

マヤ・ゲームの数学的理論

(佐藤幹夫氏講演)

京大 理 榎 本 彦 衛

佐藤先生は、Maya game について今までにも何度か講演されていいますが、良形判定条件の完全な証明はまだ一度も発表されていません。今回のシンポジウムにおいても、簡単な解説をされただけでしたが、シンポジウム終了後に、詳しい証明を初めて聞かせて頂くことができました。§2 から後はその時の記録です。ただ、定理(3.7)には証明の方針しか与えてありません。詳細は[3]を参照して下さい。§1に書いてあることが、ほぼシンポジウムにおいて話された内容に相当しています。

(文 献)

- [1] 佐藤幹夫：あるゲームについて（代数幾何学シンポジウム報告，1968，東大数学教室）
- [2] 一松 信：石とりゲームの教理（森北出版）
- [3] 榎本彦衛：Maya game について（数学の歩み（近刊））
（佐藤特集号）

§1. Maya game の解説

次のような game (Maya game¹⁾ と呼ぶことにする) を考えることにする。

白と黒の碁石が一行に並べられてゐる状態から game を開始する。ただし、ある所から左はすべて黒石、ある所から右はすべて白石になっているとする。

例 1. $\cdots \bullet \bullet \bullet \circ \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ \bullet \circ \circ \circ \cdots$
 $-3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12$

例 2. $\cdots \bullet \bullet \bullet \circ \bullet \circ \bullet \bullet \circ \circ \circ \bullet \circ \bullet \circ \circ \cdots$

許される‘手’というのは、白石と黒石を交換することであるが、交換することにより、黒石は前の位置より左側に行かなければならない。交互に許された手を実行していき、許された手がなくなった時、すなわち、ある所から左はすべて黒石、右側はすべて白石となり、従つてどの黒石もどの白石より左側にきた時に game は終了し、手のなくなった方が負けである。

碁石は数直線上に並んでいて、その座標が $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots$ となっていると考えることができる。座標の原点は 0 にとってもいいが、ここでは一番左側にある白石の座

標を0とする。そうすると、黒石のある場所は、

$$\dots -3, -2, -1, l_0, l_1, \dots, l_{n-1}$$

と書ける。例1では

$$l_0 = 1, l_1 = 2, l_2 = 3, l_3 = 4, l_4 = 8,$$

例2では

$$l_0 = 1, l_1 = 3, l_2 = 4, l_3 = 8, l_4 = 10$$

となっている。 l_i 達は

$$(1.1) \quad 0 < l_0 < l_1 < \dots < l_{n-1}$$

という関係を満たしているから、

$$f_i = l_i - i \quad (i = 0, 1, \dots, n-1)$$

とおくと f_i 達は、

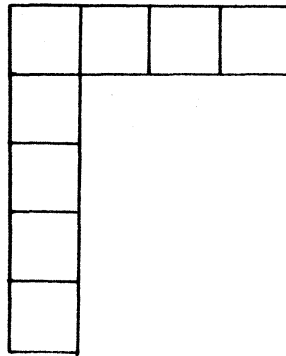
$$(1.2) \quad 0 < f_0 \leq f_1 \leq \dots \leq f_{n-1}$$

という関係を満たす。

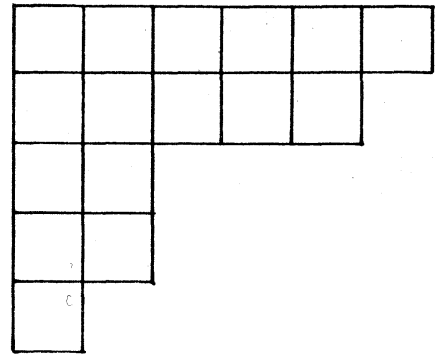
一般に、(1.2) を満たす整数の組 $\Delta = (f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$

は *Young diagram* と呼ばれ、これは第1行目に f_{n-1} 個のマ
ス目、第2行目に f_{n-2} 個のマス目、 $\dots$ 、第 n 行目に f_0 個
のマス目を左端をそろえて並べた *diagram* により具体的に
実現される。²⁾ 明らかに、Maya game の局面と *Young diagram*
とが1対1に対応している。最初にあげた例を *Young diagram*
を使って書くと、次頁のようになる。

例 1.

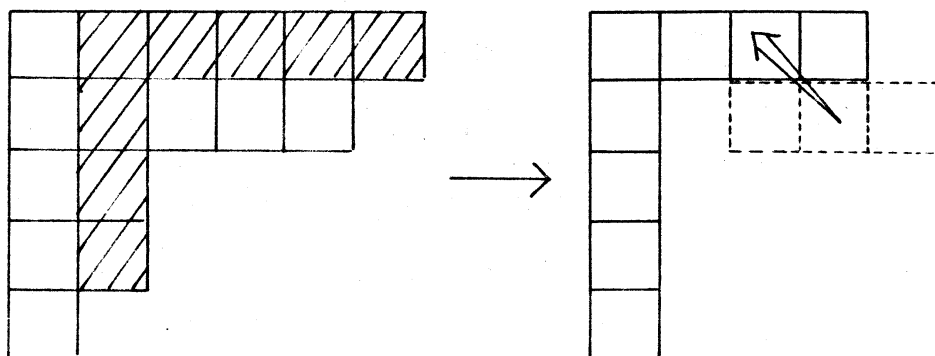


例 2.



