

Infinite tensor product について

阪大 基礎工 竹之内 脩

昨年の作用素環研究会において, type I factors の無限テンソル積の型について報告した.[2] その方法は, measure-theoretic なものであったが, 最近 E. Størmer は, 竹崎が富田[4]の理論を発展させた結果を用いて, これを operator algebra の枠内で議論できることを示したので, 以下それについて述べる.

H_v ($v=1, 2, \dots$) : ヒルベルト空間

e_v は H_v の固定された単位ベクトル

$H = \prod_v (H_v, e_v)$: $\prod_v e_v$ を含む無限テンソル積

M_v は H_v 上に与えられた factor

$T \in M_v$ の H 上への拡大 $\bar{T}$, $\overline{M}_v = \{\bar{T}; T \in M_v\}$,

M は $\overline{M}_v$ ($v=1, 2, \dots$) から生成された H 上の von Neumann 環.

2. M の factor type は問題にする.

そこで, M_v のいずれかが type III ならば, M は type

III となるから、以下には、 M_v はすべて半有限と仮定し、
 そのとき、 M が半有限であるための条件を求めよう。また、
 e_v は M_v に関し、separating and generating vector であるとして
 仮定しておいて、一般性を失わない。

t_v は M_v の faithful, normal, semi-finite trace である。

よって、 M_v 上の normal state $p_v(A) = (Ae_v, e_v)$

($A \in M_v$) に対し、 $p_v(A) = t_v(AH_v)$ とする。

positive self-adjoint operator H_v が M_v に一意的に定まる。

そこで、 H_v が N_v 上の M_v の maximal abelian subalgebra

N_v を含む、 Ω_v は measure space (Ω_v, μ_v) 上の multiplication
 algebra として表現する： $N_v \ni A \rightarrow \varphi_v(A) \in L^\infty(\Omega_v, \mu_v)$ 。

そこで、measure μ_v は

$$t_v(A) = \int_{\Omega_v} \varphi_v(A)(\omega) d\mu_v(\omega) \quad \text{for } A \in N_v$$

であることが知られる。ここで、 $h_v(\omega) \in L^1(\Omega_v, \mu_v)$

と、 H_v に対応するものがある。

$$p_v(A) = \int_{\Omega_v} h_v(\omega) \varphi_v(A)(\omega) d\mu_v(\omega) \quad \text{for } A \in N_v.$$

定理 (Størmer [1])

M is semi-finite

$$\Leftrightarrow \sum_v \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_v} h_v(\omega) h_v(\omega') \min \left\{ \left| \frac{h_v(\omega)}{h_v(\omega')} - 1 \right|, c \right\} d\mu_v(\omega) d\mu_v(\omega') < \infty$$

ある $c > 0$ が存在する。

§1. KMS condition.

M is von Neumann algebra, $\rho \in M_*$ faithful normal state. $\exists \beta \in \mathbb{R}$, M has a one-parameter $*$ -automorphism group σ_t ($-\infty < t < \infty$) which is strongly continuous,

ρ is σ_t -invariant.

$\forall A, B \in M$ there is, $0 < \gamma \leq \beta$ is real number $F(\gamma)$ which is,

$$F(\gamma) = \rho(\sigma_\gamma(A)B), \quad F(\gamma + i\beta) = \rho(B\sigma_\gamma(A))$$

exists. (i.e. $\beta > 0$ is fixed $\gamma \in \mathbb{R}$, A, B is fixed exists.)

$\gamma \in \mathbb{R}$, ρ is KMS-condition is satisfied.

定理 (Hjorth [3]) Let ρ be faithful normal state is, $\beta = 1$ is, KMS condition is satisfied.

ρ is, γ defines a cyclic representation π_γ is, M is π_γ -separating and generating vector e exists, ρ is,

$$\rho(A) = (Ae, e) \quad (A \in M)$$

is satisfied is, π_γ is cyclic and separating.

$$\mathcal{A} = \{Ae; A \in M\}$$

is, π_γ is,

$$(Ae)(Be) = (AB)e$$

$$(Ae)^* = A^*e$$

と定義すれば, $\mathcal{A}$ は 富田の generalized Hilbert algebra となる.

$\mathcal{A}$ 上の left multiplication $x \rightarrow ax$ は bounded, かつ
 $(ab, c) = (b, a^*c)$ を満たす. また $\mathcal{A}$ の 稠密な
 dense subalgebra $\mathcal{L}$ として,

right multiplication $x \rightarrow xb$ ($x \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{L}$) は bounded,

各 $b \in \mathcal{L}$ に対して, 適当に $b^s \in \mathcal{L}$ が存在して,

$$(ab, c) = (a, cb^s) \quad (a, b, c \in \mathcal{L})$$

が成り立ち, $x \in \mathcal{L}$ に対して,

$$\Delta x = x^{s*}$$

と成り立ち, Δ は positive self-adjoint operator に unique

に拡大できる. この Δ は, 富田の所謂 modular operator と

あるが, この Δ を用いて, M の one-parameter automorphism
 group σ_t は

$$\sigma_t(A) = \Delta^{it} A \Delta^{-it}, \quad A \in M, \quad -\infty < t < \infty$$

と定義すれば, これは定理 12.1 の条件を満たす.

