

$\mathbb{C}^2$ 上の holomorphic vector fields と $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ link の不変量について

愛知教育大 岡 伸篤 (Nobuatsu Oka)

1. 序

原点の近傍 U で定義された複素常微分方程式 $\frac{dz}{dt} = Z(z)$,
 $Z(0)=0$ $T \in \mathbb{C}$ を考える。(ここで $Z(z)$ は, 原点に特異点を
 持つ複素 Vector 場である。) この時, 上記方程式の解は, 原点
 を孤立特異点を持つ複素 1 次元の葉層 $\mathcal{F}_Z$ を U に与える。
 この葉層 $\mathcal{F}_Z$ の原点のまわりの状態は, 多くの場合 その線型部
 分の方程式 $\frac{dz}{dt} = A \cdot z$ $A = DZ(0)$ で決定される事が, Poincaré [2]
 Siegel [13], Brjuno [1] 等によって示されてきた。しかし,
 Vector 場の線型部分がいっても葉層 $\mathcal{F}_Z$ を決定するわけではない。
 今, $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を A の固有値の集合とすると, $\lambda_i = \sum_{j=1}^n m_j \lambda_j$
 $m_j \geq 0$ integer, $\sum_{j=1}^n m_j \geq 2$ という関係がある場合にそのような
 状態が起る。特に, A の固有値の作る convex hull $\mathcal{H}(A) \subset \mathbb{C}$
 が原点を含む場合は複雑で, 原点の近傍での葉層 $\mathcal{F}_Z$ の位相的
 type を決定することは重要な問題である。ここで, 原点の近

傍での位相的 type を決定するとは、原点の近傍の葉層 $\mathcal{F}_Z$ の葉を保存する位相同型写像による分類を与える事である。

特に $\mathbb{C}^2$ の場合 $DZ(0)$ の固有値が零でない場合, Dulac, Camacho, Neto, Sad 等によって分類が行われた。([6], [3] [2] 参照。) それにともなう、次に書くような位相不変量が発見されている。

$$\frac{dZ}{dT} = Z(z) \quad (z \in \mathbb{C}^2 \quad Z(0)=0 \quad T \in \mathbb{C})$$

λ_1, λ_2 を $DZ(0)$ の固有値とすると

(a) λ_1/λ_2 が有理数で $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合 Z の Jordan form が位相不変量

(b) $\lambda_1/\lambda_2 > 0$ $\lambda_1/\lambda_2 = n$ or $1/n$ の時 n が位相不変量

(c) $\lambda_1/\lambda_2 < 0$ $m\lambda_1 + n\lambda_2 = 0$, $m, n > 0$ の時 $Z(z)$ は

$$(\lambda_1 z_1 + a z_1^{b_m+1} z_2^{b_n} + R_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + (\lambda_2 z_2 + b z_1^{b_m} z_2^{b_n+1} + R_2) \frac{\partial}{\partial z_2}$$

と書けて b と λ_1/λ_2 が位相不変量 (ここで R_1, R_2 は $b(m+n)+1$ 以上の term である。)

一方 $DZ(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の場合については、その分類問題は複雑で未解決であるが、Camacho, Neto, Sad が [5] の中で、位相的 type を分類するための不変量として、Milnor number を導入した。これは、一般の $\mathbb{C}^n$ 上の vector 場の場合にも定義される。それは $\mu = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_n / I$ で定義される。ここで $\mathcal{O}_n$ は holomorphic function の原点のまわりの germ 全体のなす環で I は Z の座標表示をした時の成分 $z_1, z_2, \dots, z_n$ で生成される ideal である。

我々の analytic surface の孤立特異点について定義される, もとの Milnor number の概念を出発点として, $\mathbb{C}^2$ 上の原点の近傍で定義される複素 Vector 場の原点のまわりでの位相不変量を導入した。そのことについて報告する。

2. 準備.