しかし、Maya game との関係では、 (f_i) より (l_i) の方が重要であり、 $(1, 1)$ を満たす (l_i) と、 $(1, 2)$ を満たす (f_i) とは 1 対 1 に対応しているので、ここでは $D = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ という組のことを Young diagram と呼ぶことにする。

Young diagram の i 行 j 列目にあるマス目と、その右側および下側にあるマス目を全部合わせたものを $hook(i, j)$ と呼ぶことにする。容易にわかるように、Maya game において、右から i 番目の黒石と左から j 番目の白石とを交換することは、対応する Young diagram において、 $hook(i, j)$ を取り除き、残りを左上につめるという操作に対応する。例えば、例 2 において、2 の位置にある白石と 10 の位置にある黒石を交換すると、例 1 の状態になるが、これは、例 2 の Young diagram から $hook(1, 2)$ を取り去ることに対応している。



許される年というのを Young diagram $D=(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ の言葉でいうと、ある l_i を

$$l_i > l'_i \geq 0, \quad l'_i \neq l_j \quad (0 \leq j \leq n-1)$$

を満たす l'_i に変えることである。

(注) (1.1) を Young diagram の定義に使っていると、

$l'_i < l_{i-1}$ となった時には、大きさの順に並べなおさ

なくてはならぬし、 $l'_i = 0$ となった時には、座標

の原点をずらして、 $(0, l_0, l_1, \dots, l_{n-1}) = (l_0 - 1,$

$l_1 - 1, \dots, l_{n-1} - 1)$ という同視を行なう必要があ

る。そこで $D=(l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ が Young diagram

であることの定義として

$$(1.1)' \quad l_i \geq 0, \quad l_i \neq l_j \quad (i \neq j)$$

を使い、 l_i 達の順序は無視することにした。

Maya game の良形 (後手必勝形) の判定条件として同値なものがいくつか知られている。この節では、以下、それらの解説を証明抜きで与えることにする。

Young diagram D の hook Γ に含まれるマス目の数を Γ の *size* と呼ぶ。 D の hook の中で、その *size* が丁度 2^i で割り切れる (i.e. 2^i で割り切れ、 2^{i+1} では割り切れない) ものの数を $\alpha_i(D)$ と書くことにする。 ($i=0, 1, 2, \dots$)

判定条件 I. D が良形 $\iff \alpha_i(D)$ ($i=0, 1, 2, \dots$) がすべて偶数

最初にあげた例について、Young diagram のマス目に hook の長さを書き込むと、下のようになる。

例 1.

8	3	2	1
4			
3			
2			
1			

例 2.

10	8	5	4	3	1
8	6	3	2	1	
4	2				
3	1				
1					

例 1 では、 $\alpha_0=4$, $\alpha_1=2$, $\alpha_2=1$, $\alpha_3=1$, $\alpha_i=0$ ($i \geq 4$) となっているから、これは良形ではない (実際、0 の位置の白石と 8 の位置の黒石とを交換すれば、game が終了する)。
 例 2 では、 $\alpha_0=8$, $\alpha_1=4$, $\alpha_2=2$, $\alpha_3=2$, $\alpha_i=0$ ($i \geq 4$) となっているから、これは良形である。

次に Young diagram D の hook の中で、size が 2^i で割り切れるものの数を $\beta_i(D)$ と書くことにする。すなわち、

$$\beta_i(D) = \sum_{j \geq i} \alpha_j(D) \quad (i=0, 1, 2, \dots)$$

とおく。

判定条件 I'. D が良形 $\Leftrightarrow \beta_i(D) (i=0, 1, 2, \dots)$ がすべて偶数

$\gamma_i(D)$ を、0 または 1 で、 $\gamma_i(D) \equiv \beta_i(D) \pmod{2}$ となるように決め、第 i 桁目が $\gamma_i(D)$ となる 2 進数を、Young diagram D の F -number と呼び、 $F(D)$ と書くことにする。

判定条件 I''. D が良形 $\Leftrightarrow F(D) = 0$.

次に別の形の判定条件を与えることにしよう。

整数の全体 $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 f で、

$$(1.3) \quad f(x + 2^k) \equiv f(x) + 2^k \pmod{2^{k+2}} \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

(1.4) ある非負整数 k が存在し、

$$f(x + 2^k) = f(x) + 2^k$$

となるものを考える。このような f の全体は、写像の合成に
関し (非可換) 群 G をつくる。³⁾ G の元の中で、(1.4) の k
として 0 がとれるものを考える。この場合 $f(x+1) = f(x)$

+1 となるから、 $f(0) = a$ とおくと、

$$f(x) = x + a$$

と書ける。これを '平行移動' の全体は、 G の部分群 H をつくる。

(1.3), (1.4) を満たす f に対し、座標 x が $f(x) \geq 0$ を満たす場所に白石、 $f(x) < 0$ を満たす場所に黒石を置くことにより、Maya game の局面との対応がつく。ただし、平行移動 (i.e. 座標の原点を取り換えること) によって局面は変わらないから、Maya game の局面と G/H とが 1 対 1 に対応している。

判定条件 II.⁴⁾ $f \in G$ が良形に対応する

$$\Leftrightarrow f \in G_0 = [G, G] \cdot H$$

以下、判定条件 I'' をもっと詳しく考えることにしよう。そのために、2つの整数 a, b の2進和 $a \oplus b$ を定義する。まず、

$$0 \oplus 0 = 0, \quad 0 \oplus 1 = 1 \oplus 0 = 1, \quad 1 \oplus 1 = 0$$

と定義し、 a, b の2進表示を

$$a = [\dots a_2 a_1 a_0]_{2\text{-adic}}$$

$$b = [\dots b_2 b_1 b_0]_{2\text{-adic}}$$

とするとき、 $c_i = a_i \oplus b_i$ とおけば、 $a \oplus b$ の2進表示は

$$a \oplus b = [\dots c_2 c_1 c_0]_{2\text{-adic}}$$

で与えられる。ただし、負の数の2進表示は補数表示を使う。

すなわち、 $a (\geq 0)$ の2進表示を

$$a = [\dots a_2 a_1 a_0]_{2\text{-adic}}$$

とすると、

$$-a-1 = [\dots \bar{a}_2 \bar{a}_1 \bar{a}_0]_{2\text{-adic}}$$

が $-a-1$ の2進表示である。ただし、 $\bar{a}_i = a_i \oplus 1$ である。

(補数表示, 2進和に関する詳しい説明は [2] 付録を参照)

