど、一般にfree-fermion系と呼ばれる場合には、計算が厳密に遂行できるのである。Free fermion系は、QISMのworkする系