応答解析のための模擬地震波の性質について

小堀鐸二・南井良一郎・井上　豊・竹内吉弘

ON SPECTRAL CHARACTERISTICS OF ARTIFICIAL EARTHQUAKES GENERATED FOR STRUCTURAL RESPONSE ANALYSIS

By *Takuji* KOBORI, *Ryoichiro* MINAI, *Yutaka* INOUE
and *Yoshihiro* TAKEUCHI

Synopsis

The artificial earthquakes desirable for the structural response analysis as the input data of earthquake excitations are generated by means of an electronic analog computer. The spectral characteristics of the artificial earthquakes prescribed by considering the vibrational ground characteristics are, first of all, represented as a linear transfer function. The response spectrum and the spectral density for such generated earthquakes are shown in figures calculated numerically from the ensemble averages in several cases. On the other hand, the relationship between this response spectrum and spectral density is also derived from the theoretical approach. Then the former result to response analysis is satisfactorily agreeable with the latter one to theoretical approach.

1. まえがき

建築構造物の合理的な耐震設計とは，予想される地震波外乱群に対して，構造物の各部の地震応答が耐震安全性を規定すべき第1義的に重要な尺度に関して，出来るだけ一様に，応答安全率を考慮して定めた許容値内に収まるような動力学特性を設計しようとする構造物に与えることである[1]。このような目的をもって地震波外乱群と構造物系の間の相関パラメータの広範な領域における概括的な応答解析の結果から適正動力学特性の分布を見出す研究がなされて来た[1)-8)]。これらの研究において地震波外乱と構造物系の間のパラメータを広い領域内で設定するのは，設計対象である構造物の選定が任意に行なえる必要と同時に，将来その建設予定地に生起する地震の非予測性から地震波外乱をそのパラメータの変動領域を考慮した一つの群として考えなければならないためである。

地震はその発震機構，震源位置，地震規模，伝播経路等の要因によって基盤におけるスペクトルについて見ても種々異なった複雑な様相を呈するものと予想されるが，地表もしくは地表付近の地中において観測された地震波には更に観測点付近の local な地下構造の影響も含まれて一層複雑になると考えられる[4),5)]。したがって，ある特定の地盤に限定してもその地点で将来観測され得る地震波を唯一の確定パターンとして定めることは困難な状態にあるといえる。しかしながら，構造物の耐震設計の立場からは，耐震安全性の検討を行なうために地震波外乱を想定する必要があり，過去に種々の異なった地盤で観測された強震記録，あるいはその地点で観測された小規模地震の振巾を拡大したもの等を地震波外乱として採用し，不明確な要素に対する安全性の考慮として周波数および振巾に関するパラメータの値を変動させて，比較的巾広い領域にお

ける地震応答から耐震安全性の検討を行なって来ている[1)-8)]。

一方，地表付近の地下構造による振動特性は弾性波探査，加振器等による強制振動試験等の方法によって実験的にも確かめることが出来[6),7)]，基盤から地表までの表層地盤の伝達特性をある程度知ることは可能となって来ている。この伝達特性と自然地震の記録のスペクトル解析の結果とを合わせて，地表付近において予想すべき地震波のスペクトル的な特性をある程度推定することは出来よう。そこで，この結果に更にその地点に建設される構造物の動力学特性との関係を考慮して，応答解析のために想定すべき地震波外乱群のスペクトルの特性を定めることが出来る。

本論文では，このようにして規定されたスペクトルの特性を有するような応答解析のための確率統計的な意味での等価地震波を作り，単純な擬定常確率過程に属するものとしての評価によってその性質を考察するとともに，このようにして作られた地震波外乱による最も簡単な振動系である1質点系の速度応答スペクトラを描いて，応答スペクトラの上からもその性質を考察しょうとしたものである。すなわち，地震波外乱の規定されたスペクトルの特性を，取り扱いが便利なように近似伝達関数で表現し，analog 計算機上の回路に模擬して，電子管式の noise generator の出力から電気的に模擬地震波を得，そのスペクトル密度，振巾確率密度を求め，また analog 計算機によって1質点系の弾性応答を計算し検討を加える。入力のスペクトル密度と応答スペクトラとの関係については既に幾つかの研究がなされて来ているが[8)-11)]，本論文では非定常出力に対してある等価的な意味での定常化出力を定義し，定常確率過程の ergode 性を仮定して空間領域での最大値と時間領域での最大値を等置して平均応答スペクトラの半解析的表現を行ない，この解析によって得られた数値を適用して入力のスペクトル密度と応答スペクトラの関係を論ずる。

2. 入力の速度スペクトルの simulation

ある構造物の建設予定地における地盤の振動特性と seismicity とから，その地点に将来起るであろうと予想される地震の確率統計的な意味でのスペクトルの特性を規定して，構造物の耐震設計を行なうにあたって，そのような地震波外乱に対して構造物の応答性状を stochastic な手法で把握するとともに，実際の設計法と結びつけ易い応答量を定めることが必要となる。したがって，規定されたスペクトルの特性を有するような地震波外乱を確率統計的パターンとして求めるために，ここで用いたのは，電子管式の noie generator の出力を white noise 入力として，規定されたスペクトルの特性から近似された伝達特性を有する系を通

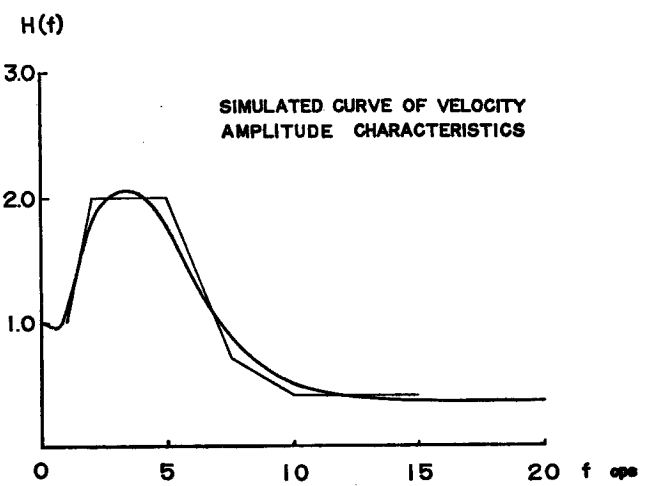

Fig. 1 Prescribed velocity amplitude spectrum and simulated velocity amplitude spectrum.

して得られる出力を採用する方法である。**Fig. 1** に示されている折線はここで規定された速度振巾のスペクトルの特性で 1～15 cps の領域のみで定義されている。これを取り扱いが便利なように有理関数形の伝達関数で近似するには次の方法が考えられる[12),13)]。

与えられたスペクトルの特性を $A(\omega)$ とし，

$$A^2(\omega)\simeq|\phi(j\omega)|^2,\ A^2(0)=1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

で表わし，これを

$$A^2(\omega)\simeq\prod_{i=1}^{n}B_i\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right) \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$B_i\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)=\frac{1+\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^{2\beta_i}}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)^{2\alpha_i}} \qquad \cdots\cdots(3)$$

で近似する。ここに α_i, β_i は整数を示す。したがって

$$\phi(j\omega)=\prod_{i=1}^{n}C_i\left(\frac{j\omega}{\omega_j}\right) \qquad \cdots\cdots(4)$$

あるいは

$$\phi(s)=\prod_{i=1}^{n}C_i\left(\frac{s}{\omega_i}\right) \qquad \cdots\cdots(5)$$

と表わすことが出来る。ここに

$$\left.\begin{aligned}&B_i(\omega)=C_i(j\omega)C_i^*(j\omega)\\&C_i(j\omega)=\frac{\prod_{\nu=1}^{\beta_i}(j\omega-j\lambda_\nu)}{\prod_{\kappa=1}^{\alpha_i}(j\omega-j\lambda_\kappa)},\ \mathbf{I}(\lambda_\nu)>0,\ \mathbf{I}(\lambda_\kappa)>0\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(6)$$

であり，λ は（3）の根でその虚数部，$\mathbf{I}(\lambda)$，の正のものである。

$$\left.\begin{aligned}&1+\lambda^{2\gamma}=0,\ \gamma=\alpha_i \text{ または } \beta_i\\&\lambda_\nu=\cos\{\pi(1+2\nu)/2\gamma\}+j\sin\{\pi(1+2\nu)/2\gamma\}\\&\nu=0.1,2,\cdots,\ \gamma-1\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

で表わされる。ここで ω_i と対応する整数 k_i は次式から近似的に求められる。

$$\left.\begin{aligned}L(\omega)&=10\log_{10}A^2(\omega)\\&\simeq10\sum_{i=1}^{n}\log_{10}B_i\left(\frac{\omega}{\omega_i}\right)\\&\simeq20\sum_{i=1}^{n}(\beta_i-\alpha_i)(\log_{10}\omega-\log_{10}\omega_i)s(\omega-\omega_i)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(8)$$

ここに $s(\omega)$ は step function を表わす。（8）は規定されたスペクトルの特性を示す伝達関数の絶対値の自乗を常用対数で表わした関数 $L(\omega)/20$ と，同じく常用対数で表わした ω を選んで，整数勾配を有する折線のみで近似すれば接合点と勾配差によって順次 ω_i と k_i が定まることを示している。この方法には α_i, β_i が整数に限られるために精度の向上にはやや難点があるが，本論で採用した例では（9）の形で示され，その近似度は **Fig. 1** にも見られるように可成り良好であると考えて良い。

$$\left.\begin{aligned}&|\phi(j\omega)|^2=\phi(j\omega)\phi^*(j\omega)=\frac{\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^4\right\}\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_4}\right)^6\right\}}{\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2\right\}\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^4\right\}\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_3}\right)^6\right\}\left\{1+\left(\frac{\omega}{\omega_4}\right)^2\right\}}\\&\omega_1=2\pi,\ \omega_2=3.6\pi,\ \omega_3=10.4\pi,\ \omega_4=22\pi \text{ rad/sec}\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(9)$$

なお，**Fig. 1** の $H(f)$ は次式で定義されている。

$$H(f)=|\phi(j2\pi f)| \quad \cdots\cdots(10)$$

(10) において $j\omega=s$ とおくと

$$\left.\begin{aligned}\phi(s)&=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\omega_1}s+\frac{1}{\omega_1^2}s^2\right)\left(1+\frac{1}{\omega_2}s\right)\left(1+\frac{1}{\omega_4}s+\frac{1}{\omega_4^2}s^2\right)}{\left(1+\frac{1}{\omega_1}s\right)\left(1+\frac{\sqrt{2}}{\omega_2}s+\frac{1}{\omega_2^2}s^2\right)\left(1+\frac{1}{\omega_3}s+\frac{1}{\omega_3^2}s^2\right)}\\&\equiv\frac{1+b_1s+b_2s^2+b_3s^3+b_4s^4+b_5s^5}{1+a_1s+a_2s^2+a_3s^3+a_4s^4+a_5s^5}\equiv\frac{E_0(s)}{E_i(s)}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(11)$$

$$\left.\begin{aligned}E_0(s)=&\frac{a_5}{b_5}E_i+\frac{a_4}{b_5}\frac{1}{s}\left[E_i-\frac{b_4}{a_4}E_0+\frac{a_3}{a_4}\frac{1}{s}\left[E_i-\frac{b_3}{a_3}E_0\right.\right.\\&\left.\left.+\frac{a_2}{a_3}\frac{1}{s}\left\{E_1-\frac{b_2}{a_2}E_0+\frac{a_1}{a_2}\frac{1}{s}\left(E_i-\frac{b_1}{a_1}E_0+\frac{1}{a_1}\frac{1}{s}(E_i-E_0)\right)\right\}\right]\right]\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(12)$$

の表現が得られ，これを analog 計算機上の演算回路に模擬すると **Fig. 2** の block diagram に描いたようになる。

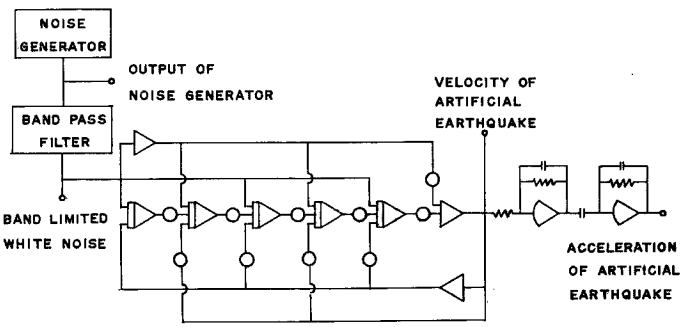

Fig. 2 Block diagram of generation of artificial earthquake.

なお，規定された地震波外乱のスペクトルの特性は速度振巾に関するものであり，上記の伝達関数を通して得られる速度波形を analog 計算機の演算要素を用いて微分操作を行ない，加速度波形を得るほうが応答解析のために便利である。したがってここでは

$$\frac{s}{(1+C_1s)(1+C_2s)},\quad C_1, C_2\ll 1$$

で与えられる近似的な伝達特性を有する回路によって微分を行ない加速度波形を得た。ここに C_1, C_2 は回路の安定化のために必要な定数で，本解析では

$$C_1=C_2=2.5\times10^{-3}\ \text{sec} \quad \cdots\cdots(13)$$

に選んである。

' このようにして作られた模擬地震波の波形の一例を，後述される case 5 について **Fig. 3** に示す。図中の各波形の振巾は任意の倍率で描いてある。

また，ここでは速度振巾のスペクトルの特性から近似伝達特性を評価したが，加速度振巾についても同様の手法を用いることが出来るが，この場合は通常一層複雑な形を示すので更に次数の高い関数形を用いる必要があり，近似度がそれによって低下するおそれがあるので，ここでは速度振巾に関するものを採用して，その後に微分操作を行なう手順によった。

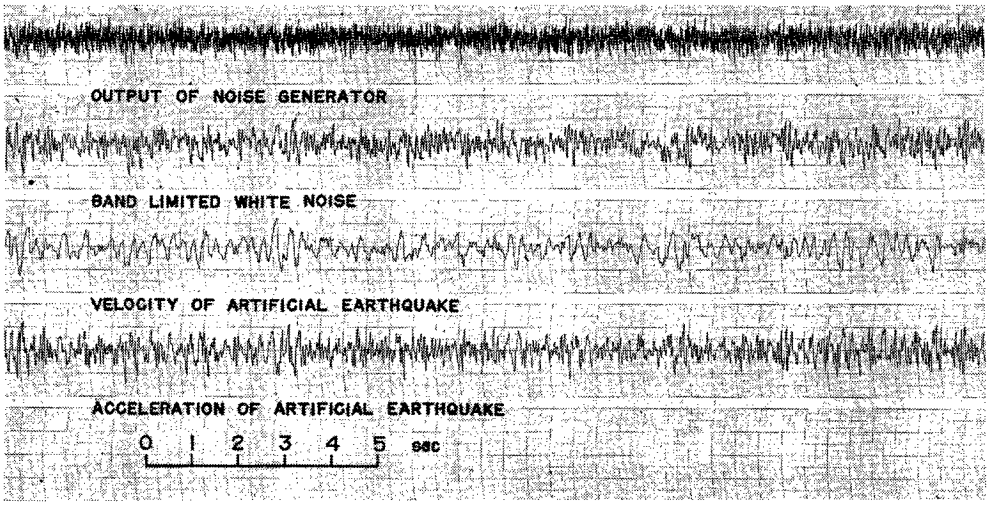

Fig. 3　An example of generated artificial earthquake.