次に、整数 x の *norm* $N(x)$ を、

$$N(x) = \lambda(x) \oplus x$$

で定義する。ただし、 $\lambda(x) = x-1$ である。すなわち、

$$2^k \parallel x \quad (\text{i.e. } 2^k | x, 2^{k+1} \nmid x)$$

とすると、

$$N(x) = [\dots 0 \overbrace{1 \dots 1}^{k+1}]_{2\text{-adic}} = 2^{k+1} - 1$$

となる。この *norm* を使うと、判定条件 I'' に出てきた *F-number* は、

$$F(D) = \sum_{P: \text{hook}}^{\oplus} N(P \text{ の size})$$

と書ける。*hook* を使わず、 (l_i) を使うと、

$$(1.5) \quad F(D) = \sum_{i=0}^{n-1}^{\oplus} l_i \oplus \sum_{i < j}^{\oplus} N(l_i \oplus l_j)$$

と表わされる。⁵⁾

§2. *Maya algebra*

前節の $(\mathbb{Z}, \oplus, \lambda)$ は、

$$N(\lambda(x) \oplus \lambda(y)) = N(x \oplus y) \quad (x, y \in \mathbb{Z})$$

という性質を持っている。そこで、この一般化として、次のように *Maya algebra* を定義する。(任意の $x \in \mathbb{Z}$ に対して $x \oplus x = 0$ が成り立つから、 $\oplus$ は引き算とみることにもできるということに注意.)

(2.1) 定義: $A = (A, +, \lambda)$ が *Maya algebra* であるとは、次の (1), (2) を満たすことである。

(1) $(A, +)$ は可換群である。

(2) λ は A から A への写像であって、

$$N(x) = \lambda(x) - x$$

とおくと、

$$(2-i) \quad N(\lambda(x) - \lambda(y)) = N(x - y)$$

が、また

$$\lambda'(x) = x + N(-x)$$

とおくと、

$$(2-ii) \quad N(\lambda'(x) - \lambda'(y)) = N(x - y)$$

が、任意の $x, y \in A$ に対して成り立つ。

(注) A から A への写像 λ'' を

$$\lambda''(x) = x - N(x) = -\lambda'(-x)$$

と定義し、(2-ii) を

$$(2-iii) \quad N(\lambda''(x) - \lambda''(y)) = N(x - y)$$

でおきかえても、同値な *Maya algebra* の定義が得られる。

(注) $(A, +, \lambda')$, $(A, +, \lambda'')$ も *Maya algebra* となる。
すなわち、

$$N'(x) = \lambda'(x) - x = N(-x)$$

$$N''(x) = \lambda''(x) - x = -N(x)$$

とかくと、

$$N'(\lambda'(x) - \lambda'(y)) = N'(x - y)$$

$$N''(\lambda''(x) - \lambda''(y)) = N''(x - y)$$

が、任意の $x, y \in A$ に対し成り立つ。

(2.2) 定義: $M(x, y) = N(x - y)$ とおく。そして、 A から A への写像 f が、

$$M(f(x), f(y)) = M(x, y) \quad (x, y \in A)$$

を満たす時、 f は *isometry* であるという。

従って、定義 (2.1) における条件 (2-i), (2-ii) は、それぞれ、 λ, λ' が *isometry* であるということを意味する。

以下、*Maya algebra* $A = (A, +, \lambda)$ を 1 つ固定して考えることにする。

(2.3) 定義: 集合 A から生成された自由 *abel* 群 $\mathfrak{A}(A)$

の元を *divisor* と呼ぶ。(Young diagram, すなわち, *Maya game* の局面の拡張と考えられる.)

(2.4) 定義: $D \in \text{Div}(A)$ に対し, A から A への写像 $\mathcal{G}_D$ を

$$\mathcal{G}_D(x) = x + M(x, D) \quad (x \in A)$$

により定義する。ただし,

$$\begin{aligned} D &= \frac{(a_1) \cdots (a_m)}{(b_1) \cdots (b_n)} \quad (a_i, b_i \in A) \\ &= (c_1)^{\nu_1} \cdots (c_\ell)^{\nu_\ell} \quad (c_i \in A, \nu_i \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

のとき,

$$\begin{aligned} M(x, D) &= \sum_{i=1}^m M(x, a_i) - \sum_{j=1}^n M(x, b_j) \\ &= \sum_{i=1}^{\ell} \nu_i M(x, c_i) \end{aligned}$$

とおく。また *divisor* $D' = (d_1)^{\mu_1} \cdots (d_k)^{\mu_k}$ に対しても

$$\mathcal{G}_D(D') = (\mathcal{G}_D(d_1))^{\mu_1} \cdots (\mathcal{G}_D(d_k))^{\mu_k}$$

と定義し, $\text{Div}(A)$ から $\text{Div}(A)$ への写像とも考える。

(2.5) 定義: A から A への写像 μ を

$$\mu(x) = -x + N(0) \quad (x \in A)$$

により定義し, $\mu(x)$ のことを x の *complement* と呼ぶ。

$$(2.6) \quad \mu^2 = id,$$

$$\lambda \mu \lambda' = \lambda' \mu \lambda = \mu.$$

(証明)

$$\mu^2(x) = -\{-x + N(0)\} + N(0) = x \quad (x \in A)$$

$$\text{より } \mu^2 = id.$$

$$N(0) = \lambda(0) = \lambda'(0)$$

に注意すれば、

$$\begin{aligned} \lambda \mu \lambda'(x) &= \lambda(-\lambda'(x) + N(0)) \\ &= -\lambda'(x) + N(0) + N(-\lambda'(x) + \lambda'(0)) \\ &= -(x + N(-x)) + N(0) + N(-x) \\ &= -x + N(0) \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

となる。同様に、

$$\begin{aligned} \lambda' \mu \lambda(x) &= \lambda'(-\lambda(x) + N(0)) \\ &= -\lambda(x) + N(0) + N(\lambda(x) - \lambda(0)) \\ &= -(x + N(x)) + N(0) + N(x) \\ &= \mu(x). \end{aligned}$$

従って、 $\lambda \circ \mu \lambda' \mu = \mu \lambda' \mu \circ \lambda = \mu^2 = id$ となるから、