ここでは我々の定理を述べるのに必要ないくつかの定義等を述べる。なを詳細は, [3], [4], [5] 等を参照して下さい。

定義1. 原点の近傍 U で定義された Vector 場 Z ($Z(0)=0$) について特異点 0 が simple とは, $D(Z) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ であり, $\lambda_1/\lambda_2 \notin \mathbb{Q}_+$ であるか, $\lambda_1=0, \lambda_2 \neq 0$ (あるいは $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2=0$) の時に言う。ただし, $\mathbb{Q}_+$ は正の有理数の集合。 $\lambda_1=0, \lambda_2 \neq 0$ ($\lambda_1 \neq 0, \lambda_2=0$) を zero simple とする。

注意1. $\mathbb{C}^2$ 上の複素 Vector 場の孤立特異点で有限回 blowing-up をするとその特異点はすべて simple になる。

定義2. 原点の近傍 U で定義された Vector 場 Z の原点での desingularization とは, 有限回の blowing-up の, のちに定義される Vector 場の特異点がいずれ simple 特異点となり, Z から導かれる葉層 $\mathcal{F}_Z$ のうち, 原点を通る葉がこの blowing-up の後, あらたに生じた, $\mathbb{CP}^1$ の和集合と横断的に交わるようになった状態を言う。

注意 2. 原点を通る葉と desingularization によって生じた $\mathbb{CP}^1$ たちの交点は blowing up した Vector 場の simple 特異点かまたは、通常点である。交点が通常点の時は、その $\mathbb{CP}^1$ は、Vector 場から定まる葉層の葉にはならない。

定義 3. V を Vector 場から定まる葉層の葉とする。この時、 $\bar{V} = V \cup \{0\}$ となるならば、 V をその Vector 場の separatrix と言う。

定義 4. Vector 場 Z が desingularization した時、新たに生じた $\mathbb{CP}^1$ を interval で表わし、 $\mathbb{CP}^1$ と $\mathbb{CP}^1$ の交点および、 $\mathbb{CP}^1$ と separatrix との交点を Vertex で表示する。さらに、separatrix を arrowhead line で表示したグラフを final resolution picture と言う。なお、 $\mathbb{CP}^1$ と separatrices が横断的に交わり、しかも交点が通常点になる場合、これらの separatrices を arrowhead line で書くかわりに $\mathbb{CP}^1$ を表わす line の方を = 重 line = で表示する。この = の部分を critical component と言う。

定義 5. final resolution picture の dual グラフを Vector 場の plumbing diagram と言う。即ち、上記グラフの交点を edge に arrowhead line を arrowhead に、= 重 line を $\odot$ に、その他の line を Vertex $\bullet$ で表わすグラフのことである。

注意 3. グラフの同型写像によって一致するものはすべて同一の final resolution picture とみなす。

定義6. Plumbing diagram の各 vertex には $\mathbb{CP}^1$ 上の $\mathbb{D}^2$ bundle とみた時の bundle のオイラー数を添加する。このオイラー数を Vertex weight という。

注意4. 2つの plumbing diagram が等しいとは グラフ同型写像が存在し、対応する Vertex weight が等しい時に言う。

定義7. 複素 Vector 場 Z が generalized curve であるとは、 Z を desingularization した後、すべての特異点が non-zero simple になる時に言う。この時、critical component を持つものを、degenerate generalized curve と言い、critical component を持たないものを non degenerate generalized curve という。

3. 主定理 とその証明の概略

以下我々の結果を述べる。を、splice diagram の定義、およびその性質については [8] [9] [10] 等を参照して下さい。

Theorem 1. Z を $\mathbb{C}^2$ の原点の近傍 $\square$ で定義された $Z(0)=0$ となる generalized curve とする。今 P_Z を Z の plumbing diagram とする。この時 P_Z から minimal splice diagram Γ_Z が定まる。更に、 Γ_Z が表現する graph link を L_Z とすると、 L_Z から決定される cohomology class $m_{L_Z} \in H^1(S^3 - L_Z)$ の Thurston ノルムが Γ_Z から計算される。これを $\|m_{L_Z}\|$ とすると、 $\|m_{L_Z}\|$ が位相不変量になる。ただし、 Γ_Z の arrow read