3. 模擬地震波のスペクトル密度の検討

前節に述べた方法を用いて，noise generator の出力を近似伝達特性に通して得られた等価な模擬地震波が，どの程度の精度で得られているかを検討するために，そのスペクトル密度を次のようにして求める[14]。

analog 量として得られている波形を適当な微小時間間隔 $\Delta\tau$ 毎に sampling して得られる振巾の series を $\{\bar{F}^j\}$, $j=0,1,2,\cdots,N$ とする。ここにNは

$$\Delta\tau=\frac{\tau_d}{N-1} \quad \cdots\cdots(14)$$

で与えられ，波形の継続時間 τ_d における両端を含む分割点の総数を示す。$\{\bar{F}^j\}$ に絶対値の最大値が1，平均値が0となるように normalizing と balancing を行なって得られる series を $\{F^j\}$ とし，これを折線で結んで得られる無次元波形関数を $\bar{A}(\nu)$ とすると次のように書ける。

$$\bar{A}(\nu)=\sum_{j=1}^{N}\{F^{j-1}+(F^j-F^{j-1})(\nu-(j-1))\}\{s(\nu-(j-1))-s(\nu-j)\} \quad \cdots\cdots(15)$$

$$E(\bar{A}(\nu))=\frac{1}{N}\int_0^N\bar{A}(\nu)d\nu=E(\{F^j\})=0 \quad \cdots\cdots(16)$$

$$|\bar{A}(\nu)|_{max}=|F^j|_{max}=1 \quad \cdots\cdots(17)$$

$$\{F^j\}=\frac{\{\bar{F}^j-E(\{\bar{F}^j\})\}}{|\bar{F}^j-E(\{\bar{F}^j\})|_{max}},\quad E(\{\bar{F}^j\})=\frac{1}{N}\left\{\frac{\bar{F}^0+\bar{F}^N}{2}+\sum_{k=1}^{N-1}\bar{F}^k\right\} \quad \cdots\cdots(18)$$

ここに $s(\nu)$ は step function で次の性質を有する。

$$s(\nu)=\begin{cases}0, & \nu<0\\ \frac{1}{2}, & \nu=0\\ 1, & \nu>0\end{cases} \quad \cdots\cdots(19)$$

また，(18)，(19) のEはνに関する平均を示す。

無次元化された波形関数を得るために次の変換を行なっている。Tを有次元の時間として，

$$A(T)=\bar{A}(\nu),\quad T=\lambda\Delta\tau\nu \quad \cdots\cdots(20)$$

とする。ここに λ は time 変換の係数である。さて時間領域，$[0,T_d]$ で定義された波形関数を定常化する

ために次式の $As(T)$ を導入する。

$$\left.\begin{aligned} &As(T)=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} A_0(T-\mu T_d),\ A_0(T)=A\left(T+\frac{T_d}{2}\right)\\ &A_0(T)\neq 0,\quad |T|\leqq\frac{T_d}{2}\\ &A_0(T)\equiv 0,\quad |T|>\frac{T_d}{2}\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(21)$$

(22) を用いて自己相関関数は次のように表わされる。

$$R_S(T)=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{1}{2\lambda}\int_{-\lambda}^{\lambda} As(t)As(t+T)dt=\sum_{\mu=-\infty}^{\infty} R_{r0}(T-\mu T_d) \cdots\cdots(22)$$

ここに $R_{r0}(T)$ は

$$R_{r0}(T)=\frac{1}{T_d}\int_{-\frac{T_d}{2}}^{\frac{T_d}{2}} A_0(t)\sum_{\mu=-1}^{1} A_0(t+T-\mu T_d)dt\left\{s\left(T+\frac{T_d}{2}\right)-s\left(T-\frac{T_d}{2}\right)\right\} \cdots(23)$$

$$=hR_{r0}(T)+hR_{r0}(-T) \cdots\cdots(24)$$

$$hR_{r0}(T)=R_{r0}(T)\left\{S(T)-S\left(T-\frac{T_d}{2}\right)\right\} \cdots\cdots(25)$$

で与えられる。あるいは

$$R_{r0}(T)=\sum_{\mu=-1}^{1} R_{f0}(T-\mu T_d)\left\{s\left(T+\frac{T_d}{2}\right)-s\left(T-\frac{T_d}{2}\right)\right\} \cdots\cdots(26)$$

ここに

$$\left.\begin{aligned} &R_{f0}(T)=\frac{1}{T_d}\int_{-\frac{T_d}{2}}^{\frac{T_d}{2}} A_0(t)A_0(t+T)dt\\ &R_{f0}(T)\neq 0,\quad |T|\leqq T_d\\ &R_{f0}(T)\equiv 0,\quad |T|>T_d\end{aligned}\right\} \cdots\cdots(27)$$

である。したがってその Fourier 変換で与えられるスペクトル密度は

$$R_S(T)\supset S_S(\omega)=S_{r0}(\omega)(1+2\sum_{\mu=1}^{\infty}\cos\mu T_d\omega) \cdots\cdots(28)$$

$$R_{r0}(T)\supset S_{r0}(\omega)=2\int_0^{\frac{T_d}{2}} R_{r0}(T)\cos\omega T dT \cdots\cdots(29)$$

$$R_{f0}(T)\supset S_{f0}(\omega)=2\int_0^{\frac{T_d}{2}} R_{f0}(T)\cos\omega T dT=\frac{1}{T_d}F_0(j\omega)|^2 \cdots\cdots(30)$$

ここに $F_0(j\omega)$ は $A_0(T)$ の Fourier 変換を表わす。

$$A_0(T)\supset F_0(j\omega)=\int_{-\frac{T_d}{2}}^{\frac{T_d}{2}} A_0(T)e^{-j\omega t}dT \cdots\cdots(31)$$

これらを time 変換の係数を用いて ν に対応する無次元領域で表現した関数には上に bar をつけて表わすものとする。すなわち

$$hR_{r0}(T)=h\bar{R}_{r0}(\nu) \cdots\cdots(32)$$

同様にして (20) に対応する変換をスペクトル密度について行なうと

$$\omega=w/(\lambda\Delta\tau) \cdots\cdots(33)$$

に対して，

$$S_p(\omega)=\lambda\Delta\tau\bar{S}_p(w),\quad p=s, r_0, f_0 \qquad (34)$$

したがって，例えば，

$$\bar{R}_{r0}(\nu)\supset\bar{S}_{r0}(w)=2\int_0^{\frac{N}{2}} {}_h\bar{R}_{r0}(\nu)\cos w\nu d\nu \qquad (35)$$

を得る。ここで ${}_h\bar{R}_{r0}(\nu)$ は次のような階段形の関数で与えるものとすると $\bar{S}_{r0}(w)$ は (38)，(39) で表わされる。

$${}_h\bar{R}_{r0}(\nu)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}A_k\{A_{[k+\nu]}+A_{[k+\nu-N]}\}\left\{s(\nu)-s\left(\nu-\frac{N}{2}\right)\right\} \qquad (36)$$

$$\left.\begin{aligned}&A_k=\frac{1}{2}\{A(k-1)+A(k)\},\quad k=1, 2, \cdots, N\\&A_k\equiv 0,\quad k<0 \text{ および } k>N\end{aligned}\right\} \qquad (37)$$

N：偶数

$$\left.\begin{aligned}\bar{S}_{r0}(w)=2\sum_{\mu=0}^{\frac{N}{2}-1}{}_h\bar{R}_{r0}(\mu)\frac{\sin\frac{w}{2}\cos\mu w}{\frac{w}{2}}\\+2{}_h\bar{R}_{r0}\left(\frac{N}{2}\right)\frac{\sin\frac{w}{4}\cos\left(\frac{N}{2}-\frac{1}{4}\right)}{\frac{w}{4}}\end{aligned}\right\} \qquad (38)$$

N：奇数

$$S_{r0}(w)=2\sum_{\mu=0}^{\frac{N-1}{2}}{}_h\bar{R}_{r0}(\mu)\frac{\sin\frac{w}{2}\cos\mu w}{\frac{w}{2}} \qquad (39)$$

本論文における解析では模擬地震波の周波数関係に注目し，**Table 1** に示す5つの異なった周波数特性を与えた場合を想定した。

Table 1　The list of spectral characteristics.

	Band Width of Frequency	Amplitude Characteristics	Number of Sample
case 1	0.45 cps～17.75 cps	$H(f)$	7
case 1′	〃	〃	14
case 2	0.45 ～14.0	〃	7
case 3	0.45 ～11.25	〃	〃
case 4	0.45 ～14.0	$\tilde{H}(f)$	〃
case 5	0.1125 ～14.0	$H(f)$	14

ここで用いた noise generator の出力は，振巾は正規分布，周波数は 0.02 cps～24 cps で一様な power を有すとされており，設定すべき周波数巾を band pass filter を通すことによって与えた。この band pass filter は LC 方式よるもので，その傾度は 40 db/oct とされている。したがって band 巾の下限に比較して上限は周波数比に対応して cutoff の特性が低いものと考えられる。また，case 4 として用いた速度振巾の周波数特性 $\tilde{H}(f)$ は 2～5 cps の部分の power を相対的に高くするために **Fig. 4** の実線で示されるよ

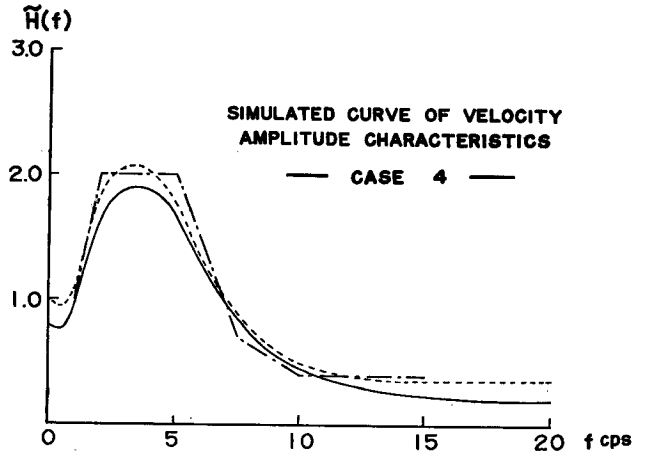

Fig. 4 Simulated velocity amplitude spectrum in case 4.

うに $H(f)$ を全領域に亘ってほぼ一様に引き下げた場合で，(12) に対応する伝達関数表示では

$$\tilde{\phi}(s)=\phi(s)-0.2 \quad \cdots\cdots(40)$$

で表わされる。case 1 と case 1′ とは周波数特性は同一であるが，case 1 に対して更に同数の sample を合わせて評価した場合が case 1′ である。

このようにして設定された五つの case における band limited white noise，模擬地震波の速度波形に対応する各 ensemble の平均スペクトル密度が **Figs. 5～8** に示されている。各 case に含まれる7個あるいは14個の sample はそれぞれ30秒の継続時間を有し，case 1～4 については殆んど全継続時間を評価しているが，case 5 については約24秒間の評価である。すなわち case 1～4 ではその波形から 2.5 msec 毎に sampling を行なって相関関数を求め，その遅延時間 640 msec までを用いて Fourier 変換してスペクトル密度を評価した。case 5 については約 10.83 msec 毎の sampling を行なって2200点（約24秒間）に関して Fourier 変換を行ないその絶対値の自乗の時間平均としてスペクトル密度を評価した。**Figs. 5～8** は各々の自乗平均値を1として各 case についての ensemble 平均を求めて描いてある。

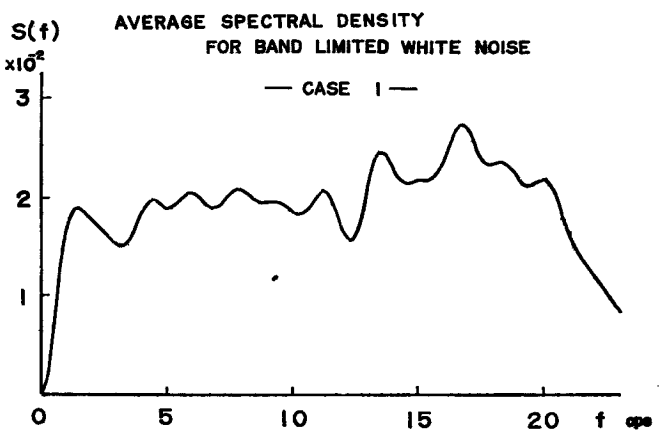

Fig. 5 Average spectral density for band limited white noise in case 1.

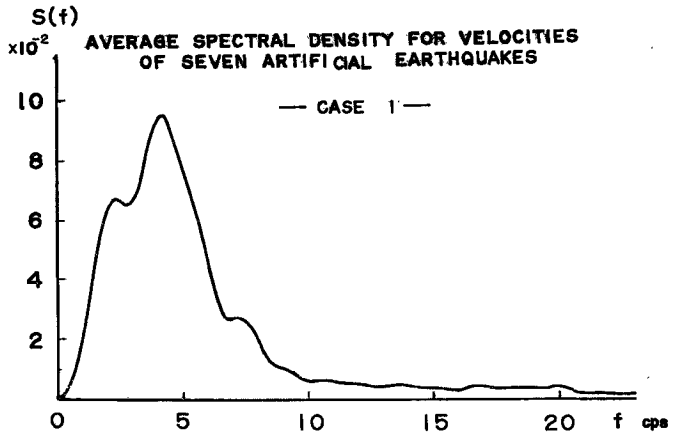

Fig. 6 (a) Average spectral density for artificial earthquake velocity in case 1.