(2.7) $\mu \lambda' \mu$ は λ の逆写像である。従って、特に、 λ は *bijection* である。

(2.8) $\mathcal{I}_D$ ($D \in \mathfrak{F}(A)$) は *bijective isometry* である。

(2.9) $D, D' \in \mathfrak{F}(A)$ ならば、

$$\mathcal{I}_{D'D} = \mathcal{I}_{\mathcal{I}_D(D')} \circ \mathcal{I}_D$$

が成り立つ。

(証明)

step 1. $D = (a)$ ($a \in A$) ならば、(2.8) が成り立つ。

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_D(x) &= x + M(x, a) \\ &= x + N(x - a) \\ &= x + \lambda(x - a) - (x - a) \\ &= \lambda(x - a) + a \\ &= f_a^{-1} \circ \lambda \circ f_a(x) \end{aligned}$$

ただし、 $f_a(x) = x - a$ とおく。 f_a は明らかに

bijective であって、かつ

$$\begin{aligned} M(f_a(x), f_a(y)) &= M(x - a, y - a) \\ &= N(x - y) \\ &= M(x, y) \end{aligned}$$

より、 f_a は *isometry* である。故に、 $\mathcal{I}_D$ も *bijective isometry* となる。

step 2. $\mathcal{I}_D$ が *isometry* ならば、(2.9) が成り立つ。

$\mathcal{I}_D$ が *isometry* とすると、

$$\mathcal{I}_{D'D}(x) = x + M(x, D') + M(x, D)$$

$$= \mathcal{P}_D(x) + M(\mathcal{P}_D(x), \mathcal{P}_D(D'))$$

$$= \mathcal{P}_{\mathcal{P}_D(D)}(\mathcal{P}_D(x))$$

step 3. $D = (t)^{-1}$ ($t \in A$) の時も, (2.8) が成り立つ。(従って (2.9) も成り立つ.)

$$D_1 = (t - \lambda(0)) \in \Xi(A)$$

とおく, $\mathcal{P}_{D_1}$ は isometry だから (step 1)

$$\text{id} = \mathcal{P}_{D_1^{-1}D_1} = \mathcal{P}_{\mathcal{P}_{D_1}(D_1^{-1})} \circ \mathcal{P}_{D_1}$$

と表す. $\lambda = 3$ が

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{D_1}(D_1^{-1}) &= (\mathcal{P}_{D_1}(t - \lambda(0)))^{-1} \\ &= (t - \lambda(0) + M(t - \lambda(0), t - \lambda(0)))^{-1} \\ &= (t)^{-1} \\ &= D \end{aligned}$$

故に, $\mathcal{P}_D = (\mathcal{P}_{D_1})^{-1}$ は, bijective isometry である。

step 4. 任意の divisor $D = \frac{(a_1) \cdots (a_m)}{(b_1) \cdots (b_n)}$ について

も, $m+n$ に関する帰納法により, (2.8), 従って (2.9) が証明できる。

(2.10) $\mathcal{G} = \{ \mathcal{P}_D \mid D \in \Xi(A) \}$ は写像の合成に関し群をつ

くる。特に $(\mathcal{P}_D)^{-1} = \mathcal{P}_{\mathcal{P}_D(D^{-1})}$ である。よって, $D, D' \in \Xi(A)$

に対し, D' と D の新しい積 $D' * D$ を

$$D' * D = \mathcal{P}_D^{-1}(D') \cdot D$$

と定義すれば、 $(\Phi(A), *)$ は群になり、

$$\mathcal{F}_{D * D} = \mathcal{F}_D \circ \mathcal{F}_D$$

が成り立つ。

(2.11) $e_n = \lambda^{-n}(0)$ ($n \in \mathbb{Z}$) とおく。

$$e_n = \begin{cases} -N(e_n) - N(e_{n-1}) - \cdots - N(e_1) & (n > 0) \\ N(e_{n+1}) + N(e_{n+2}) + \cdots + N(e_{-1}) & (n < 0) \end{cases}$$

が成り立つ。

(証明) $N(x) = \lambda(x) - x$ より

$$e_n = -N(e_n) + \lambda(e_n)$$

となる。ところが

$$\lambda(e_n) = \lambda(\lambda^{-n}(0)) = \lambda^{1-n}(0) = e_{n-1}$$

$$\therefore e_n = -N(e_n) + e_{n-1}$$

これを繰り返せば、

$$\begin{aligned} e_n &= -N(e_n) + e_{n-1} \\ &= -N(e_n) - N(e_{n-1}) + e_{n-2} \\ &= \cdots \end{aligned}$$

となるが、

$$e_1 + N(e_1) = \lambda(e_1) = \lambda \lambda^{-1}(0) = 0$$

より、 $e_1 = -N(e_1)$ に注意すれば、

$$e_n = -N(e_n) - N(e_{n-1}) - \cdots - N(e_1) \quad (n > 0)$$

となることはわかる。 $n < 0$ の場合も同様。

(注) $A = (\mathbb{Z}, \oplus, \lambda)$ とすると、 $e_n = n$ である。従って

(2.11) より、

$$n = \begin{cases} N(n) \oplus N(n-1) \oplus \cdots \oplus N(1) & (n > 0) \\ N(n+1) \oplus N(n+2) \oplus \cdots \oplus N(-1) & (n < 0) \end{cases}$$

と書けることがわかる。これは整数を $[\cdots 01\cdots]_{2\text{-adic}}$

という形の2進数の2進和として表わしたことになる。

である。

以下、 M は symmetric, すなわち

$$M(x, y) = M(y, x) \quad (x, y \in A)$$

を仮定することにする。⁶⁾ これは $N(x) = N(-x)$ というこ

であるから、Maya algebra の定義における条件 (2-ii) は

(2-i) より導かれることに注意する。

(2.12) 定義: divisor $D = \frac{(a_1) \cdots (a_m)}{(b_1) \cdots (b_n)}$ に対し、 D の

F -number $F(D)$ を

$$F(D) = a_1 + \cdots + a_m - b_1 - \cdots - b_n + \sum_{i < j \leq m} M(a_i, a_j) \\ + \sum_{i < j \leq n} M(b_i, b_j) - \sum_{i, j} M(a_i, b_j) + n N(0)$$