この automorphism group は modular automorphism group と呼ぶ.

定理 (竹崎)

前の定理で,

$$M: \text{semi-finite} \iff \text{modular automorphism group is inner}$$

M が semi-finite ならば, τ は faithful semi-finite normal
 trace を t とする. すると, ρ は t に関する Radon-

Nikodym derivative $\exists H$ とする :

$$p(A) = t(AH).$$

$\exists$ する $\mathcal{H}$, modular automorphism group σ_t は,

$$\sigma_t(A) = H^{it} A H^{-it}, \quad A \in M, \quad -\infty < t < \infty$$

とすることが出来る.

§ 2. Lemma.

$$M: \text{semi-finite} \Leftrightarrow \sum_v (1 - |(H_v^{-it} e_v, e_v)|) < \infty \quad (-\infty < t < \infty)$$

$$[\Rightarrow] \quad M = \bigotimes_{v \in \mathbb{N}} M_v = M_1 \otimes M_2 \otimes \cdots \otimes M_n \otimes \bigotimes_{v > n} M_v \quad \text{とすれば,}$$

modular automorphism group は,

$$\sigma^t = \sigma_1^t \otimes \sigma_2^t \otimes \cdots \otimes \sigma_n^t \otimes \sigma^t$$

と... $\prod$ とする, これより σ と σ^t は,

$$H^{it} = H_1^{it} \otimes H_2^{it} \otimes \cdots \otimes H_n^{it} \otimes {}_n H^{it}$$

とすることが出来る. (2)より, M は factor であるから, σ は M の絶対値 1 の const. 部分を除く σ 一致する.

$$\begin{aligned} |(H^{-it} e, e)| &= \prod_{v \in \mathbb{N}} |(H_v^{-it} e_v, e_v)| \cdot |({}_n H^{-it} e, {}_n e)| \\ &\leq \prod_{v \in \mathbb{N}} |(H_v^{-it} e_v, e_v)| \end{aligned}$$

$$\therefore |(H^{-it} e, e)| \leq \prod |(H_v^{-it} e_v, e_v)|$$

もし $(H^{-it} e, e) \neq 0$ ならば, 右の無限乗積が収束するから,

Lemma の条件を得る. $(H^{-it} e, e) = 0$ ならば, $\forall e \in$

$$\therefore \because \theta_v(t) = t w_v(t) \quad \geq J_1 \quad \text{by } T_2. \quad \therefore \text{it follows,}$$

$$\begin{aligned} & | \exp it (\log h_v(w) - \log h_v(w')) - 1 |^2 \\ &= | \exp it (w_v(t) - \log h_v(w')) - \exp it (w_v(t) - \log h_v(w)) |^2 \\ &\leq 2 | \exp it (w_v(t) - \log h_v(w)) - 1 |^2 + 2 | \exp it (w_v(t) - \log h_v(w')) - 1 |^2 \end{aligned}$$

is (A) is 2,

$$\begin{aligned} & \sum_v \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_v} h_v(w) h_v(w') | \exp it (\log h_v(w) - \log h_v(w')) - 1 |^2 d\mu_v(w) d\mu_v(w') \\ &\leq 4 \sum_v \int_{\Omega_v} h_v(w) | \exp it (w_v(t) - \log h_v(w)) - 1 |^2 d\mu_v(w) < \infty. \end{aligned}$$

is the same as the above is 2 is the same as 2.

[4] is the same as

$$\begin{aligned} & \sum_v \int_{\Omega_v} \int_{\Omega_v} h_v(w) h_v(w') | \exp it (\log h_v(w) - \log h_v(w')) - 1 |^2 d\mu_v(w) d\mu_v(w') \\ &< \infty \end{aligned}$$

is the same as

$$\begin{aligned} & \sum_v (1 - | (H_v^{-it} e_v, e_v) |) \\ &= \sum_v \int_{\Omega_v} h_v(w) (1 - | (H_v^{-it} e_v, e_v) |) d\mu_v(w) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_v \int_{\Omega_v} h_v(w) \| \exp(it \log h_v(w)) H_v^{-it} e_v - e_v \|^2 d\mu_v(w) \\ &= \frac{1}{2} \sum_v \int_{\Omega_v} h_v(w) \left(\int_{\Omega_v} h_v(w') | \exp it (\log h_v(w) - \log h_v(w')) - 1 |^2 d\mu_v(w') \right) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

References

- [1] E. Størmer: On infinite tensor product of von Neumann algebras, To appear
- [2] O. Takenouchi: On type classification of factors constructed as infinite tensor products, Publ. RIMS, Kyoto Univ. (1968)
- [3] M. Takesaki: Tomita's theory of modular Hilbert algebras and its applications, Mimeographed note (1969)
- [4] M. Tomita: Standard forms of von Neumann algebras. Mimeographed note (1967)