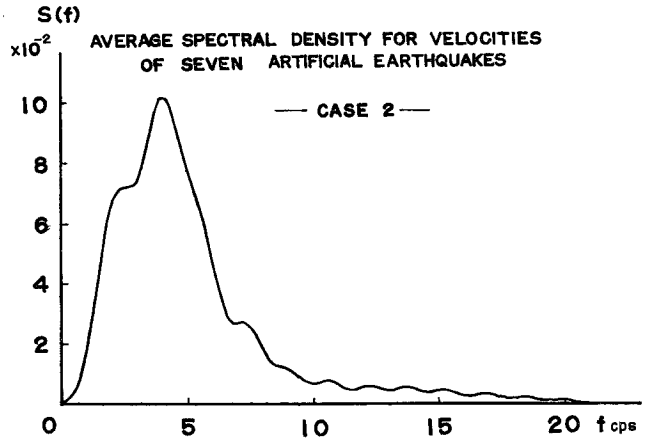

Fig. 6 (b) Average spectral density for artificial earthquake velocity in case 2.

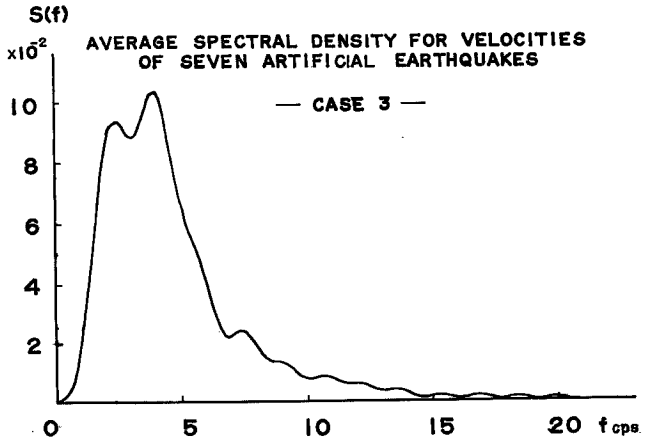

Fig. 6 (c) Average spectral density for artificial earthquake velocity in case 3.

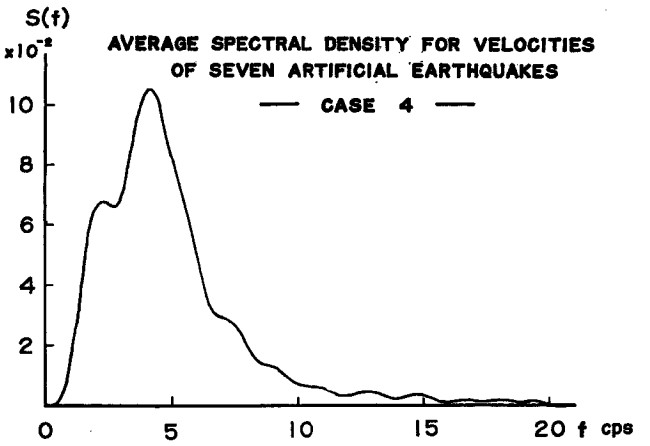

Fig. 6 (d) Average spectral density for artificial earthquake velocity in case 4.

Fig. 5 は band 巾 0.45～17.75 cps に設定された band limited white noise についてのスペクトル密度で，case 1 として用いた波形の評価である。1～14 cps では大略平坦な特性と見なし得るが，17 cps 付近では low pass filter の遮断周波数に関する heaving の影響で power がやや高くなっている。また，ここで用いた filter の特性から下限の 0.5 cps 付近の傾度に比較して上限の傾度は非常に緩やかで，power が 1/2 となる点は 22.5 cps 付近で，遮断周波数の約 1.27倍となっている。

Figs. 6 (a)～(d) は模擬地震波の速度波形のスペクトル密度を示したもので，case 1～3 では周波数 band の上限に対応して 10 cps 以上の部分の power の減少の傾向が顕著であり，band 巾が狭くなるにしたがって peak を示している 4 cps 近傍の power が相対的に高くなっている。また case 4 では peak 近傍の power は case 3 にほぼ等しいが，10 cps 以上での減少の傾向がやや弱まっている。したがってそれぞれの case について意図した周波数特性は概ね満足された模擬地震波が得られたと考えられる。一方 **Fig. 7** に示された case 1 についての加速度波形のスペクトル密度では，最大の peak は 5 cps 近傍にありさらに band の上限よりやや高い 18～20 cps 付近にも power で 5 cps 近傍の 1/2 程度の peak を有している。**Fig. 8** は case 5 の加速度波形のスペクトル密度を波形の Fourier 変換の結果から評価して描いたものである。自己相関関数を通して評価した場合に比較すると，smoothing がなされていないために 14個の sample による enemble 平均では未だ激しい変動を示している。しかし概略の傾向としては，4～5 cps が

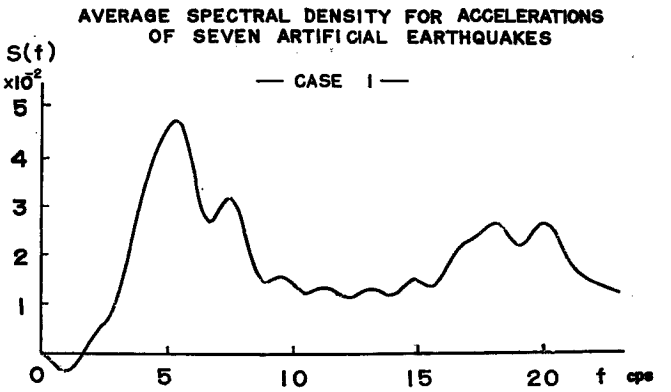

Fig. 7 Average spectral density for artificial earthquake acceleration in case 1.

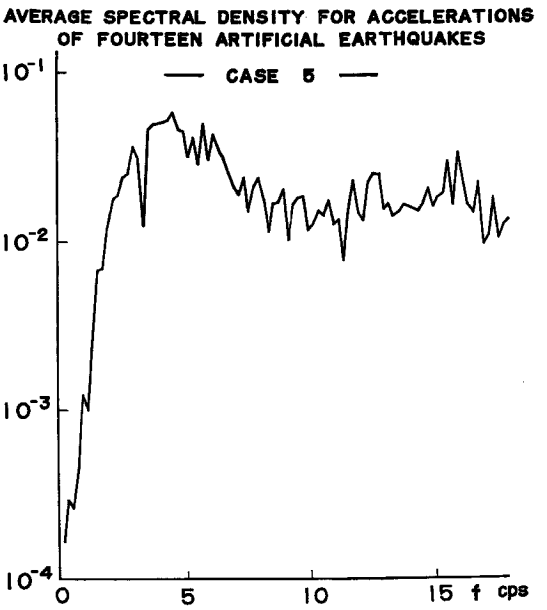

Fig. 8 Average spectral density for artificial earthquake acceleration in case 5.

最大の peak であることは他の case と同様で，15～16 cps が第2の peak となっており，band 巾の上限にあたる周波数が case 1 に比較して約 4 cps 低いことから良い一致を得ているといえる。

また，模擬地震波の振巾確率密度を case 5 の加速度波形について **Fig. 9** に示す。14個の sample 全体に対して normalizing と balancing を行なってある。絶対値の最大値が1で有界であることを除くと正規分布と非常に良い一致を示している。すなわち，模擬地震波を得るために，線形伝達特性を有する系の入力として用いた noise generator の出力の振巾確率密度分布は，正規分布に極めて良く一致していることが確かめられた。

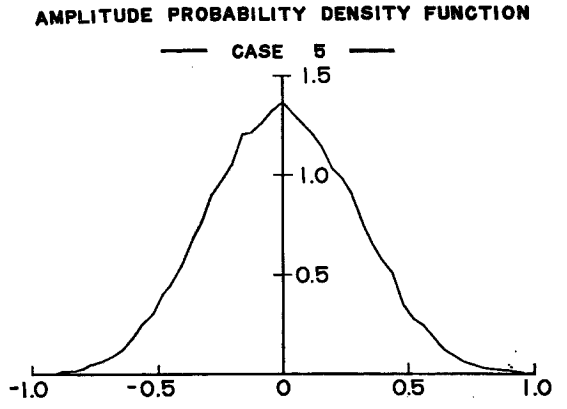

Fig. 9 Average amplitude probability density for artificial earthquake acceleration in case 5.

4. 模擬地震波の速度応答スペクトラ

既に述べたような方法で種々の周波数特性を有する応答解析のための模擬地震波を得て，その確率統計的な評価としてスペクトル密度の観点から考察を加えたが，これらの模擬地震波が構造物系の地震応答特性から見た場合にどのような性質を有するかを，最も直截的にみるために，弾性1質点系の速度応答スペクトラ[15),16)]を評価する。この速度応答スペクトラは入力波の周波数特性に密接に関与する量であると同時に，modal analysis によって弾性多自由度系の非定常解析における最大応答の推定，したがって構造物の弾性領域における耐震安全性の検討に重要な意義を有する量である。

ここでは各 case に含まれる7個あるいは14個の模擬地震波の継続時間を30秒，加速度振巾の絶対値の最大値を 100 gal として analog 計算機によって最大変位応答を求め，無減衰系の固有角周波数を乗じたものとして速度応答スペクトラ S_V を定義し，その各 ensemble における平均から平均速度応答スペクトラを描き **Figs. 10 (a)～(f)** に示す。横軸は無減衰系の固有周波数を示し，パラメータには臨界減衰比を選んである。

一般的な傾向としては模擬地震波の速度波形あるいは加速度波形のスペクトル密度から推定されるように4～5 cps 近傍が最大値であり，$h=0$ の場合はその peak が幾分周波数の高い側に寄っている。また周波数に関しては，$0.005 \leqq h \leqq 0.05$ の減衰を含む系では減衰比によって量的には異なってはいるが変動の傾向はほぼ一致している。一方，$h=0$ の場合は周波数に関する変動の傾向は激しく，また，低周波数域に比較して peak を示す 5 cps 以上では $h>0$ の場合から大きく距たる傾向にあり，地震波入力の継続時間と系の固有周波数の関係から，想定した入力に対しては減衰系の応答がこの領域で直ちに定常化することから説明される。case 1～3 における地震波入力の周波数 band の上限の応答スペクトラに及ぼす影響は **Figs. 10 (a)～(d)** から明らかなように，この帯域における応答量の比較的顕著な減少となって現われている。case 4 に関しては case 2 の 4～5 cps 近傍の weight を増し 12 cps 以上については減少させるような効果を持たせたために，case 2 と case 3 の中間的な傾向となって来ている。case 5 は case 2 の周波数 band の下限を低い側に移動させた場合で，4～5 cps 以上の高周波数域では量的にもほぼ一致しているが，peak より左側では減少が緩やかになっている。量的な比較を 4～5 cps の peak について行なった結果を **Table 2** に示す。

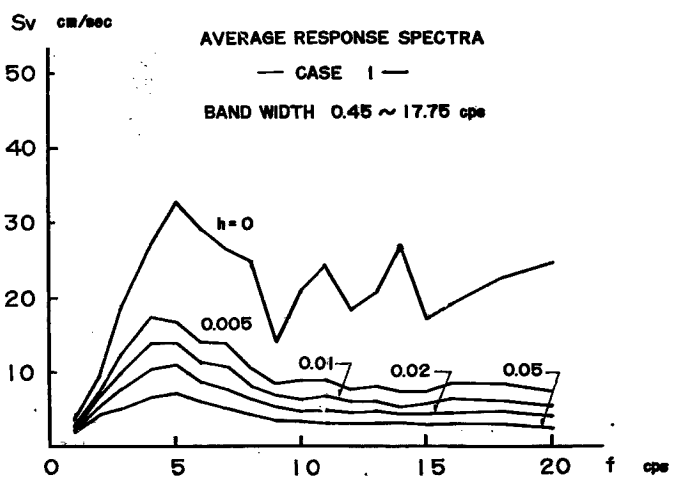

Fig. 10 (a) Average velocity response spectra in case 1.

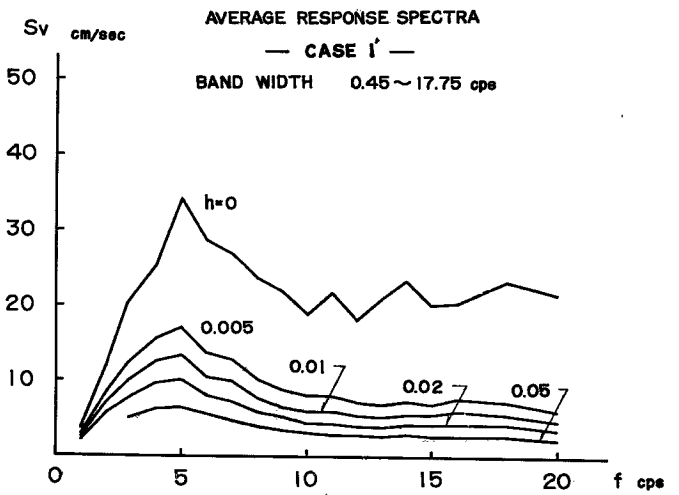

Fig. 10 (b) Average velocity response spectra in case 1'.

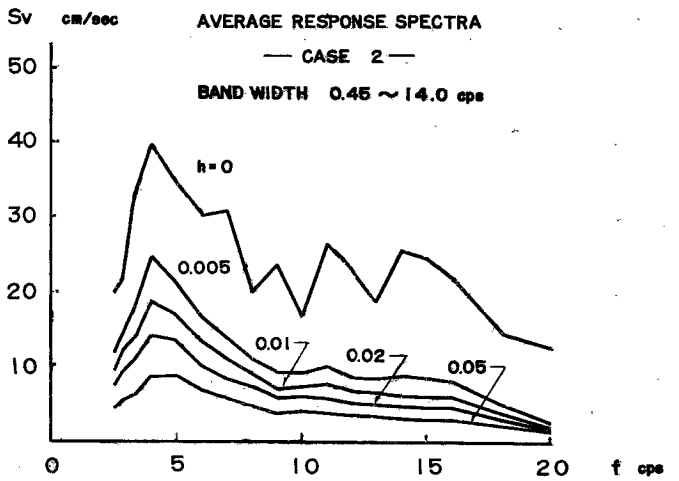

Fig. 10 (c) Average velocity response spectra in case 2.