により定義する。

(注) $D = (a_1) \cdots (a_m) = (c_1)^{\nu_1} \cdots (c_\ell)^{\nu_\ell}$ のときには、

$$F(D) = a_1 + \cdots + a_m + \sum_{i < j} M(a_i, a_j) \\ = \nu_1 c_1 + \cdots + \nu_\ell c_\ell + \sum_{i < j} \nu_i \nu_j M(c_i, c_j) \\ + \sum_i \binom{\nu_i}{2} M(c_i, c_i)$$

となり、 $M(c_i, c_i) = N(0)$ だから、(2.12) は Young diagram に対する F -number (1.5) の自然な拡張になっている。

(2.13) F は $(\mathfrak{P}(A), *)$ から $(A, +)$ への homomorphism になっている。すなわち、

$$F(D' * D) = F(D') + F(D) \quad (D, D' \in \mathfrak{P}(A))$$

が成り立つ。

(証明) $D'' = \mathcal{P}_D^{-1}(D')$ とおくと、 $D' * D = D'' D$ だから、

$$F(D'' D) = F(D') + F(D)$$

を示せばよい。よって、

$$D = \frac{(a_1) \cdots (a_m)}{(b_1) \cdots (b_n)}, \quad D'' = \frac{(c_1) \cdots (c_k)}{(d_1) \cdots (d_\ell)}$$

とすると、

$$F(D') + F(D)$$

$$\begin{aligned} &= a_1 + \cdots + a_m - b_1 - \cdots - b_n + \sum_{i < j} M(a_i, a_j) \\ &\quad + \sum_{i < j} M(b_i, b_j) - \sum_{i, j} M(a_i, b_j) + n N(0) \\ &\quad + \mathcal{P}_D(c_1) + \cdots + \mathcal{P}_D(c_k) - \mathcal{P}_D(d_1) - \cdots - \mathcal{P}_D(d_\ell) \\ &\quad + \sum_{i < j} M(\mathcal{P}_D(c_i), \mathcal{P}_D(c_j)) + \sum_{i < j} M(\mathcal{P}_D(d_i), \mathcal{P}_D(d_j)) \\ &\quad - \sum_{i, j} M(\mathcal{P}_D(c_i), \mathcal{P}_D(d_j)) + \ell N(0) \\ &= \sum_i a_i - \sum_j b_j + \sum_{i < j} M(a_i, a_j) + \sum_{i < j} M(b_i, b_j) \\ &\quad - \sum_{i, j} M(a_i, b_j) + n N(0) + \sum_j (c_j + \sum_i M(a_i, c_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_i M(b_i, c_j)) - \sum_j (d_j + \sum_i M(a_i, d_j) - \sum_i M(b_i, d_j)) \\
& + \sum_{i < j} M(c_i, c_j) + \sum_{i < j} M(d_i, d_j) - \sum_{i, j} M(c_i, d_j) + \ell N(0) \\
& = F(D''D)
\end{aligned}$$

$$(2.14) \quad \mathcal{F}_D(x) = F(D \cdot (x)) - F(D) \quad (D \in \mathbb{F}(A), x \in A)$$

$$(\text{証明}) \quad D = \frac{(a_1) \cdots (a_m)}{(b_1) \cdots (b_n)} \quad \text{と} \quad \exists \quad \text{と}.$$

$$F(D \cdot (x)) - F(D)$$

$$\begin{aligned}
& = \sum_i a_i - \sum_j b_j + \sum_{i < j} M(a_i, a_j) + \sum_i M(x, a_i) \\
& + \sum_{i < j} M(b_i, b_j) - \sum_{i, j} M(a_i, b_j) - \sum_j M(x, b_j) \\
& + n N(0) - \left\{ \sum_i a_i - \sum_j b_j + \sum_{i < j} M(a_i, a_j) \right. \\
& \left. + \sum_{i < j} M(b_i, b_j) - \sum_{i, j} M(a_i, b_j) + n N(0) \right\} \\
& = x + \sum_i M(x, a_i) - \sum_j M(x, b_j) \\
& = \mathcal{F}_D(x)
\end{aligned}$$

$$(2.15) \quad \mathcal{F}_{D \cdot (x)}(x) = \mathcal{F}_D(x) + N(0)$$

$$\text{i.e. } \mathcal{F}_D(x) = -\mu(\mathcal{F}_{D \cdot (x)}(x)) \quad (D \in \mathbb{F}(A), x \in A)$$

$$\begin{aligned}
(\text{証明}) \quad \mathcal{F}_{D \cdot (x)}(x) & = x + M(x, x) + M(x, D) \\
& = \mathcal{F}_D(x) + N(0)
\end{aligned}$$

$$(2.16) \quad D \in \mathbb{F}(A), \quad t \in A \quad \text{に対し,}$$

$$\Psi_{D, t}(x) = \mathcal{F}_D^{-1}(\mathcal{F}_D(x) + t) \quad (x \in A)$$

と定義する.

$$\text{i.e. } \mathcal{F}_D(\Psi_{D, t}(x)) = \mathcal{F}_D(x) + t$$

このとき、

$$F(D \cdot (\rho_{b,t}(x))) = F(D \cdot (x)) + t$$

が成り立つ。

(証明) (2.14) より

$$\begin{aligned} F(D \cdot (\rho_{b,t}(x))) &= F(D) + \mathcal{F}_D(\psi_{D,t}(x)) \\ &= F(D) + \mathcal{F}_D(x) + t \\ &= F(D \cdot (x)) + t \end{aligned}$$

(2.17) $D \in \mathfrak{E}(A)$ に対し

$$\begin{aligned} f_D(x) &= F(D \cdot (x)^{-1}) - F(D) \\ &= -\mathcal{F}_{D \cdot (x)^{-1}}(x) \\ &= -\mathcal{F}_D(x) + N(0) \\ &= \mu(\mathcal{F}_D(x)) \quad (x \in A) \end{aligned}$$