Vertex に対応する weight は 1 と定義する。□

Theorem 2. Z, Z' を原点の近傍で定義された, 原点を孤立特異点に持つ generalized curve とする。今 Z と Z' が topological equivalence であるとする。この時, $Z(Z')$ から導かれる minimal splice diagram $\Gamma_Z(\Gamma_{Z'})$ を用いて計算される Alexander polynomial を $\Delta_{\Gamma_Z}(\Delta_{\Gamma_{Z'}})$ とする。また, Z と Z' の plumbing diagram の critical component の個数を n_Z および $n_{Z'}$ で表わすと, n_Z と Δ_{Γ_Z} の対 (n_Z, Δ_{Γ_Z}) および $n_{Z'}$ と $\Delta_{\Gamma_{Z'}}$ の対 $(n_{Z'}, \Delta_{\Gamma_{Z'}})$ は, 一致する。ただし $\Delta_{\Gamma_Z}(\Delta_{\Gamma_{Z'}})$ は一変数 Alexander polynomial で, $\text{mod } t^N$ ($N \in \mathbb{Z}$) で定義する。□

注意 5. Theorem 1 において arrowhead が 1 つも存在しない時には norm を 0 で定める。

ここでは Theorem 1 の証明の概要を述べる。詳細は [11] を参照して下さい。

第一に, 我々は, separatrices と原点を中心とする十分小さい 4 次元 ball の境界 S^3_ε との交点から構成される S^1 の集合に注目する。non-degenerate な generalized curve の場合は link が構成されており, degenerate な場合, 無数の S^1 から構成される。いずれの場合も, このままでは, その状態が不明なので, vector field を desingularization させて, その final resolution picture を調べる。この時の final resolution picture は, そのグラフが

表わす plumbing 4-manifold を表わしている。またその時の arrowhead は, plumbing 4-manifold の境界である, 3-manifold (この場合 3次元球面) と, arrowhead line が表示するリーマン面との交点から構成される link を定義していきことになる。したがって, その dual graph である plumbing diagram も S^3 内の link を表現する。ここで vector 場から構成される plumbing diagram が tree であること, plumbing 4-manifold の intersection form の, determinant が今の場合は ± 1 であることに注意する。この時に Neumann の方法 [8] によって, plumbing diagram から splice diagram を構成する事が可能となる。次に, Camacho, Neto, Sad の定理によって ([4], [5],) separatrices が原点に特異点を持つ analytic curve であること, さらに, その curve に, 普通の意味で, desingularization をほどこした時, それにともなう vector 場も desingularization されてしまうことが, 示されているので, もし, Z と Z' に topological equivalence があれば, Z および Z' から定義される plumbing diagram は, グラフ同型になる。さらに, 両グラフに blowing down operation をほどこして, 同型な minimal plumbing diagram を決定することができ。したがって上記より, 同型な minimal splice diagram が定義される。もちろん, この時の splice diagram の ± 1 なる weight も一致していることがわかる。また, この splice diagram

からは, diagramの表現する link の Thurston norm が, 計算されるので, その norm は一致する。ただし, degenerate な generalized curve の場合は, desingularization をほどきした後, no-zero-simple singularity の separatrix になる原点を通る curve に対応する arrowhead のみから link を構成する。もし Z と Z' に topological equivalence があれば, その位相同型写像によって導かれる, graph 同型写像によ, て, それらの arrowhead は, 1 対 1 に対応する。ただし, arrowhead が 1 つも存在しない場合は, norm を 0 と定めるが, これも明らかに invariant である。□

注意 6. ここで blowing up することでは, 原点の近傍のうち, boundary の状況には変化は, おきない。したがって, splice diagram は, もともとの separatrices と原点の近傍の閉包の境界 S_ε^3 との intersection の作る S' の集合の一部, またはそれすべてを表わしている。このことから, 上記の splice diagram から計算される norm は, 上記の S' で構成される link の norm をはかっている。特に, non-degenerate generalized curve の場合は, separatrices と S_ε^3 の交点の作る link の norm になっている。