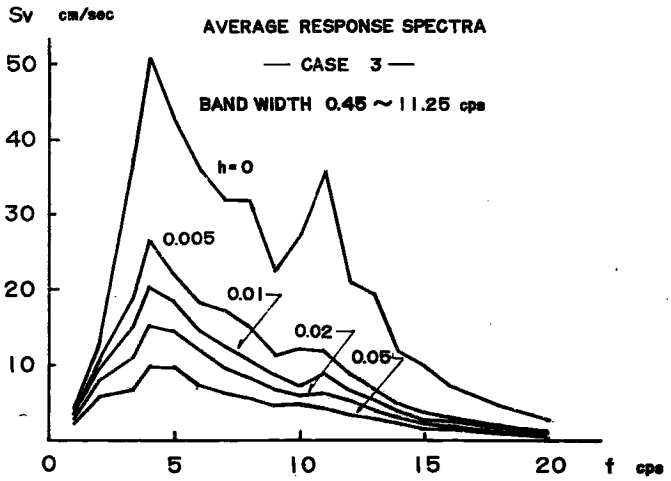

Fig. 10 (d) Average velocity response spectra in case 3.

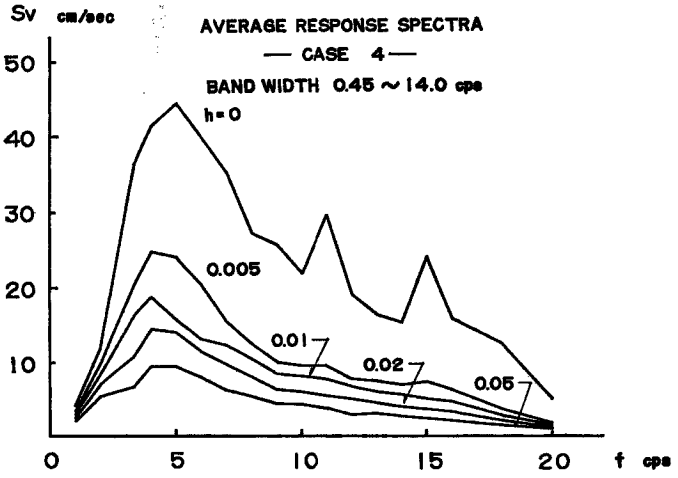

Fig. 10 (e) Average velocity response spectra in case 4.

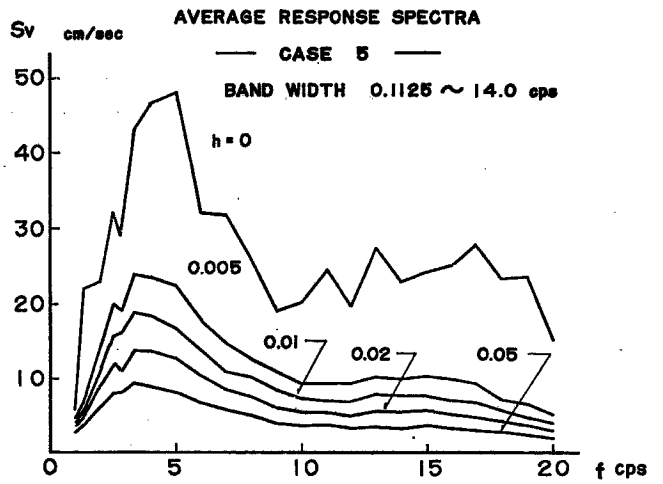

Fig. 10 (f) Average velocity response spectra in case 5.

Table 2 Comparison of maxima of average response spectra.

	h	case 1′	case 2	case 3	case 4	case 5	$av.$
max $(S_V)_{av}$	0	38.7	39.6	51.5	43.9	48.1	
	0.005	19.2	24.9	26.9	24.8	23.9	
	0.01	14.9	18.9	20.4	19.0	18.8	
	0.02	11.4	14.3	15.4	14.7	13.8	
	0.05	7.3	9.2	10.0	9.6	9.3	
Ratio to case 1′	0	1.0	1.02	1.33	1.13	1.24	
	0.005	1.0	1.30	1.40	1.29	1.25	
	0.01	1.0	1.27	1.37	1.27	1.26	
	0.02	1.0	1.26	1.35	1.29	1.21	
	0.05	1.0	1.26	1.37	1.32	1.27	
	$av.$ for $h>0$	—	1.27	1.37	1.29	1.25	
Ratio to $h=0.005$	0	2.02	1.59	1.91	1.77	2.01	1.90
	0.005	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	—
	0.01	0.78	0.76	0.76	0.77	0.79	0.78
	0.02	0.60	0.58	0.57	0.59	0.58	0.59
	0.05	0.38	0.37	0.37	0.39	0.39	0.38

各 case についての比較では，周波数 band の上限の影響が顕著で，case 2, 3 でそれぞれ case 1′ の 27%，37%の増加となっている。また，case 4 では周波数 band 巾を case 2 に等しくしてあるが，高周波数に対する weight を小にしたために case 2 に比較してやや大である。一方 case 5 は case 2 この下限周波数を引き下げたために peak ではわずかに小となる傾向を有している。peak 付近の周波数に対する応答には，ここで設定した周波数 band の上下限が及ぼす直接の効果は少ないと考えられるので，これらの傾向は地震波入力の周波数 band の巾の最大加速度振巾に対する効果，もしくは加速度波形の自乗平均値を一定とした場合に周波数 band の狭い方が相対的に peak 付近の power が高くなるためと考えられる。ここに採用した5種の case における周波数特性は，大局的に見た場合は比較的類似した周波数帯域を対象としており，最大値と自乗平均値の関係についてほぼ等しいと考えることは妥当であろう。ここで $h=0$ の場合を除外して考えたのは，無減衰系の応答は比較的変動が大であり，特に sample 数が少ない時はその信頼性が小であろうと判断したためである。

また，sample 数の平均応答スペクトラに及ぼす影響は case 1 と case 1′ あるいは case 5 に示されるように，$h=0$ の周波数に関する応答量の変動の平滑化が sample 数が大のときに顕著であるが，$h \geqq 0.005$ の減衰を有する場合は，sample 数が7個としても既に平滑化された変動となっており，その効果は小さいといえる。

つぎに，ここで採用した継続時間30秒が減衰比の値に対する応答量にどのような効果を有しているかを調べるために，case 1′ についてその最大応答の生じた時間の頻度分布を **Fig. 11** に示す。系の固有周波数については，$h \ll 1$ で，且つ周波数の極く低い領域を除いては殆んど同一視出来るので，ここでは固有周波数 1～20 cps の系について同一集団に属すると考えている。図から明らかなように $h=0$ の場合は継続時間の終りの部分に集中しているのに対して，$0.05 \geqq h \geqq 0.005$ の減衰量を有する場合には，本解析で模擬地震波の作製にあたって定常入力を考え，その envelope を時間領域 0～30秒に関して一定としてあるので，$h=0.003$ の場合で3秒程度，$h=0.05$ の場合では1秒程度経過すると定常的な様相を呈し，ほぼ平坦な分布となっている。

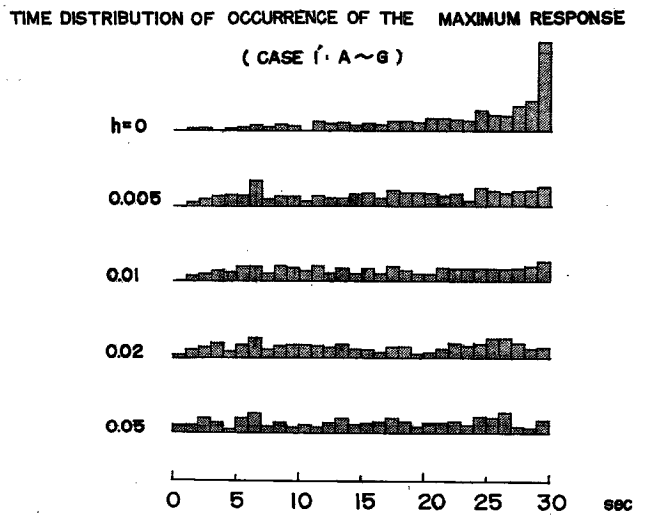

Fig. 11 Time distribution of occurrence of the maximum response in case 1′.

以上，各 case の ensemble 平均としての平均速度応答スペクトラの考察を行なったが，さらに各 ensemble における個々の S_V の値の分布を **Figs. 12 (a)～(e)** に示す。ここで，S_V/ES_V を 1～20 cps の各固有周波数について求め，その分布が固有周波数については明確な傾向を有さないことを確かめたのち全周波

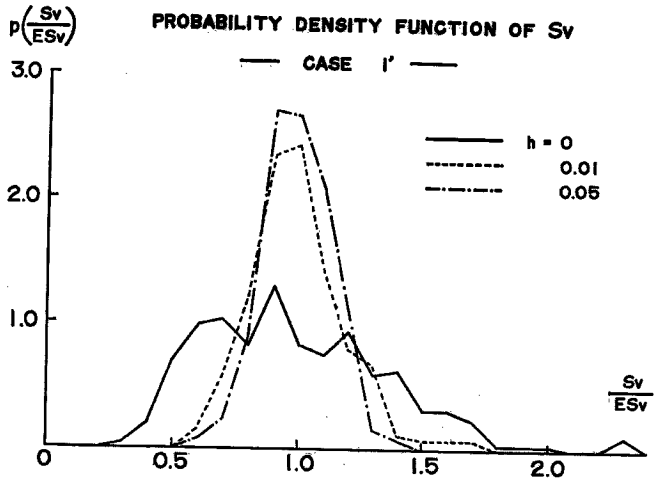

Fig. 12 (a) Probability density function of normalized velocity response spectra in case 1'.

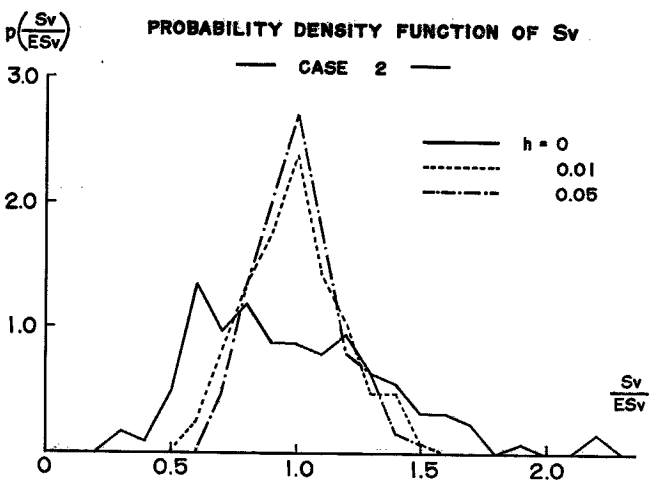

Fig. 12 (b) Probability density function of normalized velocity response spectra in case 2.

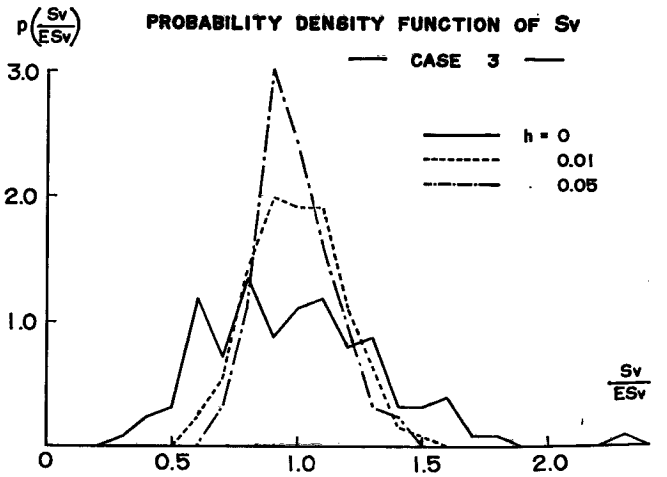

Fig. 12 (c) Probability density function of normalized velocity response spectra in case 3.

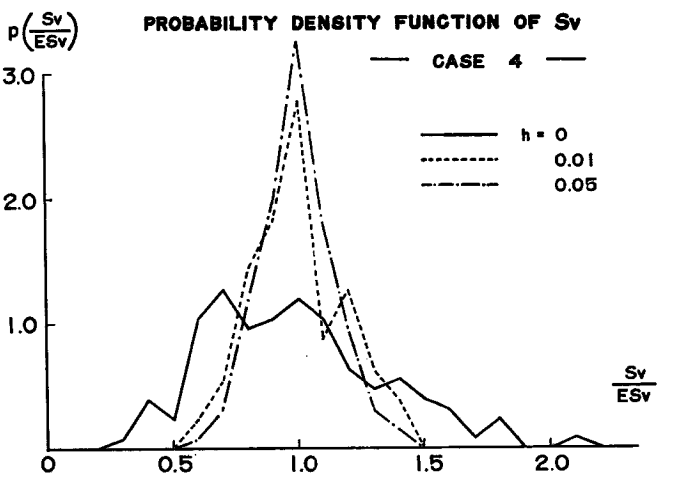

Fig. 12 (d) Probability density function of normalized velocity response spectra in case 4.

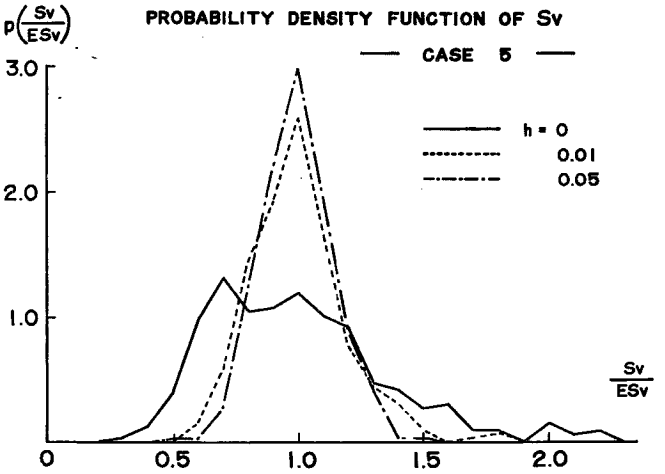

Fig. 12 (e) Probability density function of normalized velocity response spectra in case 5.