と定義すると、 f_D は *isometry* である。

$$F(D \cdot D'^{-1}) - F(f_D(D')) = F(D) \quad (D, D' \in \mathfrak{E}(A))$$

が成り立つ。

(証明) $F(D \cdot D'^{-1}) = F(D) + F(\mathcal{F}_D(D')^{-1})$ であるから、

$$F(\mathcal{F}_D(D')^{-1}) = F(f_D(D'))$$

を示せばよい。 $D' = \frac{(a_1) \cdots (a_m)}{(b_1) \cdots (b_n)}$ とすると、

$$\begin{aligned} F(\mathcal{F}_D(D')^{-1}) &= -\sum_{i=1}^m \mathcal{F}_D(a_i) + \sum_{j=1}^n \mathcal{F}_D(b_j) \\ &\quad + \sum_{i < j} M(\mathcal{F}_D(a_i), \mathcal{F}_D(a_j)) + \sum_{i < j} M(\mathcal{F}_D(b_i), \mathcal{F}_D(b_j)) \\ &\quad - \sum_{i,j} M(\mathcal{F}_D(a_i), \mathcal{F}_D(b_j)) + m N(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m (-\mathcal{G}_D(a_i) + N(0)) - \sum_{j=1}^m (-\mathcal{G}_D(b_j) + N(0)) \\
&\quad + nN(0) + \sum_{i < j} M(a_i, a_j) + \sum_{i < j} M(b_i, b_j) \\
&\quad - \sum_{i, j} M(a_i, b_j) \\
&= \sum_i f_D(a_i) - \sum_j f_D(b_j) + \sum_{i < j} M(f_D(a_i), f_D(a_j)) \\
&\quad + \sum_{i < j} M(f_D(b_i), f_D(b_j)) - \sum_{i, j} M(f_D(a_i), f_D(b_j)) + nN(0) \\
&= F(f_D(D'))
\end{aligned}$$

§3. Maya game の良形判定条件

以下、 $A = (\mathbb{Z}, \oplus, \lambda)$ で考えることにする。divisor は分母のないものだけ考えればよいから、 $D = (a_1) \cdots (a_m)$ のことも、 $D = (a_1, \dots, a_m)$ と書き、

$$\mathcal{G}_D(x) = \mathcal{G}(x | a_1, \dots, a_m),$$

$$F(D) = F(a_1, \dots, a_m)$$

とも書くことにする。また、この場合、

$$\mu(x) = x \oplus (-1) = -x - 1$$

となっておりことに注意する。

(3.1) 定義: $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への写像 $g_t (t \in \mathbb{Z})$ を

$$g_t(x) = (x \oplus t - x) \oplus (x \oplus t)$$

により定義する。

(注) $(x \oplus t - x) \oplus t$ は常に偶数である。そこで、

$$f_t(x) = \frac{1}{2} \{ (x \oplus t - x) \oplus t \}$$

とかくと、

$$g_t(x) = x \oplus 2f_t(x)$$

と書けるが、この f_t は *projection* の性質を持っている。すなわち、

$$f_t \circ f_t = f_t$$

が成り立つ。

(3.2) g_t は $(\mathbb{Z}, \oplus)$ の *linear map* である。

$$\text{i.e. } g_t(x \oplus y) = g_t(x) \oplus g_t(y)$$

(証明) [2] p.33 系2

($t, x, y \in \mathbb{Z}$ として成り立つ)

以下、 $t \in \mathbb{Z}$, および $D = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1}) \in \mathfrak{A}(A)$ を1つ固定して考える。まず、

$$h = F(D), \quad h' = h \oplus t$$

とおき、

$$D_i = D \cdot (l_i)^{-1} \quad (0 \leq i \leq n-1)$$

$$D_{ij} = D \cdot (l_i)^{-1} \cdot (l_j)^{-1} \quad (0 \leq i < j \leq n-1)$$

$$l_i' = \psi_{D_i, t}(l_i) = \mathcal{G}_{D_i}^{-1}(\mathcal{G}_{D_i}(l_i) \oplus t)$$

$$b_i = f_D(l_i) = \mathcal{G}_{D_i}(l_i)$$

と定義する。§2.の結果を言い直すと、(2.16)より、

$$(3.3) \quad F(l_0, \dots, l_i', \dots, l_{n-1}) = h'$$

(2.17)より、

$$(3.4) \quad M(b_i, b_j) = M(l_i, l_j)$$

$$(3.5) \quad F(b_0, \dots, b_{i-1}) \oplus F(l_i, \dots, l_{n-1}) = h$$

$$\text{特に, } F(D_{ij}) \oplus h = F(b_i, b_j)$$

$$(3.6) \quad \text{定義: } \Xi_t(D) = \sum_{i=0}^{n-1} \oplus ((l'_i - l_i) \oplus l'_i) \\ \oplus \sum_{i < j} \oplus M(h' \oplus (-1), F(D_{ij}))$$

(注) Ξ_t を hook の言葉を使って表わすと.

$$\Xi_t(D) = \sum_{\Gamma: D \text{ の hook}} \oplus M(t, F(D) \oplus F(D - \Gamma))$$

と書ける。⁷⁾ただし、 $D - \Gamma$ というのは、 D から hook Γ を取り去ったときできる Young diagram のことである。 $F(D) \oplus F(D - \Gamma)$ というのは hook Γ を取り去ることによる F -number の変化量を表わしている。

(注) $\Xi_t(D)$ の定義における最後の項は

$$M(h' \oplus (-1), F(D_{ij})) \\ = M(t \oplus (-1), F(D) \oplus F(D_i) \oplus F(D_j) \oplus F(D_{ij})) \\ = M(t, \mathcal{P}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{P}_{D_j}(l_j) \oplus (-1)) \\ = M(t, \mathcal{P}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{P}_{D_i}(l_j))$$

と変形できる。従って、特に $t=0$ のときは、 $h'=h$, $l'_i=l_i$ だから.

$$\Xi_0(D) = \sum \oplus l_i \oplus \sum_{i < j} \oplus M(\mathcal{P}_{D_i}(l_i), \mathcal{P}_{D_i}(l_j)) \\ = \sum \oplus l_i \oplus \sum_{i < j} \oplus M(l_i, l_j) \\ = F(D)$$