注意 7. Z が Hamiltonian の場合, それは non-degenerate な場合の generalized curve になることが知られており, しかもその葉層は $\dot{x} = -f_y$ $\dot{y} = f_x$ とした時の curve $f=0$ に関する Milnor fibration

と一致しているのど、この時の Thurston norm は Curve の場合の Milnor number を決定していることに他ならない。

4. $\mathbb{C}^2$ 上定義された原点に孤立特異点を持つ一般の複素 Vector 場の場合。

上記の定理 1, 2 は、一般の場合についても成立する。ここでは、その事について述べる。そのために、もう少し準備をする。

定義 8. $\mathbb{C}^2$ 上の Vector 場の algebraic multiplicity とは、 Z を原点のまわりで Taylor 展開して、

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1(x, y) + R_1(x, y) \\ \dot{y} = b_1(x, y) + R_2(x, y) \end{cases}$$

となった時、その first non zero jet $(a_1(x, y), b_1(x, y))$ の次数 ν の事である。

proposition 1. Z, Z' を原点に孤立特異点を持つ Vector 場とする。もし、 Z と Z' が topological equivalence とするならば、 Z と Z' の定める minimal plumbing diagram は一致する。

注意 8. Z と Z' が一般の場合には、topological equivalence か、たとしともその plumbing diagram はグラフ同型になるとは言えない。

proposition 1 の証明。

Z および Z' の separatrices を S, S' とする。今、 S と S' が、

desingularization されたとする。この場合まったく、同じ回数で desingularization される。その回数を k 回として、その状態の Vector 場を Z, Z' に対応して $Z^{(k)}, Z'^{(k)}$ と書く。この時の $Z^{(k)}, Z'^{(k)}$ の特異点の状況を調べる。

Case (1) $Z^{(k)}$ および $Z'^{(k)}$ に関して invariant な $\mathbb{CP}^1$ 上に生じる特異点について。

$Z^{(k)} (Z'^{(k)})$ の定める葉層を $F_Z^{(k)} (F_{Z'}^{(k)})$ とすると、もし $F_Z^{(k)}$ が $\mathbb{CP}^1$ と横断的に交われば $F_{Z'}^{(k)}$ と $\mathbb{CP}^1$ も対応して、横断的に交わっている。その場合 Camacho [5] の Lemma 1 によって、その algebraic multiplicity は 1 であることがわかる。この時の固有値 $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}$ および $\lambda_1^{(k)}, \lambda_2^{(k)}$ はいずれもゼロではなく、 $m\lambda_1^{(k)} = n\lambda_2^{(k)}$ $m, n \in \mathbb{N}$ なる関係を持たない。なぜならば、そのような関係があれば、この特異点に関する separatrices が 1 個だけが無数にあることになりいずれも 2 つだけ持つことに反する。したがって non-zero simple になっている。この場合、plumbing diagram の両の同型字係によって 2 つの対応する特異点の separatrix を示す、arrowhead の両に対応がつく。次に $\mathbb{CP}^1$ 上に $Z^{(k)}$ の zero-simple singularity があらわれたとする。この時、位相同型字係で対応する $Z'^{(k)}$ の invariant な $\mathbb{CP}^1$ 上には zero simple singularity が存在している保障はない。zero simple singularity には必ず Vector 場に関して invariant になる特異点を通過する curve を持っている。