数領域について同一集団に属するとして平均操作を行なっている。系の固有周波数が Sv の分布性状におよぼす影響は小さいとしたことは case 1′～5 の周波数特性の相異に対しても殆んど分布性状が一定となっていることと対応している。$h=0$ の場合は平均値の 0.6 倍から 1.2 倍程度までほぼ一様に 1～1.2 程度となる平坦な分布を示すが，h が増加するにつれて平均値付近に急峻な peak が生じ，$h=0.05$ の場合は3程度となっている。この分布性状の量的な評価のために標準偏差について plot した結果を **Fig. 13** に示す。図中の点線は対象とした sample 数に対応する weight を用いた平均値を結ぶ曲線である。各 case についての値のバラツキは小で，平均値を用いてそれぞれの分布性状を評価しても充分良好な結果を与えるものと思われる。平均値を結ぶ曲線は減衰比 h に対して急激に減少し，h の増大とともに一定値に収束する関数形を示している。この形を $C(h)$ とし，

$$\frac{d}{dh}C(h)<0,\quad \frac{d^2}{dh^2}C(h)>0 \cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

なる関係も考慮に入れて

$$C(h)=C(\infty)-\{C(\infty)-C(0)\}\exp\{-\tilde{C}(h)h\} \cdots\cdots(42)$$

という形で表わされる。ここに，$\tilde{C}(h)$ は収束度を示す量で一般に次の性質を有する。

$$\tilde{C}(h)\gg 1,\quad \frac{d}{dh}\tilde{C}(h)<0,\quad \frac{d^2}{dh^2}\tilde{C}(h)>0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

したがって，

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{C}(h)=\tilde{C}(\infty)-\{\tilde{C}(\infty)-\tilde{C}(0)\}\exp(-\gamma h)\\&\gamma>0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(44)$$

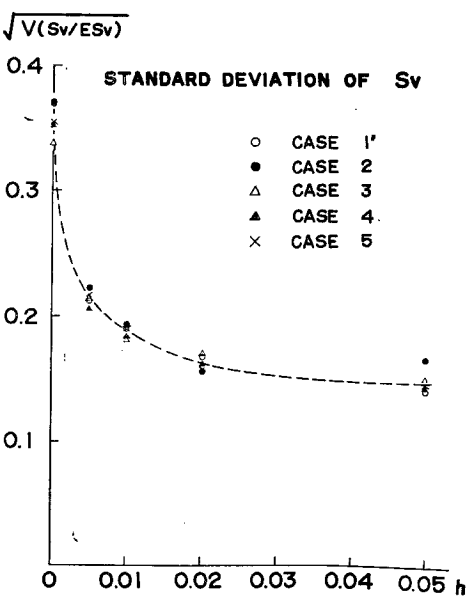

Fig. 13 Standard deviation of normalized velocity response spectra.

Table 3 Statistical values of normalized response spectra.

		case 1′	case 2	case 3	case 4	case 5	average
Sample size		14×18	7×18	7×18	7×18	14×24	
$\max\left(\frac{S_V}{ES_V}\right)$	$h=0$	2.28	2.16	2.31	2.09	2.24	
	0.005	1.84	1.74	1.57	1.53	1.93	
	0.01	1.70	1.50	1.49	1.44	1.85	
	0.02	1.62	1.44	1.48	1.40	1.64	
	0.05	1.52	1.46	1.37	1.36	1.46	
$\min\left(\frac{S_V}{ES_V}\right)$	0	0.35	0.33	0.33	0.28	0.34	
	0.005	0.51	0.49	0.55	0.47	0.54	
	0.01	0.60	0.60	0.59	0.61	0.58	
	0.02	0.60	0.67	0.63	0.63	0.59	
	0.05	0.63	0.60	0.75	0.72	0.54	
$\sqrt{V\left(\frac{S_V}{ES_V}\right)}$	0	0.371	0.371	0.338	0.352	0.355	0.359
	0.005	0.213	0.223	0.214	0.207	0.217	0.215
	0.01	0.191	0.194	0.182	0.185	0.191	0.189
	0.02	0.169	0.158	0.171	0.163	0.159	0.164
	0.05	0.141	0.167	0.151	0.144	0.146	0.148
a	0	3.45	3.12	3.88	3.10	3.49	3.43
	0.005	3.94	3.32	2.67	2.56	4.29	3.63
	0.01	3.67	2.58	2.69	2.37	4.46	3.51
	0.02	3.82	2.60	3.04	2.34	3.93	3.40
	0.05	3.70	2.74	2.46	2.51	3.16	3.07
b	0	1.75	1.80	1.98	2.05	1.86	1.86
	0.005	2.30	2.29	2.11	2.56	2.12	2.25
	0.01	2.09	2.07	2.25	2.10	2.20	2.15
	0.02	2.47	1.95	2.34	2.17	2.58	2.38
	0.05	2.62	2.39	1.66	1.95	3.15	2.56
a_{eq}	0	3.56	3.23	3.64	3.03	3.45	3.42
	0.005	3.90	3.44	2.65	2.46	4.32	3.64
	0.01	3.70	2.65	2.59	2.33	4.50	3.52
	0.02	3.78	2.68	2.93	2.44	3.90	3.39
	0.05	3.51	3.11	2.50	2.43	3.11	3.05
b_{eq}	0	1.81	1.86	1.86	2.00	1.84	1.86
	0.005	2.28	2.37	2.09	2.46	2.14	2.24
	0.01	2.12	2.12	2.17	2.06	2.22	2.15
	0.02	2.44	2.01	2.26	2.26	2.50	2.36
	0.05	2.50	2.70	1.69	1.89	3.11	2.55

で表わせる。(42), (44) によって ES_V によって正規化された S_V の分布の標準偏差を推定することが出来る。両式に含まれる定数は sample 数には影響を受けない量として具体例から定めることが出来る。ここでは **Table 3** の数値と $C(\infty)=0.13$ と仮定して次の実験式を得る。

$$\left.\begin{aligned} C(h)&=0.148+0.211\exp\{-\tilde{C}(h)h\}\\ \tilde{C}(h)&=121.5+283\exp(-192h)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(45)$$

つぎに各 ensemble における S_V の変動量を推定するために次式のランダム量 a, b を考える。

$$\left.\begin{aligned} a&=\max\left(\frac{S_V/ES_V-1}{\sqrt{V(S_V/ES_V)}}\right)=\frac{\max S_V-ES_V}{\sqrt{V(S_V)}}\\ b&=-\min\left(\frac{S_V/ES_V-1}{\sqrt{V(S_V/ES_V)}}\right)=-\frac{\min S_V-ES_V}{\sqrt{V(S_V)}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(46)$$

(46) に定義されたランダム量 a, b を各 case について固有周波数の影響を無視して評価すると **Table 3** のとうりである。a, b は sample 数に関する弱い関数とも考えられ，また減衰比 h に関しても平均的には a は減少の傾向を，b は増加の傾向を有しているようであるが，まだ小数例からのみの評価であり一般的には，これらに無関係な狭い変動領域をもつランダム量と考えるべきであろう[2]。(45) の $c(h)$ を用いて a_{eq}, b_{eq} を評価しても平均的にはほぼ一致した値を示しており，ここで対象とした例についてはその標準偏差がほぼ一致した値をとることから当然といえる。(45), (46) を用いるならば，$ES_V(f,h)$ が与えられるものとするとその ensemble における $S_V(f,h)$ の変動の上下界は

$$\{1-\bar{b}C(h)\}ES_V(f,h)\leqq S_V(f,h)\leqq\{1+\bar{a}C(h)\}ES_V(f,h)\cdots\cdots(47)$$

で与えられる。ここで $\bar{a}, \bar{b}$ は a, b または a_{eq}, b_{eq} の平均値で与えてよいと考えられる。

5. 擬定常入力とその平均速度応答スペクトラの解析的表現

ここでは比較的滑らかな形で示されるスペクトル密度を有する定常過程に属する関数から，時間領域における cutoff operator によって有限区間を切り出して得られる擬定常入力に対する平均速度応答スペクトラの性質を取り扱う。ここに対象とする系の固有周波数に対して，入力の周波数の帯域は一般に充分に巾広いものとする。

1 自由度系の線形振動方程式は

$$\left(\frac{d^2}{d\tau^2}+2h\omega\cdot\frac{d}{d\tau}+\omega^2\right)\eta(\tau)=f(\tau)\cdots\cdots(48)$$

で表わされる。ここに ω, h はそれぞれ系の固有角周波数，臨界減衰比である。また $f(\tau)$, $\eta(\tau)$ はそれぞれ地動加速度外乱，相対変位応答を示す。ここで

$$\left.\begin{aligned} &h'=h/\sqrt{1-h^2},\ \omega'=\omega\sqrt{1-h^2}\\ &0\leqq h\leqq 1,\ -\infty<\omega<\infty\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(49)$$

として次式に示される $A(\tau;\omega',h')$ を定義する。

$$\left.\begin{aligned} A(\tau;\omega',h')&=\int_{-\infty}^{\infty}D(\mu;R_{0\tau}^1)f(\mu)\exp(-h'|\omega'|(\tau-\mu))\exp(-j\omega'\mu)d\mu\\ &=\int_0^{\tau}f(\mu)\exp(-h'|\omega'|(\tau-\mu))\exp(-j\omega'\mu)d\mu\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(50)$$

ここで $D(\mu;R_{0\tau}^1)$ は時間領域 $R_{0\tau}^1=(0,\tau)$ 上の cutoff operator で次式で示される。

$$D(\mu;R_{0\lambda}^1)=s(\mu)-s(\mu-\lambda)$$

ここに $s(\mu)$ は step function を示す。初期条件を

$$\eta_{\tau=0}=\frac{d\eta}{d\tau}_{\tau=0}=0$$

として，$\tau=0$ から任意の外乱 $f(\tau)$ を受ける場合の系の相対変位応答は $\omega>0$，したがって $\omega'>0$ の領域 (51) で表わされる。

$$\left.\begin{aligned}\eta(\tau)&=\frac{1}{\omega'}|A(\tau\,;\omega',h')|\sin(\omega'\tau+\varphi_D)\\ \varphi_D&=\arg A(\tau\,;\omega',h')=\tan^{-1}\frac{\boldsymbol{I}(A(\tau\,;\omega',h'))}{\boldsymbol{R}(A(\tau\,;\omega',h'))}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(51)$$

ここに $\boldsymbol{R}(\ )$，$\boldsymbol{I}(\ )$ はそれぞれ実数部および虚数部を表わす。(51) を用いて相対変位の絶対値の時間に関する最大値 $RD(\omega,h)$ の上界は次式で与えられる。

$$RD(\omega,h)=\sup_{\tau\in R_{0\infty}^{1}}|\eta(\tau)|\leqq\frac{1}{\omega'}\sup_{\tau\in R_{0\infty}^{1}}|A(\tau\,;\omega',h')|\quad\cdots\cdots(52)$$

(51)，(52) より $|A(\tau\,;\omega',h')|$ の変動が $\sin\omega'\tau$ の変動に比較して緩やかな場合は (52) で示される上界は殆んど最小上界と考えられる。

つぎに加速度入力 $f(\tau)$ の1つのスペクトル表示である速度応答スペクトラは

$$\left.\begin{aligned}J(\tau\,;\omega,h)&=\boldsymbol{I}(A(\tau\,;\omega,h)\exp(-j\omega\tau))\\&=|A(\tau\,;\omega,h)|\sin(\omega\tau+\arg A(\tau\,;\omega,h))\\&=\int_0^{\tau}f(\mu)\exp(-h|\omega|(\tau-\mu))\sin\omega(\tau-\mu)d\mu\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(53)$$

を用いて $\omega>0$ で次式で定義される。

$$S_V(\omega,h)=\sup_{\tau\in R_{0\infty}^{1}}|J(\tau\,;\omega,h)|\quad\cdots\cdots(54)$$

(53)，(54) より

$$S_V(\omega,h)\leqq\sup_{\tau\in R_{0\infty}^{1}}|A(\tau\,;\omega,h)|\quad\cdots\cdots(55)$$

ここで $h\ll1$ を考えるものとして (49) の h',ω' を

$$h'\fallingdotseq h,\quad\omega'\fallingdotseq\omega,\quad\sqrt{1+h^2}\fallingdotseq1\quad\cdots\cdots(56)$$

とすると

$$\omega RD(\omega,h)\fallingdotseq S_V(\omega,h)$$

が成立する。上式の右辺 $S_V(\omega,h)$ は速度応答スペクトラと呼ばれる量である[15),16)]。つぎに (50) に従うものとして擬定常過程に属する関数 $f(\mu)$ と cutoff operator を用いて変形擬定常過程，

$$\left.\begin{aligned}\xi(\mu,\tau\,;\omega,h,\tau_d)&=D(\mu\,;R_{0\tau}^{1})D(\mu\,;R_{0\tau_d}^{1})\exp(-h|\omega|(\tau-\mu))f(\mu)\\&=D(\mu\,;R_{0\tau_m}^{1})\exp(-h|\omega|(\tau-\mu)f(\mu)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(57)$$

$$f(\mu)=a(\mu)\psi(\mu),\quad\tau_m=\min(\tau,\tau_d)\quad\cdots\cdots(58)$$

を定義する。ここに $a(\mu)$ は任意の確定関数，$\psi(\mu)$ は定常過程に属する関数である。変形擬定常過程のエネルギースペクトル密度 $S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)$ は $\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)$ の Fourier スペクトルの絶対値の自乗の ensemble 平均として次式で定義される[17)]。

$$S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)=E|A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|^2\quad\cdots\cdots(59)$$

$$\left.\begin{aligned}A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)&=\int_{-\infty}^{\infty}\xi(\mu,\tau\,;\omega,h,\tau_d)\exp(-j\omega\mu)d\mu\\&=\int_0^{\tau_m}f(\mu)\exp(-h|\omega|(\tau-\mu))\exp(-j\omega\mu)d\mu\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(60)$$

また，変形擬定常過程のパワースペクトル密度 $S_{H\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)$ は $S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)$ の時間率として次式で定義される[17)]。

$$S_{H\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)=\frac{\partial}{\partial\tau}S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d) \quad \cdots\cdots(61)$$