となる。すなわち、 $\Xi_0 = F$ である。従って、 Ξ_t というのは F -number の拡張と考えられるが、 $\Xi_t(D)$ の値は、実は、 $F(D)$ と t だけで決ってしまうというのが次の定理である。

$$(3.7) \quad \Xi_t(D) = g_t(F(D)).$$

(証明) $D = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ とし、 n に関する帰納法で証明するのであるが、ここでは方針を示すだけにする。詳細は [3] を見たい。

step 1. $D = (l_0)$ (i.e. $n=1$) の時、(3.7) は成り立つ。 $(l_0 = h, l'_0 = h' = l_0 \oplus t \text{ に注意})$

step 2. $D = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$ の時、(3.7) が成り立つとは、 $\bar{D} = (l_0 \oplus k, l_1 \oplus k, \dots, l_{n-1} \oplus k)$ に対しても成り立つ。

何故なら、

$$\begin{aligned} F(\bar{D}) &= h \oplus \overbrace{k \oplus \dots \oplus k}^n, \\ \Xi_t(\bar{D}) &= \sum_i^{\oplus} ((l'_i \oplus k - l_i \oplus k) \oplus (l'_i \oplus k)) \\ &\quad \oplus \sum_{i < j}^{\oplus} M(h' \oplus (-1), F(D_{ij})) \end{aligned}$$

となるが、

$$\begin{aligned} (l'_i - l_i) \oplus l'_i &= g_{l'_i \oplus l_i}(l_i), \\ (l'_i \oplus k - l_i \oplus k) \oplus (l'_i \oplus k) &= g_{l'_i \oplus l_i}(l_i \oplus k) \end{aligned}$$

に注意すると、

$$\begin{aligned}\overline{\pi}_t(\overline{D}) &= \overline{\pi}_t(D) \oplus \sum_i^{\oplus} g_{t_i}(k) \\ &= g_t(h) \oplus \sum_i^{\oplus} g_{t_i}(k)\end{aligned}$$

と書けることがわかる。ただし、 $t_i = l_i' \oplus l_i$ とおく。ここで、 $l_i' = \mathcal{P}_{D_i}^{-1}(\mathcal{P}_{D_i}(l_i) \oplus t)$ をとくと、

$$l_i' = t \oplus b_i \oplus \sum_{j \neq i} M(-t, b_i \oplus b_j),$$

となり、ここで $t=0$ とすると、

$$l_i = b_i \oplus \sum_{j \neq i} N(b_i \oplus b_j)$$

が得られる。従って

$$t_i = t \oplus \sum_{j \neq i} (N((-t) \oplus b_i \oplus b_j) \oplus N(b_i \oplus b_j))$$

と書けるが、一般に、次の補題が成り立つ。([3] 補題 12)

(3.8) 整数 $b_1, b_2, \dots, b_n, m$ が与えられたとき、

$$e_{ij} = N(m \oplus b_i \oplus b_j) \oplus N(b_i \oplus b_j)$$

とおく。このとき、適当に番号をつけ変えれば、

$$\begin{aligned}\sum_{k \neq 1}^{\oplus} e_{1k} &= \sum_{k \neq 2}^{\oplus} e_{2k} \\ \sum_{k \neq 3}^{\oplus} e_{3k} &= \sum_{k \neq 4}^{\oplus} e_{4k} \\ &\dots\dots\end{aligned}$$

が成り立つようにできる。ただし、 n が奇数のとき、最後の式は

$$\sum_{k \neq n}^{\oplus} e_{nk} = 0$$

となる。

この補題を使うと、

$$\sum_{i=0}^{n-1} \oplus g_{t_i}(k) = \begin{cases} 0 & n: \text{even} \\ g_t(k) & n: \text{odd} \end{cases}$$

となることがわかる。故に、

$$\Phi_t(\overline{D}) = g_t(k \oplus \overbrace{k \oplus \dots \oplus k}^n) = g_t(F(\overline{D}))$$

となる。

step 3. $D = (\lambda(l_0), \dots, \lambda(l_{n-1}))$ に対し、(3.7)

が成り立てば、 $\overline{D} = (l_0, \dots, l_{n-1}, 0)$ に対しても成り立つ。

何故なら、

$$F(\overline{D}) = F(D)$$

$$\Phi_t(\overline{D}) = \Phi_t(D)$$

となることが、容易に確かめられる。

(3.7) を使うことにより、次の定理が証明できる。

(3.9) *Maya game* の局面 $D = (l_0, l_1, \dots, l_{n-1})$, および自然数 k' が与えられた時、 D を $F(D') = k'$ を満たす局面 D' に変えるような手の数は、 $F(D) = k$ とおくと、 $k' \geq k$ ならば偶数個 (特に $k' = k$ ならば 1 つもない)、 $k' < k$ ならば奇数個 (従って少なくとも 1 つ) ある。

(証明) D_i, D_{ij}, l_i' はこの節の初めに定義したものと
 する。そして $D_i' = D_i \cdot (l_i')$ とおくと、(3.3)に
 より、 $F(D_i') = h'$ となる。まず、 $l_i' \neq l_j$ ($i \neq j$)
 に注意する。何故なら、 $l_i' = l_j$ とすると、

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{D_i}(l_i') &= \mathcal{S}_{D_i}(l_j) \\ &= l_j \oplus \sum_{k \neq i, j}^{\oplus} M(l_j, l_k) \oplus M(l_j, l_j) \end{aligned}$$

は負になるはずだが、

$$\mathcal{S}_{D_i}(l_i') = \mathcal{S}_{D_i}(l_i) \oplus t$$

が負になることはないから、矛盾である。

従って $l_i' < l_i$ ならば、 D を D_i' に変えるのは
 許された手であり、逆に許された手はすべてこのよ
 うにして得られる。

(3.7) より

$$\begin{aligned} \sum_i^{\oplus} ((l_i' - l_i) \oplus l_i') \oplus \sum_{i, j}^{\oplus} M(h' \oplus (-1), F(D_{ij})) \\ = (h' - h) \oplus h' \end{aligned}$$