([5] を参照。) しなかつて、その invariant curve は $\mathbb{CP}^1$ に含まれていなければならぬ。なぜならば、そうでないとする
と、 $\Sigma^{(k)}$ invariant な互に横断的に交わる curve が 2 本存在して
いることになり、zero simple singularity に反する。しなかつ
て、minimal plumbing diagram に対してそのような特異点は
なんら影響を与えない。しなかつて、 $\Sigma^{(k)}$ と $\Sigma^{(k)}$ の zero simple
singularity が別に位相同型写像で対応する必要がない。次に、
もし、 $\mathbb{CP}^1$ 上に $\Sigma^{(k)}$ が normal form で書いた時に、 $\dot{x} = \lambda_1^{(k)} x$
 $\dot{y} = \lambda_2 y + \mu x^p$ for $p \in \mathbb{N}$ の型の singularity を持つとする。この
場合も対応して $\Sigma^{(k)}$ にそのような singularity が存在する保障は
ない。しかし、この場合もそのような特異点は 1 本の separatrix
を持つことがわかるので、それ以上と同様に $\mathbb{CP}^1$ に含まれてい
なければならぬ。この場合は desingularization を $\Sigma^{(k)}$ のその
特異点に関して続け 2 行をかなければならぬ。しかし、そ
の際、新しい arrowhead line が出現しないので、blowing down
operation をほどこして、そのような特異点が $\mathbb{CP}^1$ 上に存在しな
い場合のグラフに帰着される。しなかつて、minimal plumbing
diagram のレベル 2^i のそのような特異点が存在しなくても
グラフの同型には影響がない。

Case (2) $\mathbb{CP}^1$ と $\mathbb{CP}^1$ の交点に現われる特異点について、

$\Sigma^{(k)}$ にあらわれる $\mathbb{CP}^1$ と $\mathbb{CP}^1$ の交点は同じ数だけ対応して、

$Z^{(k)}$ にもあらわれる。その交点は次の2種類に分けられる。

(1) 一方の $\mathbb{CP}^1$ が invariant で もう一方の $\mathbb{CP}^1$ が critical component の場合

(2) 両方の $\mathbb{CP}^1$ が invariant な場合

$Z^{(k)}$ と $Z'^{(k)}$ を対応させる位相同型写像のもと, (1) の交点は (1) に, (2) の交点は (2) に対応する。(1), (2) のいずれについても $Z^{(k)}$ および $Z'^{(k)}$ の separatrix がその交点を通過することはない。(1) の場合, 交点は $Z^{(k)}$ の特異点でないから対応する $Z'^{(k)}$ でも特異点ではない。(2) の場合は, 交点は non-zero simple singularity である。

Case (3) critical component の $\mathbb{CP}^1$ 上に出現する特異点について,

$Z^{(k)}$ の critical component は, 同型写像のもと, $Z'^{(k)}$ の critical component に対応する。今, この $\mathbb{CP}^1$ 上に $Z^{(k)}$ の特異点が存在するとその separatrix にその方向の algebraic multiplicity が, Camacho [5] の Theorem 1 によって零になる。したがって, その交点は特異点ではない。したがって critical component 上には $Z^{(k)}$ の特異点も存在しない。よって対応する $Z'^{(k)}$ にも特異点も存在しない。以上の考察より, Z, Z' の2つの minimal plumbing diagram は一致する。□

系. Z, Z' を proposition 1 と同じ 2つの vector 場とする。 Z と Z' が topological equivalence とすると, Z, Z' および Z' の

minimal splice diagram は一致する

□

この系と, Theorem 1 および Theorem 2 の証明を適用すれば, Theorem 1, Theorem 2 に対応する結果が得られる。ここでは Theorem 2 に対応する結果のみを書く。

Theorem 3. Z, Z' を $\mathbb{C}^2$ 上の holomorphic vector 場とし, z もに原点を孤立特異点に持つとする。この時, Z および Z' が topological equivalent ならば, minimal splice diagram Γ_Z および $\Gamma_{Z'}$ が同型となり, Theorem 2 と同じ対 (Δ_{Γ_Z}, N_Z) と $(\Delta_{\Gamma_{Z'}}, N_{Z'})$ が一致する。 □

5. holonomy と splice diagram について,

この章では holonomy を考慮した splice diagram について考察する。vector 場を desingularization した時, non-zero simple singularity の中で, その固有値の比が負の有理数になっているものに注目する。即ち, $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{N}$) となっている 2 つの固有値 λ_1, λ_2 を持つ singularity である。この時 final resolution picture に対応する, $\mathbb{CP}^1$ 上の Disk bundle の fiber を十分小さくとり, その non-zero simple singularity の十分近傍の $\mathbb{CP}^1$ 上と, separatrix 上に十分小さい circle をとり, その上にフイース $\mathbb{D}^2$ をたて, holonomy を調べる。(図 1 参照) ここで, $\tilde{Z}$ を desingularization した vector 場によって導かれる final resolution picture の表現する plumbed 4-manifold 上の葉層とす