(61) を初期条件 $S_{E\xi}(0\,;\omega,h,\tau_d)=0$ を考慮して積分すると

$$S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau d)=\int_0^{\tau}S_{H\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)d\tau \quad \cdots\cdots(62)$$

さて，擬定常入力

$$D(\tau\,;R^1_{0\tau_d})f(\tau)=D(\tau\,;R^1_{0\tau_d})a(\tau)\psi(\tau)$$

に関する速度応答スペクトラ $S_V(\omega,h,\tau_d)$ は (53)，(54) より

$$S_V(\omega,h,\tau_d)=\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}}|J_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)| \quad \cdots\cdots(63)$$

$$J_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)=|A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|\sin(\omega\tau+\arg A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)) \quad \cdots\cdots(64)$$

と表わせる。$|A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|$ が $\sin\omega\tau$ に比較して τ の弱い関数であるとして，平均応答スペクトラは次式で近似的に評価できる。

$$ES_V(\omega,h,\tau_d)=E\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}}|J_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|\fallingdotseq E\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}}|A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)| \quad \cdots\cdots(65)$$

いま $|A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|$ が有界であるとすれば次式を満足する有界で正の λ が存在する。

$$\sup_E|A_\xi|=E|A_\xi|+\lambda\sqrt{V|A_\xi|},\quad \lambda\leqq 0 \quad \cdots\cdots(66)$$

一方 (65) の ES_V には次の上下界が存在する。

$$\sup_T\sup_E|A_\xi|=\sup_E\sup_T|A_\xi|\geqq ES_V\fallingdotseq E\sup_T|A_\xi|\geqq\sup_T E|A_\xi| \quad \cdots\cdots(67)$$

ここで T は $T\equiv R^1_{0\infty}$ とする。したがって

$$\sup_T(E|A_\xi|+\lambda\sqrt{V|A_\xi|})\geqq ES_V\fallingdotseq E\sup_T|A_\xi|\geqq\sup_T E|A_\xi| \quad \cdots\cdots(68)$$

として上下界が表わせる。

さて，変形擬定常過程のエネルギースペクトル密度を ω のみの関数と (τ,ω,h,τ_d) の関数の積としてつぎのように表わす。

$$\left.\begin{aligned}&S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)=E|A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|^2=D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)S_S(\omega)\\&D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)>0\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(69)$$

このとき

$$A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)=\frac{A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}{\sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}} \quad \cdots\cdots(70)$$

および

$$J_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)=\frac{J_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}{\sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}} \quad \cdots\cdots(71)$$

を定義すると

$$J_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)=|A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|\sin(\omega\tau+\arg A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)) \quad \cdots\cdots(72)$$

および

$$E|A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|^2=S_S(\omega) \quad \cdots\cdots(73)$$

が成立し，(70)，(71) に定義された確率過程は almost stationary process であると考える。この時 (68) におけるより小な上界が次式で得られる。

$$\left.\begin{aligned}ES_V(\omega,h,\tau_d)&\fallingdotseq E\sup_T|A_\xi(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|\\&\leqq\sup_T\sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}E\sup_T|A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(74)$$

ここでさらに $|A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|$ が ergodic であるとする。すなわち $|A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|$ の空間的な確

率統計的性質と時間方向の確率統計的性質が等しいとする。空間領域，時間領域をそれぞれ E, T と表わし，それぞれの領域における平均の orerator を E_E, E_T で表わす。このとき（74）の右辺は次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned}&\sup_T \sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}E_E \sup_T |A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|\\&\quad=\sup_T \sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}E_T \sup_E |A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(75)$$

したがって

$$\sup_I |A_S| = E_I|A_S| + \lambda_I\sqrt{V_I|A_S|},\quad I=T,E \cdots\cdots(76)$$

を得る。さらに $E_I, I=T,E$ を作用させて次式を得る。

$$\left.\begin{aligned}E_E \sup_T |A_S| &= E_T|A_S| + E_E\lambda_T\sqrt{V_T|A_S|}\\E_T \sup_E |A_S| &= E_E|A_S| + E_T\lambda_E\sqrt{V_E|A_S|}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(77)$$

$|A_S(\tau\,;\omega,h,\tau_d)|$ は ergodic stationary であるから

$$\lambda_{av} = E_E\lambda_T = E_T\lambda_E \cdots\cdots(78)$$

とおいて（74）は

$$\left.\begin{aligned}ES_V(\omega,h,\tau_d) &\leqq \sup_T \sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}\{E_T|A_S| + \lambda_{av}\sqrt{V_T|A_S|}\}\\&= \sup_T \sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}\{E_E|A_S| + \lambda_{av}\sqrt{V_E|A_S|}\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(79)$$

で表わされる。

一方定常確率過程 J_S に関しては，J_S と $\dfrac{d}{d\tau}J_S$ の同時刻における共分散は零であるので，J_S の envelope $|A_S|$ の振巾確率密度は次式の Rayleigh 分布の密度関数で与えられる[18]。

$$p(|A_S|) = \frac{|A_S|}{V|A_S|}\exp\left(-\frac{|A_S|^2}{2V|A_S|}\right) \cdots\cdots(80)$$

したがって

$$\frac{E|A_S|}{\sqrt{E|A_S|^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2},\quad \frac{\sqrt{V|A_S|}}{\sqrt{E|A_S|^2}} = \sqrt{1-\frac{\pi}{4}} \cdots\cdots(81)$$

を得る。(81) を (79) に代入して

$$\left.\begin{aligned}ES_V(\omega,h,\tau_d) &\leqq \sup_T \sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \lambda_{av}\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{E_E|A_S|^2}\\&= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \lambda_{av}\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{\sup_T E_E|A_\xi|^2}\\&= \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + \lambda_{av}\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}} S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(82)$$

を得る。一方 $ES_V(\omega,h,\tau_d)$ の下界については $|A_S|$ の ergode 性と (67), (70) より次のように書ける。

$$\left.\begin{aligned}ES_V(\omega,h,\tau_d) &\geqq \sup_T \sqrt{D(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{E_E|A_\xi|^2}\\&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}} S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(83)$$

(82), (83) より

$$ES_V(\omega,h,\tau_d) = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} + {}_f\lambda\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}} S_{E\xi}(\tau\,;\omega,h,\tau_d)} \cdots\cdots(84)$$

が成立するような ${}_f\lambda$ が $\lambda_{av} \geqq {}_f\lambda \geqq 0$ の範囲に存在する。このような ${}_f\lambda$ は一般に ω, h, τ_d の関数と考えられる。

次に $\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}} S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)$ の評価を行なうにあたって，擬定常入力 $f(\tau)=a(\tau)\psi(\tau)$ の envelope $a(\tau)$ を $a(\tau)=1$ とし，また $\psi(\tau)$ が white noise の場合とすると容易に $S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)$ は次式のように定まる。

$$\left.\begin{aligned} &S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)=\frac{c^2(1-\exp(-2h|\omega|\tau))}{2h|\omega|},\quad \tau\leqq\tau_d\\ &S_{E\xi}(\tau;\omega,0,\tau_d)=\tau c^2,\quad \tau\leqq\tau_d\\ &S_{H\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)=\frac{\partial}{\partial\tau}S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)\leqq 0,\quad \tau\geqq\tau_d,\quad h\geqq 0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(85)$$

また，

と表わされる。あるいは $\psi(\tau)$ が充分な広帯域のスペクトル密度 $S_\psi(\omega)$ を有している場合は，(85) において $c^2=S_\psi(\omega)$ と置きかえ場合として近似的に次式が得られる[19]。

$$\left.\begin{aligned} &S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)\fallingdotseq\frac{1-\exp(-2h|\omega|\tau)}{2h|\omega|}S_\psi(\omega),\quad \tau\leqq\tau_d\\ &S_{E\xi}(\tau;\omega,0,\tau_d)\fallingdotseq\tau S_\psi(\omega),\quad \tau\leqq\tau_d\\ &S_{H\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)=\frac{\partial}{\partial\tau}S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)\leqq 0,\quad \tau\geqq\tau_d,\quad h\geqq 0 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(86)$$

したがって

$$\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}} S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)=S_{E\xi}(\tau_d;\omega,h,\tau_d)\quad\cdots\cdots(87)$$

が得られる。もし $\psi(\tau)$ が white noise でない一般の場合には $\sup_{\tau\in R^1_{0\infty}} S_{E\xi}$ を解析的に厳密に求めるのは容易ではないが，$\psi(\tau)$ のスペクトル密度 $S_\psi(\omega)$ が広帯域スペクトルの場合で且つ $S_\psi(\omega)$ の有勢な帯域内に $S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)$ のパラメータ ω が存在する場合には $1>h\geqq 0$ で発散過程と考えて良いと思われるので，$\tau=\tau_d$ で $S_{E\xi}(\tau;\omega,h,\tau_d)$ が最大になるとしても大きな間違いはないと判断される。したがって (87) が成立するものとすれば (84) に代入して

$$ES_V(\omega,h,\tau_d)=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+{}_f\lambda\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{S_{E\xi}(\tau_d;\omega,h,\tau_d)}\quad\cdots\cdots(88)$$

を得る。ここで ${}_f\lambda$ は

$${}_f\lambda\equiv{}_f\lambda(\omega,h,\tau_d)\quad\cdots\cdots(89)$$

で表わされるが $\psi(\tau)$ が対象とする ω の範囲を覆う充分な広帯域のスペクトル密度を有するとすれば，

$${}_f\lambda(\omega,h,\tau_d)\fallingdotseq{}_f\lambda(h)=\langle{}_f\lambda(\omega,h,\tau_d)\rangle_{\omega,\tau_d}\quad\cdots\cdots(90)$$

で近似的に表わすことが出来ると推定される。ここに $\langle A\rangle_a$ は A の a に関する平均を示す。したがって

$$\left.\begin{aligned} &ES_V(\omega,h,\tau_d)=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+{}_f\lambda(h)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{D(\tau_d;\omega,h,\tau_d)S_\psi(\omega)}\\ &ES_V(\omega,0,\tau_d)=\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}+{}_f\lambda(0)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{D(\tau_d;\omega,0,\tau_d)S_\psi(\omega)} \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(91)$$

より

$$\left.\begin{aligned} {}_fq(h)&=\left\langle\frac{ES_V(\omega,h,\tau_d)}{ES_V(\omega,0,\tau_d)}\sqrt{\frac{D(\tau_d;\omega,0,\tau_d)}{D(\tau_d;\omega,h,\tau_d)}}\right\rangle_{\omega,\tau_d}\\ &=\frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}+{}_f\lambda(h)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2}+{}_f\lambda(0)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}},\quad q(0)=1 \end{aligned}\right\}\cdots\cdots(92)$$

が得られ，${}_f\lambda(0)$ と ${}_fq(h)$ が与えられると

$$ {}_f\lambda(h)=\left(\sqrt{\frac{\pi}{4-\pi}}+{}_f\lambda(0)\right){}_fq(h)-\sqrt{\frac{\pi}{4-\pi}} \quad \cdots\cdots(93) $$

によって ${}_f\lambda(h)$ を定め得る。一般に ${}_f\lambda(h)$, $q(h)$ について次の性質が成り立つ。

$$ \left.\begin{aligned} &\frac{d}{dh}{}_f\lambda(h)>0,\quad \frac{d^2}{dh^2}{}_f\lambda(h)<0 \\ &\frac{d}{dh}{}_fq(h)>0,\quad \frac{d^2}{dh^2}{}_fq(h)<0 \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(94) $$

また ${}_f\lambda(h)$, ${}_fq(h)$ は $h=0$ の近傍で急激にある値に収束する性質を有するので，次の表現が可能となる。

$$ \left.\begin{aligned} {}_f\lambda(h)&={}_f\lambda(\infty)-\{{}_f\lambda(\infty)-{}_f\lambda(0)\}\exp\{-{}_f\alpha(h)h\} \\ {}_fq(h)&={}_fq(\infty)-\{{}_fq(\infty)-{}_fq(0)\}\exp\{-{}_f\alpha(h)h\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(95) $$

ここで ${}_f\alpha(h)$ は ${}_f\lambda(h)$, ${}_fq(h)$ の収束度を示す量で大きな正値であるが，一般に

$$ {}_f\alpha(h)\gg 1,\quad \frac{d}{dh}{}_f\alpha(h)>0,\quad \frac{d^2}{dh^2}{}_f\alpha(h)<0 \quad \cdots\cdots(96) $$

で，かつ h の増加とともに一定値に収束する傾向を有する。したがって

$$ {}_f\alpha(h)={}_f\alpha(\infty)-\{{}_f\alpha(\infty)-{}_f\alpha(0)\}\exp(-\beta h),\quad \beta>0 \quad \cdots\cdots(97) $$

で表わされる。したがって

$$ {}_f\alpha(h)=-\frac{1}{h}\log\frac{{}_f\lambda(\infty)-{}_f\lambda(h)}{{}_f\lambda(\infty)-{}_f\lambda(0)}=-\frac{1}{h}\log\frac{{}_fq(\infty)-{}_fq(h)}{{}_fq(\infty)-{}_fq(0)} \quad \cdots\cdots(98) $$

が成立する。

6. 平均速度反応スペクトラと速度応答スペクトラの上下界の推定

前節で述べた方法を用いて擬定常過程に属する加速度入力 $D(\tau;R^1_{0\tau_d})a(\tau)\psi(\tau)$ による平均速度応答スペクトラ ES_T を，実際の応答解析の結果から求めた数値を用いて定め，さらに ensemble における各 sample の変動の上下界を検討する。ここで用いた応答解析の結果は **4.** に示された case 1 に属する7個の波形についてであり，$|As|$ の時間方向の分布を中介にして ergode 性を仮定し ${}_f\lambda(h)$ を評価するものとする。採用した ω は $2.86\times 2\pi$ と $5\times 2\pi$ の2点で，1つの応答波形からそれぞれ140個，200個の極値振巾を読みとり整理した結果を **Table 4** に示す。ここに $s\sigma_T$, $s\lambda_T$, ${}_f\lambda_T$ はそれぞれ次式で示され，${}_f\lambda_T$ は Rayleigh 分布に対する等価的な量である。

$$ s\sigma_T=\sqrt{V_T\frac{|As|}{E_T|As|}}=\frac{\sqrt{V_T|As|}}{E_T|As|} \quad \cdots\cdots(99) $$

$$ s\lambda_T=\sup_T\frac{\dfrac{|As|}{E_T|As|}-1}{\sqrt{V_T\dfrac{|As|}{E_T|As|}}}=\sup_T\frac{|As|-E_T|As|}{\sqrt{V_T|As|}} \quad \cdots\cdots(100) $$

$$ {}_f\lambda_T=\frac{s\lambda_T s\sigma_T}{\sigma(0)}=\sqrt{\frac{\pi}{4-\pi}}\sup_T\frac{|As|-E_T|As|}{E_T|As|},\quad \sigma(0)=\sqrt{\frac{4-\pi}{\pi}} \quad \cdots\cdots(101) $$

また **Figs. 14** (a)～(e) は $s\sigma_T$, $s\lambda_T$ の評価のための $|As|/E|As|$ の確率密度関数 $p(|As|/E|As|)$ を7個の sample について ensemble 平均したものや示している。(99)～(101) で示される量の ω についての平均を **Table 5** および **Fig. 15** に示す。

Table 5 の ${}_f\lambda(h)$ に基づいて (95), (97) による ${}_f\lambda(h)$ を定めるために次のように仮定を設ける。**Table 4** に示される $h=0$ における ${}_f\lambda_T$ の値はバラツキが大であり，平均する意味が薄いことと同時に，${}_f\lambda(h)$ は $h=0$ 近傍で急激に増加する関数であり，analog 計算機の特性から完全な $h=0$ が実現され難いこと，また ${}_f\lambda(0)$ は (95), (98) を適用するのに用いる点であること等から，応答解析の結果による値をそのまま用いずに，理論的に求められた値[8] に基づいて Rayleigh 分布に対する等価的な値として ${}_f\lambda(0)=$

Table 4 Statistical values of normalized absolute amplitude, $|As|/E|As|$.

