

数学基礎論入門 - 紹介シリーズ刊行計画について

河合文教研 倉田令二朗 (Reijiro Kunata)

① **発端** 「1995. 11月に行われた現代数学史研究集会(於津田塾大)において『数学基礎論における20世紀の総括と21世紀への展望』と報告せよ」との要請が杉浦光夫先生からあった(94. 8月).

② **共同** 名大-豊田-東北大その他のグループで上記テーマについて共同討議と深めつつ、数学基礎論全般に因する入門、先端紹介シリーズを共同製作しようとの合意が次第に形成された.

そこでまず数人が原稿を作成しはじめたことと決意、(後述)

この際 20世紀の総括をしようと純粹に客觀的に通くことは不可能でどうしても執筆者の現代的関心によつて偏向を受けざることは不可避である以上、むしろ積極的に現代的関心を表に出して自由に書くことを旨とし、用語、記号の統一、重複を避けるための制限は最小限にすることを申し合わせた.

注) 私の属する名大-豊田グループの現代的関心は $P=NP$ 問題を以てのとする算術的 Separation の問題である.

③ **古典の成立** 数学基礎論における古典といわれべきものはいつに誰によつて、いかに形成されたか 倉田個人として基礎論全般の内部

分を書く立場上 明確にしておく必要があるが、暫定的に次の流れを想定した。Post (1921), Löwenheim (1915), Skolem (1920, 22), Gödel (1930), Herbrand (1930), Gödel (1931) Tarski (1932), Gentzen (1935), Gödel (1938)

注1) Post (1921) とは 命題論理計算 に関すること

Löwenheim (1915) Skolem (1920) は Löwenheim Skolem の定理

Skolem (1922) とは

$A \equiv \forall x_1 \exists y, \forall x_2 \forall x_3 \exists y_2 B(x_1, y, x_2, x_3, y_2)$; B は quantifier free として

Skolem form と $\tilde{A} \equiv B(a_1, f(a_1), a_2, a_3, f_2(a_1, a_2, a_3))$ と f_1, f_2 は 新関数記号

Herbrand Universe と $H_0 = \{c\}$ (c は定数記号), $H_{p+1} = \{f_1(t_1), f_2(t_1, t_2, t_3)\} \mid t_1, t_2, t_3 \in H_p\}$

$H = \bigcup_{p=0}^{\infty} H_p$ とおく

$\tilde{A}$ が H 上 satisfiable $\Leftrightarrow \forall p (\tilde{A}$ は H_p 上 satisfiable)

このことにより、この完全性定理が出る

Gödel (1930) とは 完全性定理のこと

Gödel (1931) とは 不完全性定理のこと

Tarski (1932) とは Truth definition のこと

Gentzen (1935) とは Gentzen の基本定理のこと

Gödel (1938) とは $V=L$ AC, GCH, ZF に対する相対無矛盾性のこと

注2) 1936~43 の Kleene 等による general recursive function theory と古典に属するものに異議はない。ただ私の書く入りの部分にあっては主として

Primitive Recursive function, Predicate とし、詳細は後述の代に譲ることにする。趣旨

である。

④ その後、発展

Non standard model (60年初) Cohen (1963), Matiyasevič (1970) Cook (1975)

Paris Harington (1977), Buss (1986), Ajtai (1988).

(集合論にくわしく人なら当然 Martin Steel, Woodin 等 を加えよう)

Cohen の AC, GCH, ZF から独立性の証明は、問題の真偽決定による決着のつけ方以外の(しかも未来に開かれた)決着のつけ方を教える。

また Matiyasevič の結果は (Diophantine equation の整数解の存在と決定するアルゴリズムとを同一に扱う) 解答なし (アルゴリズムが存在しない) とする決着のつけ方を教えたが、その背景には Church Thesis が横たわっている。

Non standard method は応用数学とよく数学全般に影響を与えた。

Computer Science との関連は完全密接な関係にある recursion theory に大きな変化をもたらしたのみならず、Computer Science の基礎論化ともいえるべき Bounded Arithmetic の形成を通じて証明論的にもモデル論的にも研究されるようになった。

すなわち数学基礎論は他分野との関連を一段と深めると同時にさまざまな問題に対する決着のつけ方の新しい方法を提供することによって数学全体として無視することはできない。

い部門へと変換した。

注) Cook(1975) とは L_{sat} が NP -complete であること、つまり $\forall L \in NP (L \leq_m^P L_{sat})$
 i.e. $\exists f \in PTC (x \in L \Leftrightarrow f(x) \in L_{sat})$ を証明したことで、これは

$P = NP \Leftrightarrow L_{prov} \in P, NP = co-NP \Leftrightarrow L_{prov} \in NP$ が出た

現状と予定

⑤ 入門数学基礎論(倉田)

証明論入門, Skolem の定理と完全性定理, 原始帰納関数と述語,
 不完全性定理, 公理論的集合論 (3月末現在ほぼ終了)

⑥ 予定

倉田「Pigeon Hole Principle とその話題」

田中一之他「不完全性定理と逆数学」

篠田亨一「帰納的関数と述語」

坪井明人「モデルの理論(題未定)」

中村徹「フアインマン経路積分—インスタントの応用—」

[後記] こうしたことを研究集会で発表するのは例外的なことであるが、構想と内容

より御批判、御意見に待つべき期待と「それは自分にかける」という御
 仁の出現への期待の両方ありとて発表させていた。