る。この葉に接する実1次元力学系で Morse-Smale type となるものが構成できるから ([3] 参照) 又、このフェンスに横断軌が交わっている。このフェンスは位相的には、solid torus になりこの中に実1次元力学系 (葉層) が定義される。holonomy は名 non-zero simple singularity のまわりで調べていけばよいから、線型部分を持つ複素 Vector 場の resonance 条件 $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$ を持つ場合の同様なフェンス上の実1次元力学系の holonomy を調べることに帰着する。これらについては, Camacho, Neto, Sad たちによりよく研究されている。([2], [3] 参照)。

この solid torus 内の1次元力学系が定める holonomy 写像は次の補題の形で書けることがよく知られている。

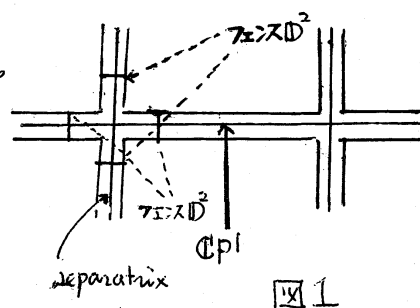


図1

Lemma 1. $\frac{dz}{dt} = Z(z)$ $z = (z_1, z_2)$, $DZ\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 = 0$ ($m_1, m_2 \in \mathbb{N}$) とする常微分方程式を考える。 γ を原点を中心とした $z_1=0$ 上の circle とする。この circle 上は フェンス D^2 をたどると、 Z により導かれた葉層 $\mathcal{F}_2$ は、この solid torus 内に 1次元葉層 χ を定義する。この時、 γ の近傍の χ による holonomy 写像を f と定義すると $f(z) = \mu_1 z + A z^{k_{m+1}} + \dots$ と書ける。ただし $\mu_1 = \exp 2\pi \lambda_2 / \lambda_1 i$ である。同様に、 $z_2=0$ 上の原点を中心とする十分小さい circle γ' をとり、holonomy 写像を g と定義すると $g(z) = \mu_2 z + B z^{k_{m+1}} + \dots$ とする。ただし $\mu_2 = \exp 2\pi \lambda_1 / \lambda_2 i$ である。

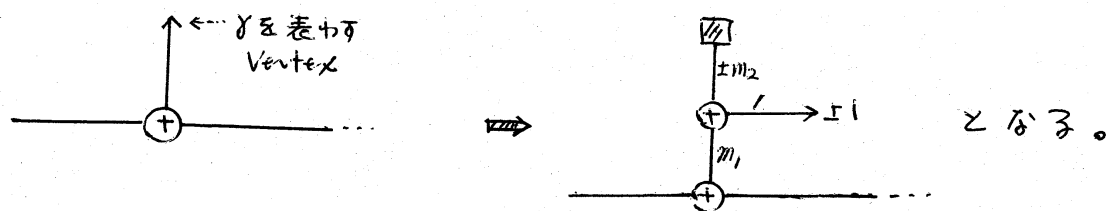
ただし, m, k, n は $\frac{dz}{dt} = Z(z)$ の normal form を $\begin{cases} \frac{dz_1}{dt} = \lambda_1 z_1 + a z_1^{k m_1} z_2^{k n_1} R_1 \\ \frac{dz_2}{dt} = \lambda_2 z_2 + b z_1^{k m_2} z_2^{k n_2} R_2 \end{cases}$