	ω	h	case 1—1	1—2	1—3	1—4	1—5	1—6	1—7
$\sup_T \frac{\|As\|}{E\|As\|}$	2.86 ×2π	0	1.34	3.00	1.78	2.38	2.07	1.47	1.26
		0.005	1.43	2.64	2.10	2.20	2.63	1.74	1.62
		0.01	1.50	2.61	2.17	2.05	2.56	1.83	1.95
		0.02	1.80	2.56	2.14	1.96	2.52	1.81	1.98
		0.05	2.11	2.29	1.99	2.04	2.55	1.99	2.18
	5.0 ×2π	0	1.50	1.35	1.89	1.78	1.19	1.72	1.75
		0.005	1.81	1.72	2.42	3.08	1.76	2.06	1.84
		0.01	1.96	2.28	2.86	3.59	2.29	2.22	2.13
		0.02	2.16	2.56	3.21	3.46	2.53	2.61	2.58
		0.05	2.32	3.06	3.24	2.88	2.60	2.50	2.80
$\sqrt{V_T \frac{\|As\|}{E\|As\|}}$	2.86 ×2π	0	0.214	0.580	0.294	0.592	0.397	0.282	0.143
		0.005	0.209	0.563	0.415	0.579	0.567	0.348	0.328
		0.01	0.236	0.535	0.435	0.510	0.570	0.363	0.482
		0.02	0.320	0.536	0.472	0.491	0.543	0.342	0.440
		0.05	0.461	0.526	0.480	0.452	0.471	0.408	0.468
	5.0 ×2π	0	0.295	0.169	0.412	0.263	0.085	0.248	0.507
		0.005	0.467	0.281	0.542	0.540	0.355	0.502	0.406
		0.01	0.462	0.382	0.635	0.603	0.435	0.476	0.489
		0.02	0.505	0.480	0.666	0.607	0.470	0.491	0.580
		0.05	0.521	0.563	0.615	0.536	0.498	0.502	0.520
${}_T\lambda_T$	2.86 ×2π	0	0.65	3.82	1.49	2.64	2.04	0.90	0.50
		0.005	0.82	3.13	2.10	2.29	3.11	1.41	1.18
		0.01	0.96	3.07	2.23	2.00	2.98	1.58	1.81
		0.02	1.53	2.98	2.18	1.83	2.90	1.55	1.87
		0.05	2.12	2.46	1.89	1.99	2.96	1.89	2.25
	5.0 ×2π	0	0.96	0.67	1.70	1.49	0.36	1.38	1.43
		0.005	1.55	1.37	2.71	3.97	1.45	2.02	1.60
		0.01	1.83	2.45	3.55	4.94	2.46	2.33	2.16
		0.02	2.22	2.98	4.22	4.70	2.92	3.07	3.02
		0.05	2.52	3.93	4.28	3.59	3.06	2.86	3.44

Table 5 Numerical values of ${}_T\lambda(h)$ and ${}_T\bar{\alpha}(h)$.

h	0	0.005	0.01	0.02	0.05	∞
$<s\sigma_T>_\omega$	0.320	0.436	0.472	0.496	0.502	
${}_s\lambda(h)=<{}_s\lambda_T>_\omega$	2.266 (0.621)	2.406	2.669	2.811	2.891	(3.0)
${}_T\lambda(h)=<{}_T\lambda_T>_\omega$	1.410	2.054	2.457	2.712	2.801	
${}_T\bar{\alpha}(h)$	—	184.2	147.8	105.6	49.5	

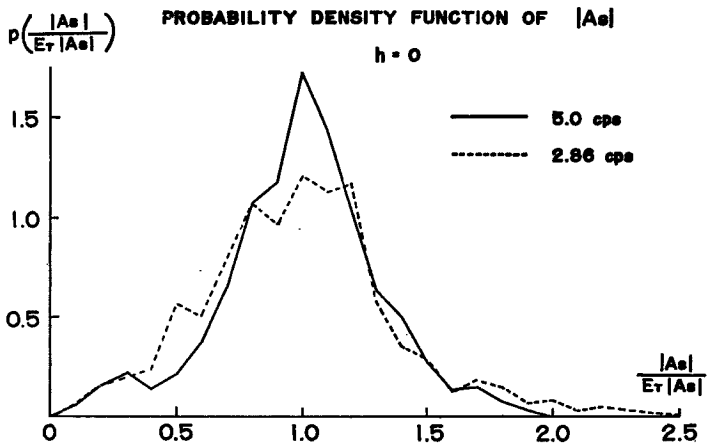

Fig. 14 (a) Average probability density function of normalized absolute amplitude, $|As|$, for $h=0$.

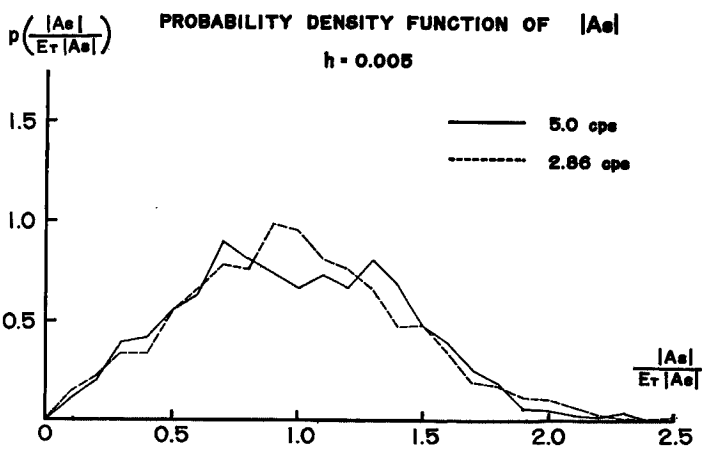

Fig. 14 (b) Average probability density function of normalized absolute amplitude, $|As|$, for $h=0.005$.

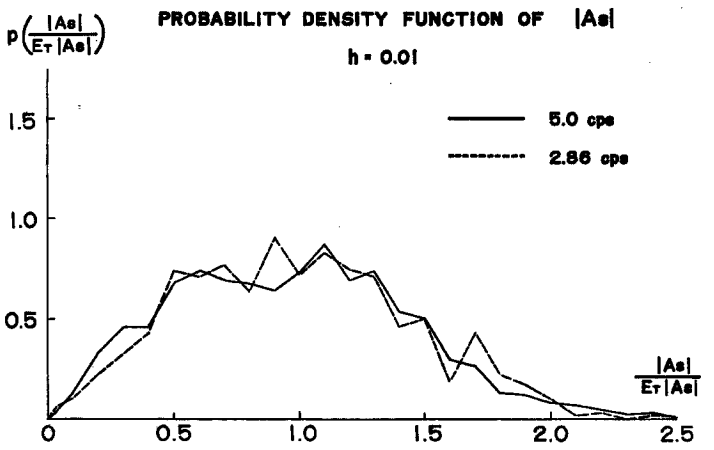

Fig. 14 (c) Average probability density function of normalized absolute amplitude, $|As|$, for $h=0.01$.

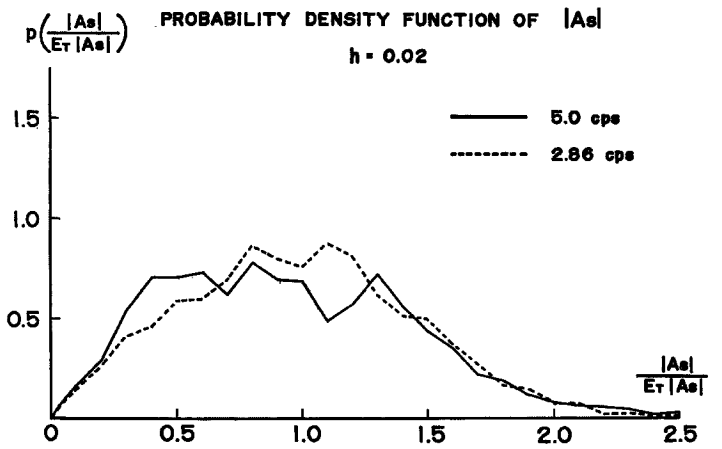

Fig. 14 (d) Average probability density function of normalized absolute amplitude, $|As|$, for $h=0.02$.

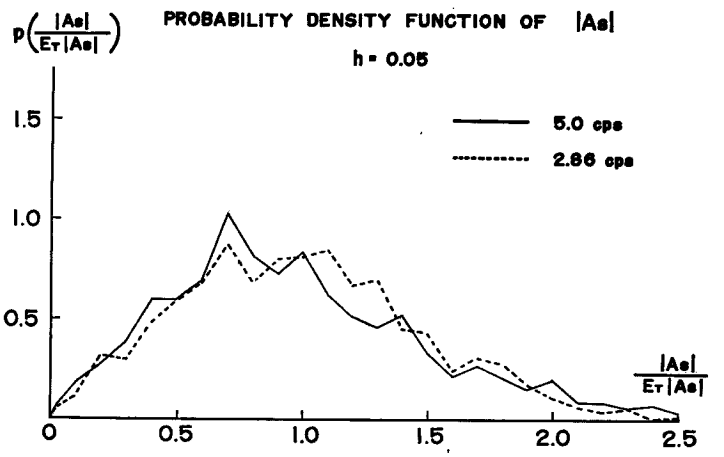

Fig. 14 (e) Average probability density function of normalized absolute amblitude, $|As|$, for $h=0.05$.

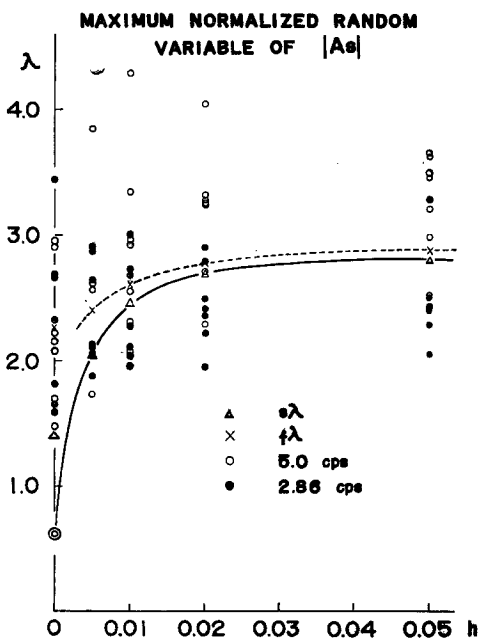

Fig. 15 Maximum normalized random variable and its average, $_s\lambda$, and average of equivalent maximum normalized random variable, $_f\lambda$.