となるが、 $h' \geq h$ ならば右辺は正(または0)、従
 って左辺の中に負の項が偶数個あるはずである。こ
 こが $M(h' \oplus (-1), F(D_{ij})) \geq 0$ であるから、 $l_i' - l_i$
 の中に負のものが偶数個ある。すなわち、 $l_i' < l_i$ と
 なる l_i' が偶数個あるわけである。 $h' < h$ の時も同様
 にして、 $l_i' < l_i$ となる l_i' が奇数個あることがわかる。

特に $h' = h$ とすると $h'_i = h_i$ だから、許された手も実行すると、必ず F -number が変化することがわかる。

(3.9) より次の判定条件が得られることは明らかである。

(3.10) $F(D) = 0$ となる局面 D が *Maya game* の良形 (後手必勝形) である。

(補 注)

- 1) 佐藤の *game* とも呼ばれている。
- 2) 対称群の表現論などにおいて、*Young diagram* を扱う時には、通常、第 i 行目のマス目の数を f_i とするが、ここでは *game* との関係で、順番を逆にしている。
- 3) (1.3), (1.4) を満たす f は *bijection* であって、 f^{-1} もこれを満たすことが容易にわかる。 f, g が (1.3), (1.4) を満たす時、 $f \circ g$ も満たすことは明らか。
- 4) [1] (p.128) において、*Criterion II* として、 f が良形に対応するための条件は

$$f(x + 2^M) \equiv f(x) + 2^M \pmod{2^{M+3}}$$

が成り立つことである、と書いてあるが、これは f が良形に対応するための十分条件ではあるが、必要条件ではなかった。

5) $F(D)$ が二のような式で表わされることの証明。

第1行目のマス目からつくった hook の size は、

$$1, 2, \dots, f_{n-1} - f_{n-2} = l_{n-1} - l_{n-2} - 1, \\ l_{n-1} - l_{n-2} + 1, \dots, l_{n-1} - l_{n-3} - 1, \\ l_{n-1} - l_{n-3} + 1, \dots, \dots, \\ \dots, l_{n-1}$$

となる。すなわち、 $1, 2, \dots, l_{n-1}$ のうち、 $l_{n-1} - l_{n-2},$
 $l_{n-1} - l_{n-3}, \dots, l_{n-1} - l_0$ が現われない。もっと一般に、
 第 i 行目では、 $1, 2, \dots, l_{n-i}$ のうち、 $l_{n-i} - l_j$
 $(0 \leq j \leq n-i-1)$ を除いたものが出てくる。

l_{n-1}		$l_{n-1} - l_{n-3} + 1$	$l_{n-1} - l_{n-3} - 1$	...	$l_{n-1} - l_{n-2} + 1$	$l_{n-1} - l_{n-2} - 1$	...	2	1
l_{n-2}		$l_{n-2} - l_{n-3} + 1$	$l_{n-2} - l_{n-3} - 1$	...	1				
l_{n-3}		1							

.....

故に、

$$F(D) = \sum_{\Gamma: \text{hook}}^{\oplus} N(\Gamma \text{ の size}) \\ = N(1) \oplus \dots \oplus N(l_{n-1}) \oplus \sum_{i=0}^{n-2} N(l_{n-1} - l_i) \\ \oplus N(1) \oplus \dots \oplus N(l_{n-2}) \oplus \sum_{i=0}^{n-3} N(l_{n-2} - l_i) \\ \dots$$

ところが、(2.11) の (註) より

$$N(1) \oplus \dots \oplus N(x) = x$$

が成り立つから、

$$F(D) = l_{n-1} \oplus l_{n-2} \oplus \dots \oplus l_0 \oplus \sum_{i>j}^{\oplus} N(l_i - l_j)$$

と書ける。そして、

$$\begin{aligned} N(l_i - l_j) &= M(l_i - l_j, 0) \\ &= M(\lambda^{l_i}(l_i), 0) \\ &= M(l_i, \lambda^{-l_j}(0)) \\ &= M(l_i, l_j) \end{aligned}$$

より、

$$F(D) = \sum_{i=0}^{n-1}^{\oplus} l_i \oplus \sum_{i<j}^{\oplus} N(l_i \oplus l_j)$$

となる。

6) symmetric でなる Maya algebra の例をあげておく。

A を $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{Z}}$ から生成される自由 abel 群とする。

$$A \ni x = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} n_\nu u_\nu \quad (\text{有限和})$$

に対して、

$$\sigma(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} n_\nu \in \mathbb{Z}$$

と定義すると、 σ は A から $\mathbb{Z}$ への homomorphism である。そこで、

$$N(x) = u_{\sigma(x)},$$

$$\lambda(x) = x + N(x)$$

とおくと、 $(A, +, \lambda)$ は symmetric でなる Maya algebra となる。

7) $\sum_{P: \text{hook}} \oplus M(t, F(D) \oplus F(D-P))$ において、第 i 行

目の hook だけを考えると、

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{0 \leq l < l_i \\ l \neq l_j}} \oplus M(t, F(D) \oplus F(D_i(l))) \\ &= \sum_{l=0}^{l_i-1} \oplus M(t, \mathcal{F}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{F}_{D_i}(l)) \\ & \oplus \sum_{j < i} \oplus M(t, \mathcal{F}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{F}_{D_i}(l_j)) \end{aligned}$$

と t が、

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{l_i-1} \oplus M(t, \mathcal{F}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{F}_{D_i}(l)) \\ &= \sum_l \oplus M(\mathcal{F}_{D_i}^{-1}(\mathcal{F}_{D_i}(l_i) \oplus t), l) \\ &= \sum_{l=0}^{l_i-1} \oplus N(l_i' - l) \\ &= \left(\sum_{x=1}^{l_i'} \oplus N(x) \right) \oplus \left(\sum_{x=1}^{l_i' - l_i} \oplus N(x) \right) \\ &= l_i' \oplus (l_i' - l_i) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} & \sum_{P: \text{hook}} \oplus M(t, F(D) \oplus F(D-P)) \\ &= \sum_i \oplus (l_i' - l_i) \oplus l_i' \oplus \sum_{i < j} \oplus M(t, \mathcal{F}_{D_i}(l_i) \oplus \mathcal{F}_{D_i}(l_j)) \end{aligned}$$

と書けることがわかる。