とした時の係数から求められるものである。

更に Camacho [2] の定理によって f は次の形のいずれかの normal form と位相共役である。

$f_{\text{normal}}(z) = \lambda z(1 + z^{k m_1})$ あるいは, $f_{\text{normal}}(z) = \lambda z$ 。ただし, $\lambda = \exp(-m_1/m_2) 2\pi i$ である。次に, f_{normal} の iteration を考える。この時, $\bigcup_{p \in \mathbb{Z}} (f_{\text{normal}})^{m_2 p}(D^2) - \{0\}$ は $2k m_2$ 個の連結成分に分かれる。(図2参照) この連結成分に注目する。1つの連結成分に含まれる点を z_0 として, z_0 に次々に f_{normal} の iteration を行くと, z_0 に f_{normal} の線型部分を iterate した時に次々に含まれていく連結成分と同じ部分の連結成分に含まれていく。ここで f_{normal} の線型部分は周期写像であるから, $f_{\text{normal}}^{m_2}(z_0)$ をみると z_0 と同じ連結成分に含まれる。 $z_0, f_{\text{normal}}(z_0), f_{\text{normal}}^2(z_0), \dots, f_{\text{normal}}^{m_2}(z_0)$ を次々に X の orbit を利用して結び, 更に z_0 と $f_{\text{normal}}^{m_2}(z_0)$ を, 1つの連結成分内の arc で結べば, X の orbit の γ のまわりでの近似が得られる。これは, γ 上の $(m_1 \pm m_2)$ cable になっている。また, blowing up する点 a の近傍を U とする。 U を a で blowing up したものを $\tilde{U}$ とする。このとき, $\tilde{U} - \mathbb{CP}^1$ 上の葉層と, $U - \{a\}$ の葉層とは, 位相同型になっている。したがって, u の separatrix 上に存在する circle にフェンスをたてた時, そのフェ

ミス上の力学系は final resolution picture に対応する plumbed 4-manifold 上のフリス $S^1 \times D^2$ の力学系と位相同型となる。しかも, $\mathbb{R}_2$ 上は Morse-Smale 型の 1次元力学系が存在していることに再び注意すると, $\partial U = S_\varepsilon^3$ と separatrix の交点によって作られる link の S_ε^3 内での近傍における 1次元力学系ともみなせる。したがってその holonomy も final resolution picture 上で考えているものとも位相共役である。したがって minimal splice diagram におけるこの separatrix に対応する arrowhead vertex に対し $(m_1, \pm m_2)$ cable operation をほどこす。つまり,



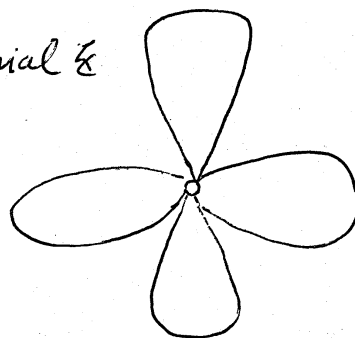
ここで $\square$ は γ に対応する arrowhead vertex を表わす。

固有値の比が $\mathbb{Q}$ になるすべての arrowhead vertices に今の cable operation をほどこす。このようにして定義された minimal splice diagram も位相不変である。 図2

次に, この diagram から Alexander polynomial を

読みとりこれを $A(t, t^{-1})$ と表わすと,

これが原点のまわりの位相不変量になる。



$m_2 k = 2$ の場合

位相不変になることの証明には、今までの *minimal splice diagram* が位相不変になることに加えて、 $\lambda_1/\lambda_2 = -m_1/m_2 \in \mathbb{Q}^-$ の場合 m_1, m_2 が *topological invariant* になる事をみればよい。なぜならば $\mathbb{C}P^1$ 上の Z および Z' が位相同型な事は、それを *blowing up* した $\tilde{\mathbb{C}P}^1$ 上の $\tilde{Z}$ および $\tilde{Z}'$ の位相同型が $\mathbb{C}P^1$ 上で自然に $\mathbb{C}P^1$ - $\{0\}$ の位相同型から定まるからである。 Z と Z' が *flow equivalence* なるは *holonomy map* f と f' が位相共役になる事に注意する。後は、Camacho の proposition [3] の証明を繰り返すことにより、上記の m_1, m_2 は位相不変になることがわかる。ここでは、簡単に証明を繰り返すことにする。つまり Z および Z' が線型部分をもつ場合に帰着される。ただし $DZ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ $DZ' = \begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 \\ 0 & \lambda'_2 \end{pmatrix}$ で $\lambda_1/\lambda_2 = m_1/m_2$ $\lambda'_1/\lambda'_2 = m'_1/m'_2$ とする。今、 f と f_{normal} は位相共役より $\Delta f \Delta^{-1} = f_{\text{normal}}$ である。