0.621 を採用する。また，$_f\lambda(\infty)$ として普通最大値の推定によく用いられる値[10),20)] $\lambda(\infty)=3.0$ を採用する。このようにして決められた $_f\lambda(h)$ を (98) に用いて得た $_f\bar{\alpha}(h)$ を **Table 5** に併記してある。(97) を異なった h_l, h_m, h_n に対して連立に解き

$$\frac{\alpha(h_l)-\alpha(h_n)}{\alpha(h_l)-\alpha(h_m)}=\frac{1-\exp\{-\beta(h_n-h_l)\}}{1-\exp\{-\beta(h_m-h_l)\}} \quad \cdots\cdots(102)$$

を得るが，$\{h_l, h_m, h_n\}$ の組み合わせを考えて平均値として β を評価する。この結果をさらに (97) に代入して異なる $\{h_l, h_m\}$ の組み合わせで連立に解いて，平均操作から $_f\alpha(0)$, $_f\alpha(\infty)$ を評価する。この結果を (97) に用いて $_f\alpha(h)$ を得てさらに (95) を異なる $\{h_l, h_m\}$ の組み合わせで連立に解いて平均操作を行なうと $_f\lambda(0)$, $_f\lambda(\infty)$ を求めることが出来，(95) から，$_f\lambda(h)$，ついで，(93) から，$_fq(h)$ が次式のように求まる。

$$_f\lambda(h)=2.998-2.395\exp\{-{}_f\alpha(h)h\} \quad \cdots\cdots(103)$$

$$_fq(h)=2.983-1.983\exp\{-{}_f\alpha(h)h\} \quad \cdots\cdots(104)$$

$$_f\alpha(h)=33.31+191.73\exp(-49.2h) \quad \cdots\cdots(105)$$

(103)～(105) の値は **Table 6** に示される。

Table 6　Numerical values of $_f\alpha(h)$, $_f\lambda(h)$ and $_fq(h)$.

h	0	0.005	0.01	0.02	0.05	∞
$_f\alpha(h)$	225.0	183.2	150.5	105.0	49.6	33.3
$_f\lambda(h)$	0.603	2.040	2.466	2.706	2.878	2.998
$_fq(h)$	1.0	2.190	2.543	2.741	2.884	2.983

さて，速度応答スペクトラの enemble 平均を推定するにはこのようにして求められた $_f\lambda(h)$ あるいは **Table 5** の $_f\lambda(h)$ を (88) に用い，$S_{E\xi}(\tau_d;\omega,h,\tau_d)$ の表現として (86) より

$$\left.\begin{aligned} S_{E\xi}(\tau_d;\omega,h,\tau_d)&=\frac{1-\exp(-2h\omega\tau_d)}{2h\omega}S_\psi(\omega)\\ S_{E\xi}(\tau_d;\omega,0,\tau_d)&=\tau_dS_\psi(\omega)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(106)$$

を用いると

$$\left.\begin{aligned} ES_V(\omega,h,\tau_d)&=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+{}_f\lambda(h)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{\frac{1-\exp(-2h\omega\tau_d)}{2h\omega}S_\psi(\omega)}\\ ES_V(\omega,0,\tau_d)&=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+{}_f\lambda(0)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{\tau_dS_\psi(\omega)}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(107)$$

あるいは

$$\left.\begin{aligned} ES_V(\omega,h,\tau_d)&=\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}+{}_f\lambda(h)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{\frac{1-\exp(-2h\omega\tau_d)}{2h\omega}S_\psi(\omega)}\\ ES_V(\omega,0,\tau_d)&=\left(\sqrt{\frac{n}{2}}+{}_f\lambda(0)\sqrt{1-\frac{\pi}{4}}\right)\sqrt{\tau_dS_\psi(\omega)}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(108)$$

が得られる。ここでは解析的表現として得られている模擬地震波入力のスペクトルの特性を $S_\psi(\omega)$ として用いる。すなわち（9）における $|\phi(j\omega)|^2$ より

$$S_\psi(\omega)=\omega^2|\phi(j\omega)|^2 \quad \cdots\cdots(109)$$

として与える。(108)，(109) を用いて

$$\int_{0.1125\times2\pi}^{14\times2\pi}S_\psi(\omega)d\omega=24^2(\mathrm{gal})^2 \quad \cdots\cdots(110)$$

として推定した $ES_V(\omega, h, 30)$ が **Fig. 16** に点線で示してある。$_f\lambda(0)$ は仮定値 0.621 を用いてある。

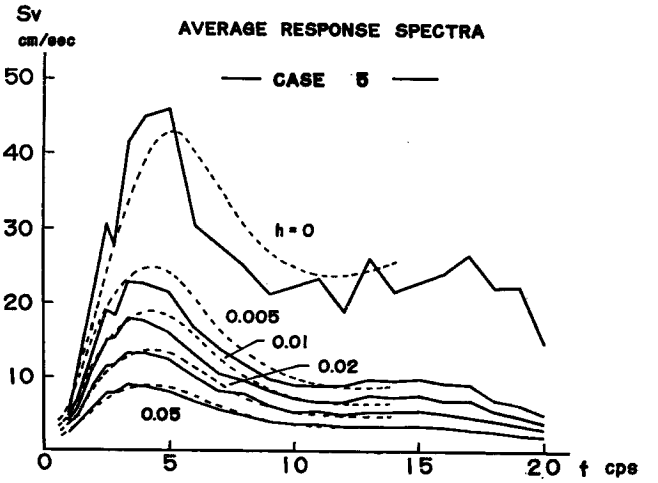

Fig. 16 Comparison of average response spectra between result to theoretical estimation and that to response analysis.

図中の応答解析の結果については，4. に求められている ES_V をそのまま比較の対象にすることは，地震波入力の最大加速度振巾を同一にするという規範で求められた ensemble 平均に対応づけようとするもので不明確な要素を含めることになるので，ここでは，case 5 の場合について継続時間30秒の中から約24秒間を取り出して，その部分の自乗平均値が一定となるような規範のもとに ensemble 平均を求めなおしている。この操作は充分に長い評価時間のもとでは，各 sample の確率統計的性質が同一になることに基づいている。また，case 5 の模擬地震波の速度波形に対する設定された周波数 band 巾は（110）において積分を評価した領域であるが，filter の特性等により **Fig. 8** に示されたように，特に上限においては完全な遮断は行ない得ていない。したがって，**Table 2** からもうかがえる如く，比較の対象とする部分における power をほぼ等しくすることが必要で，**Fig. 16** の実線はこの考慮を行って縦軸を修正して描いたものである。5～8 cps の部分で推定値が一様にやや大きくなっていることを除けば，両者の一致は可成りの精度で示されていることが判る。本解析では，$\omega=2.86\times 2\pi$，$5\times 2\pi$ の2点のみでの評価を 0.45－14 cps に適用した訳であるが，今後さらに推定しようとする周波数全領域における $_T\lambda_T$ を評価して，その値が ω に関して如何に変動するかを確かめる必要がある。

Figs. 17, 18 は，$h=0$ および 0.01 について（108）の ES_V を用いて ensemble における S_V の上下界の推定を（47）に **Table 3** の値を用いて，case 5 に関して行なったものである。**Table 3** における $\sqrt{V(S_V/ES_V)}$，a および b の評価には ES_V の求め方が **Fig. 16** の場合と異なった規範によっているが，**Fig. 10 (f)** と **Fig. 16** の実線で区別される両者が殆んど傾向的に一致していることから，ここでは実用上差支えないものとしてある。図から明らかなようにこの方法による ensemble における S_V の上下界の推定は妥当であるといえる。

このようにして，与えられた入力のスペクトル密度から，envelope が step function で規定される擬定常入力の平均応答スペクトラおよび応答スペクトラの上下界を半実験的に推定し，応答解析の結果との比較から両者は満足すべき精度で一致することを示した。さらに精度の高い推定を行なうためには，ensemble における sample 数を増してここで用いた ergode 性や Rayleigh 分布等の仮定，あるいは $_T\lambda$，$\sqrt{V(S_V/ES_V)}$，a, b 等の ω に関する変動を厳密に検討する必要があろう。

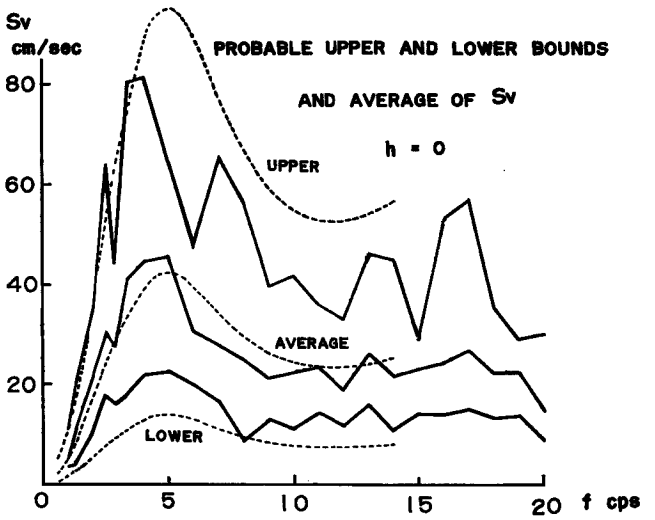

Fig. 17 Comparison of the upper and the lower bounds and average of response spectra between result to theoretical estimation and that to response analysis for $h=0$.

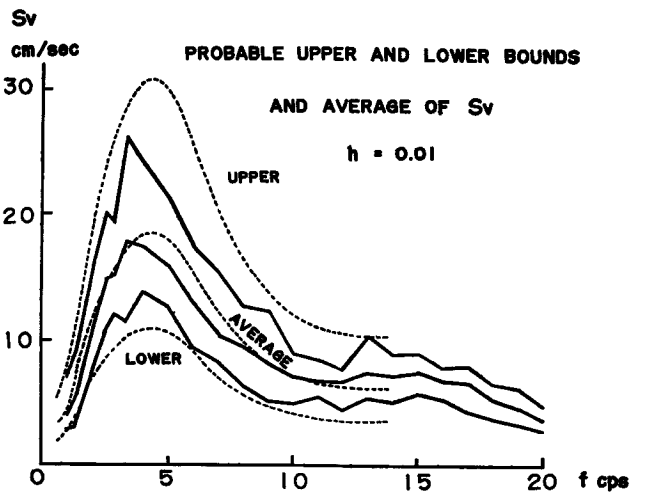

Fig. 18 Comparison of the upper and the lower bounds and average of response spectra between result to theoretical estimation and that to response analysis for $h=0.01$.

7. むすび

構造物の耐震設計のために，建設予定地の地盤の振動特性や seismicity を考慮して予想すべき地震波外乱のスペクトルの特性が定められている場合に，非定常応答解析を行なう際に必要な確率統計的に等価な模擬地震波を得る方法として，本論文では noise generator の出力波形から band pass filter を用いて周波数 band を与えられた band limited white noise を得，これを地震波外乱のスペクトルの特性を与える有理関数形の伝達関数をもつ線形系の入力として得られる出力を適当な時間領域で切り出して模擬地震波の集団を作り得ることを示した。そして，このスペクトルの特性をスペクトル密度および応答スペクトラの観点から考察した。一方，このような step function を envelope とする擬定常外乱の平均応答スペクトラおよび応答スペクトラの上下界の解析的表現を導びき，それらに含まれる未定の定数を応答解析の結果から半実験的に定めた。これと応答解析の結果は減衰比および周波数に関してほぼ一様に良い一致を示し，解析的表現を導くために用いた仮定の妥当性を裏づけている。

しかし，ここでは平均応答スペクトラの推定に用いるランダム変数 $r_{\lambda T}$ を，系の固有周波数には無相関の量と見なして周波数について2点の平均で評価したが，厳密には周波数にも関係する量であると考えられ，より一層精度の高い推定を行なうためには，さらに多くの点を周波数に関して選んで検討を加えて行かねばならない。同様に模擬地震波の ensemble についても sample 数が少数であり，応答スペクトラの ensemble における分布性状の評価には固有周波数についての影響を無視したが，推定の精度を高めるためにはこの影響を検討する必要があろう。さらに，ここで用いられた他の仮定についてもその妥当性を検討してゆくとともに，今後，模擬地震波に異なった envelope を与えた場合，あるいは異なった継続時間を与えた場合等について考察を加えてゆく予定である。

終りに，本論文の作製にあたって応答解析および資料整理に多大の労を煩わせた京都大学工学部助手鎌田輝男氏，河野允宏氏，同大学院修士課程大谷圭一氏はじめ研究室の諸兄に深甚の謝意を表します。

参考文献

1）小堀鐸二，南井良一郎：多層弾塑性構造物の地震レスポンス，京大防災研究所年報，第7号，昭39.3，pp.141—163.

2）小堀鐸二，南井良一郎，井上 豊，久徳敏治：弾塑性多層構造物の地震応答解析と耐震設計資料の誘導，京大防災研究年報，第9号，昭41.3，pp.137—164.

3）小堀鐸二，南井良一郎，井上 豊，久徳敏治：高層建築構造物の動力学特性の適正化について，第4回災害科学シンポジウム論文集，昭42.10. pp.170—173.

4）吉川宗治，島 通保，入倉孝次郎：松代周辺地域における地震の震動特性について，第4回災害科学シンポジウム論文集，昭42.10，pp.150—153.

5）小堀鐸二，南井良一郎，井上 豊，竹内吉弘，鎌田輝男：松代群発地震による地盤および建築構造物の応答特性，日本地震工学シンポジウム（1966）講演集，昭41.10，pp.297—302.

6）吉川宗治，島 通保，入倉孝次郎：自然地震と人為加振による地盤の振動特性について，京大防災研究所年報，第9号，昭41.3，pp.119—136.

7）Yoshikawa, S., Shima, M. and Irikura, K.: Vibratsional Characteristics of the Ground Investigated by Several Methods, Bull. Disas. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., Vol.16, Part 2, Jan., 1967, pp.1—16.

8）Rosenblueth, E. and Bustamante, J.I.: Distribution of Structural Response to Earthquakes, Proc. of ASCE, Vol.88, No. EM3, June, 1962, pp.75—106.

9）Housner, G.W. and Jennings, P.C.: Generation of Artificial Earthquakes, Proc. of ASCE, Vol.90, No. EM1, Feb., 1964, pp.113—150.

10) 田治見宏，石丸辰治：ランダム地動に対する応答の実験的研究，日本建築学会論文報告集，号外，昭41.10，p.130.
11) 後藤尚男，土岐憲三，秋吉　卓：電子計算機による耐震設計用の人工地震波に関する研究，日本地震工学シンポジウム（1966）講演集，昭41.10，pp.25—30.
12) Solodovnikov, V.V.: Introduction to the Statistical Dynamics of Automatic Control Systems, translation edited by Thomas, J.B. and Zadeh, L.A., Dover.
13) 小堀鐸二，南井良一郎，井上　豊：矩形基礎の Ground Compliance とその Simulation について，京大防災研究所年報，第7号，昭39.3，pp.164—178.
14) Tanabashi, R., Kobori, T., Kanefa, K. and Minai, R.: Statistical Properties of Earthquake Accelerograms and Equivalent Earthquake Exciation Pattern, Bull. Disas. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., Vol.14, Part 2, Feb., 1965, pp.49—68.
15) Housner, G.W.: Characteristics of Strong-Motion Earthquakes, Bull. of SSA, Vol.37, No.1, Jan., 1947, pp.19—31.
16) Hudson, D.E.: Response Spectrum Techniques in Engineering Seismology, Proc. of lst WCEE, June, 1956, pp.4—1—12.
17) Kobori, T. and Minai, R.: Non-stationary Response of the Linear System to Random Excitation, Bull. Disas. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., Vol. 16, Part 2, Jan., 1967, pp.37—80.
18) 小堀鐸二，南井良一郎：非定常ランダム応答の等価線形化解法，京大防災研究所年報，第10号A，昭42.3，pp.235—260.
19) Caughey, T. K. and Stumpt, H. J.: Transient Response of a Dynamic System Under Random Excitation, Jour. of Appl. Mech., Vol.28, Series E, No.4, Dec., 1961, pp. 563—566.
20) Tajimi, H: A Statistical Method of Determining the Maximum Response of Building Structure During an Earthquake, Proc. of 2nd WCEE, Vol. II, July, 1960, pp. 781—797.