$\bigcup_{p=-\infty}^{p=+\infty} f^{m_2 p}(\mathbb{D}^2) - \{0\} = \bigcup_{p=-\infty}^{p=+\infty} \Delta f_{\text{normal}}^{m_2 p} \Delta^{-1}(\mathbb{D}^2) - \{0\}$ は、同じ個数の component を持つ。しかも f と f' が位相共役より、 f' についても $\bigcup_{p=-\infty}^{p=+\infty} f'^{m'_2 p}(\mathbb{D}^2) - \{0\}$ と同じ個数の component にわかれる。

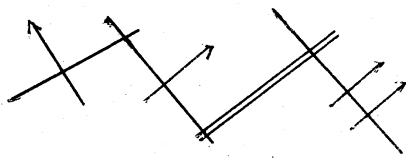
したがって $f'^{m'_2}(p)$ と p は同じ component に属する。したがって $f'^{m'_2}$ でも同じ component に属する。よって、 $m'_2 = m_2 k$ $k \in \mathbb{Z}$ 同様に $m_2 = m'_2 k'$ $k' \in \mathbb{Z}$ も言える。したがって $m_2 = m'_2$ *holonomy* g についても同じことが言えて、 $m_2 = m'_2$ も言える。

□

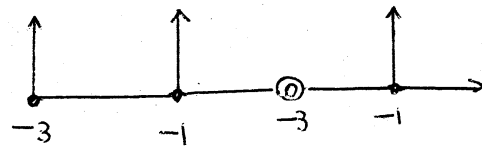
最後に具体的な例について計算した結果を述べる。

例
$$\begin{cases} \dot{x} = x^4 y \\ \dot{y} = x^9 + y^7 + 2x^3 y^2 \end{cases}$$

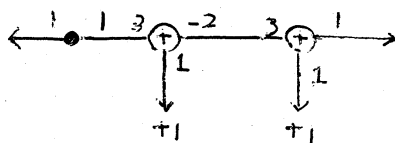
final resolution picture



plumbing diagram



splice diagram



Thurston norm

18

対

$$(t^{-2}(t^{10}-1)(t+1)(t-1)^2, 1)$$

参考文献

- [1] A.D. Brjuno, Analytic form of differential equations,
Trans. Moscow Math. Soc. 25 (1971).

- [2] C. Camacho, On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$, Asterisque 59-60, (1978) 83-94.
- [3] C. Camacho and P. Sad Classification and Bifurcations of holomorphic flows with resonances in $\mathbb{C}^2$, Invent. Math. 67, (1982) 447-472
- [4] C. Camacho and P. Sad Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields, Ann. of Math. 115, (1982) 579-595.
- [5] C. Camacho, A. L. Neto and P. Sad, Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields, J. Differential Geometry 20 (1984) 143-174.
- [6] H. Dulac. Recherches sur les points singularities de equations differentielles, J. Ecole polytechnique 2, (1904) 1-125.

- [8]. D. Eisenbud, and W. D. Neumann, Three-dimensional link theory and invariants of plane curve singularities
Ann. Math. Studies 101 Princeton Univ. Press.
- [9] W. D. Neumann Complex algebraic plane curves via their links at infinity Invent. Math. (1989) 445-489.
- [10] W. D. Neumann On the topology of curves in complex surface,
Topological methods in algebraic transformation groups,
proceedings of a conference at Rutgers University,
Progress in Math. Vol. 80, 1989.
- [11] N. Oka On holomorphic vector fields in $\mathbb{C}^2$ and invariants of the graph links, preprint.
- [12] H. Poincaré Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles, Thèse, Paris (1879).
- [13] C. L. Siegel Über die Normalform analytischer Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung
Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math. Phys. 21-30 (1952)